

## О ДВИЖЕНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Л. А. Галин, А. А. Шматкова

(Москва)

Исследуется плоская контактная задача о движении жесткого штампа с постоянной скоростью по границе полуплоскости. Материал, заполняющий среду, предполагается изотропным и линейно-вязко-упругим. Рассматриваются такие скорости движения, при которых нельзя пренебрегать влиянием инерционных сил. Приводится числовой пример.

1. В работах [1-3] исследовался ряд контактных задач для линейных вязко-упругих тел, однако влиянием сил инерции пренебрегалось. Если скорость движения штампа сравнима со скоростью звука, то влияние инерционных сил будет значительным. Задача о движении штампа по границе упругой полуплоскости была рассмотрена одним из авторов [4]. Следует заметить, что учет вязко-упругих эффектов и сил инерции приводит к существенным осложнениям при решении задачи.

Найдем выражение для нормальной составляющей перемещения на поверхности вязко-упругой полуплоскости, подверженной действию сосредоточенной силы, движущейся вдоль нее с постоянной скоростью  $w$ . Сосредоточенную силу будем в дальнейшем рассматривать как предельный случай давления, распределенного на некотором интервале.

Для большинства вязко-упругих тел, как указывается, в частности, в работе [5], можно полагать, что объемная деформация чисто упруга и поэтому можно пренебрегать объемным последствием. Тогда соотношения между компонентами деформаций и напряжений для плоского деформированного состояния будут

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \varepsilon_x - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon_x d\tau + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_y + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon_y d\tau \right] \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_x + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon_x d\tau + \varepsilon_y - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon_y d\tau \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \gamma_{xy} - \frac{3}{2} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \gamma_{xy} d\tau \right] \quad (1.1)\end{aligned}$$

В дальнейшем будет рассмотрен случай, когда ядро в выражениях (1.1) будет экспоненциальным

$$R(t - \tau) = me^{-n(t-\tau)/t_0}, \quad m > 0, \quad n > 0 \quad (1.2)$$

Введем некоторое характерное время  $t_0$  и будем рассматривать среды, для которых последнее не очень значительно и, следовательно, параметр  $n_1 = n / t_0$  велик. Воспользуемся уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

и соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.4)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи таковы:

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -P\delta(x) \quad \text{при } y=0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.5)$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rightarrow 0 \quad \text{при } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

Здесь  $P$  — величина сосредоточенной силы, а  $\delta(x)$  — дельта-функция

2. Элементарное решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= e^{i\beta x} \psi_1(\beta, y), & \varepsilon_x &= e^{i\beta x} \varphi_1(\beta, y) \\ \sigma_y &= e^{i\beta x} \psi_2(\beta, y), & \varepsilon_y &= e^{i\beta x} \varphi_2(\beta, y), & u &= e^{i\beta x} \omega_1(\beta, y) \\ \tau_{xy} &= e^{i\beta x} \psi_3(\beta, y), & \gamma_{xy} &= e^{i\beta x} \varphi_3(\beta, y), & v &= e^{i\beta x} \omega_2(\beta, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

При нахождении компонентов напряжения, деформации и перемещения будем брать вещественные части от полученных выражений.

Подставляя (2.1) в (1.1), (1.3), (1.4), вводя безразмерные функции и координаты и переходя к подвижной системе координат, получим

$$\begin{aligned} \psi_1(\beta, y) &= A\varphi_1(\beta, y) + B\varphi_2(\beta, y), & \psi_2(\beta, y) &= B\varphi_1(\beta, y) + A\varphi_2(\beta, y) \\ \psi_3(\beta, y) &= C\varphi_3(\beta, y), & i\beta\psi_1(\beta, y) + \psi_3'(\beta, y) + N\beta^2\omega_1(\beta, y) &= 0 \\ \psi_2'(\beta, y) + i\beta\psi_3(\beta, y) + N\beta^2\omega_2(\beta, y) &= 0, & \varphi_1(\beta, y) &= i\beta\omega_1(\beta, y) \\ \varphi_2(\beta, y) &= \omega_2'(\beta, y), & \varphi_3(\beta, y) &= 1/2 [\omega_1'(\beta, y) + i\beta\omega_2(\beta, y)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1 - m_1 H), & B &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( 1 + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{m_1}{2} H \right) \\ C &= \frac{1}{1+\nu} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1-\nu}{1-2\nu} m_1 H \right), & H &= [n_1 x_0 / w + i\beta]^{-1}, & N &= \frac{\rho w^2}{E}, & m_1 &= \frac{m x_0}{w} \end{aligned}$$

где  $x_0$  — некоторый условный линейный масштаб.

Систему (2.2) можно свести к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$C_1 \psi_2^{IV}(\beta, y) + C_2 \psi_2''(\beta, y) + C_3 \psi_2(\beta, y) = 0 \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1 &= AC, & C_2 &= \beta^2 (2BC + 2B^2 - 2A^2 + NC + 2NA), \\ C_3 &= \beta^4 (AC - NC - 2NA + 2N^2) \end{aligned}$$

В дальнейшем все функции, входящие в соотношения (2.2), будут выражены через  $\psi_2(\beta, y)$ .

Принимая во внимание ограничения, наложенные ранее на ядро (1.2), преобразуем коэффициенты уравнения (2.3), раскладывая их по  $H$  и пренебрегая членами, содержащими  $H$  в степени выше первой. Решение уравнения (2.3) таково:

$$\psi_2(\beta, y) = \sum_{k=1}^4 Q_k e^{\lambda_k y} \quad (2.4)$$

Здесь  $\lambda_k$ , являющиеся корнями характеристического уравнения, все различны и определяются соотношениями

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \beta a_1 (1 + b_1 H), \quad a_{1,2} = \left[ \frac{\pm (L_2^2 - 4L_4)^{1/2} - L_2}{2} \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \beta a_2 (1 + b_2 H)$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(L_2 L_3 - 2L_1 L_4 - 2L_5) (L_2^2 - 4L_4)^{-1/2} \mp L_3}{(L_2^2 - 4L_4)^{1/2} \mp L_2} - L_1 \right]$$

Здесь

$$L_1 = -m_1 \frac{5-7\nu}{2(1-2\nu)}, \quad L_4 = 1 - N \frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{1-\nu} + 2N^2 \frac{(1+\nu)^2(1-2\nu)}{1-\nu}$$

$$L_2 = -2 + N \frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{1-\nu}, \quad L_3 = m_1 \left[ \frac{5-7\nu}{1-2\nu} - \frac{7}{2} N(1+\nu) \right]$$

$$L_5 = m_1 \left[ -\frac{(5-7\nu)(1+\nu)^2}{2(1-\nu)} + \frac{7}{2} N(1+\nu) \right]$$

В выражениях для  $a$  и  $b$  первые индексы соответствуют выбору верхних знаков, вторые — нижних.

Используя условие на бесконечности (1.6), приходим к выводу, что в решение должны входить только  $\lambda_k > 0$ . Анализ выражений (2.5) позволяет сделать заключение, что при сделанных выше предложениях положительными корнями являются  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ . На основании (2.4) получим

$$\psi_2(\beta, y) = Q_1 e^{-\beta a_1 y} (1 - \beta a_1 b_1 H y) + Q_2 e^{-\beta a_2 y} (1 - \beta a_2 b_2 H y), \quad y > 0 \quad (2.6)$$

Выражение для  $\sigma_y$  будем искать в следующей форме:

$$\sigma_y = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \psi_2(\beta, y) e^{i\beta x} d\beta$$

Коэффициенты  $Q_j$  ( $j = 1, 2$ ) найдем таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия (1.5). Используя второе из них, получим

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{P}{\pi E} \quad (2.7)$$

Из системы уравнений (2.2) установим выражение для  $\psi_3(\beta, y)$ :

$$\psi_3(\beta, y) = iC_4 \left[ \frac{C_5}{\beta} \psi_2'(\beta, y) + \frac{C_6}{\beta^3} \psi_2'''(\beta, y) \right] \quad (2.8)$$

где введены обозначения

$$C_4 = C [(C - 2N)(A + B)(A - B - N)]^{-1}$$

$$C_5 = A^2 - B^2 - 2NB - NA - N^2, \quad C_6 = -NA$$

Выражение для  $\tau_{xy}$  будет

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \psi_3(\beta, y) e^{i\beta x} d\beta$$

Учитывая соотношение (2.6), преобразуем (2.8) к виду

$$\begin{aligned} \psi_3(\beta, y) = & -i \{ Q_1 e^{-\beta a_1 y} [r_1 + H(r_3 - r_5 \beta y)] + \\ & + Q_2 e^{-\beta a_2 y} [r_2 + H(r_4 - r_6 \beta y)] \}, \quad y > 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $r_1, \dots, r_6$  — постоянные, не зависящие от  $\beta$  и выражающиеся так

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= a_{1,2} L_6 (L_8 + a_{1,2}^2 L_{10}), \quad r_{5,6} = b_{1,2} r_{1,2} \\ r_{3,4} &= L_7 (L_8 + a_{1,2}^2 L_{10}) + L_6 (L_9 + b_{1,2} L_8) + a_{1,2}^2 L_6 (L_{11} + 3b_{1,2} L_{10}) \\ L_6 &= \frac{(1+\nu)^2(1-2\nu)}{1-3N(1+\nu)+2N^2(1+\nu)^2}, \quad L_8 = \frac{1}{(1+\nu)^2(1-2\nu)} - N \frac{1}{1-2\nu} - N^2 \\ L_7 &= m_1 \frac{(1+\nu)^2(1-\nu)[2(2-\nu)-3N(1+\nu)(1-2\nu)-4N^2(1+\nu)^2]}{2[1-3N(1+\nu)+2N^2(1+\nu)]^2} \\ L_9 &= -m_1 \frac{2-3\nu+\nu^2}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}, \quad L_{10} = -N \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad L_{11} = -m_1 L_{10} \end{aligned}$$

Следует отметить, что при выборе первого индекса в соотношениях для  $r_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) необходимо пользоваться выражениями для его составляющих, взятыми тоже с первыми индексами.

Используя первое условие в выражениях (1.5), получим недостающее соотношение для определения коэффициентов  $Q_j$  ( $j = 1, 2$ )

$$Q_1 (r_1 + H r_3) + Q_2 (r_2 + H r_4) = 0 \quad (2.10)$$

Система уравнений (2.7) и (2.10) дает

$$Q_{1,2} = \pm \frac{P}{\pi E} \frac{1}{r_1 - r_2} \left( r_{2,1} + H \frac{r_1 r_4 - r_2 r_3}{r_1 - r_2} \right) \quad (2.11)$$

Используя систему (2.2), рассмотрим соотношение, определяющее перемещение точек вязко-упругой полуплоскости в направлении оси  $y$ :

$$\omega_2(\beta, y) = -\frac{1}{N\beta^2} [\psi_2'(\beta, y) + i\beta\psi_3(\beta, y)] \quad (2.12)$$

Тогда

$$v = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \omega_2(\beta, y) e^{i\beta x} d\beta$$

Преобразуем это соотношение, учитывая (2.6), (2.9) и (2.11)

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} [S_1(\beta, y) \cos \beta x + S_2(\beta, y) \sin \beta x] d\beta \quad (2.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_1(\beta, y) &= \frac{P}{\pi E} \frac{l_0}{\beta} \left\{ e^{-\beta a_1 y} \left[ l_1 + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 + \beta^2} (l_2 + l_3 \beta y) \right] - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\beta a_2 y} \left[ l_4 + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 + \beta^2} (l_5 + l_6 \beta y) \right] \right\} \\ S_2(\beta, y) &= \frac{P}{\pi E} l_0 \left\{ e^{-\beta a_1 y} \frac{1}{\xi_0^2 + \beta^2} (l_2 + l_3 \beta y) - e^{-\beta a_2 y} \frac{1}{\xi_0^2 + \beta^2} (l_5 + l_6 \beta y) \right\} \end{aligned}$$

причем  $l_0, \dots, l_6$  и  $\xi_0$  — постоянные, не зависящие от  $\beta$  и имеющие такой вид:

$$l_0 = [N(r_1 - r_2)]^{-1}, \quad l_{2,5} = \frac{(a_{1,2} - r_{1,2})(r_1 r_4 - r_2 r_3)}{r_1 - r_2} + r_{2,1}(a_{1,2} b_{1,2} - r_{3,4})$$

$$l_{1,4} = r_{2,1}(a_{1,2} - r_{1,2}), \quad l_{3,6} = r_{2,1}(r_{5,6} - a_{1,2}^2 b_{1,2}), \quad \xi_0 = n_1 x_0 / w$$

(выбор индексов определен выше).

В дальнейшем будем иметь дело не с самим  $v$ , а с его производной по  $x$ ; поскольку для нахождения напряжения, возникающего под штампом, необходимо найти решение интегрального уравнения

$$\int_{-1}^1 K(x - \xi) P(\xi) d\xi = f(\xi)$$

где ядро  $K(x)$  будет функцией Грина рассматриваемой выше задачи и равно  $[dv/dx]_{y=0}$ . Таким образом

$$\frac{dv}{dx} = \frac{P}{\pi E} l_0 \left[ - \int_0^\infty (l_1 e^{-\beta a_1 y} - l_4 e^{-\beta a_2 y}) \sin \beta x d\beta - \right. \quad (2.14)$$

$$- \xi_0 \int_0^\infty (l_2 e^{-\beta a_1 y} - l_5 e^{-\beta a_2 y}) \frac{\sin \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta - \xi_0 y \int_0^\infty (l_3 e^{-\beta a_1 y} - l_6 e^{-\beta a_2 y}) \beta \frac{\sin \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta +$$

$$\left. + \int_0^\infty (l_2 e^{-\beta a_1 y} - l_5 e^{-\beta a_2 y}) \beta \frac{\cos \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta + y \int_0^\infty (l_3 e^{-\beta a_1 y} - l_6 e^{-\beta a_2 y}) \beta^2 \frac{\cos \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta \right]$$

Исследуем более подробно интегралы, входящие в соотношение (2.14). Нетрудно показать, что первый интеграл в этом выражении таков:

$$\int_0^\infty e^{-a\beta y} \sin \beta x d\beta = \frac{x}{x^2 + (ay)^2}$$

вычисление второго интеграла дает

$$\xi_0 \int_0^\infty e^{-a\beta y} \frac{\sin \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta = \frac{1}{2} \left[ e^{-\xi_0 x} \int_{-\infty}^x \frac{x e^{\xi_0 x}}{x^2 + (ay)^2} dx - e^{\xi_0 x} \int_{-\infty}^x \frac{x e^{-\xi_0 x}}{x^2 + (ay)^2} dx \right] \quad (2.15)$$

Легко показать ограниченность третьего интеграла в выражении (2.14). Замечая, что

$$\int_0^\infty e^{-a\beta y} \beta \frac{\cos \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta = \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-a\beta y} \frac{\sin \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta$$

и используя соотношение (2.15), получим для четвертого интеграла

$$\int_0^\infty e^{-a\beta y} \beta \frac{\cos \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta = - \frac{1}{2} \left[ e^{-\xi_0 x} \int_{-\infty}^x \frac{x e^{\xi_0 x}}{x^2 + (ay)^2} dx + e^{\xi_0 x} \int_{-\infty}^x \frac{x e^{-\xi_0 x}}{x^2 + (ay)^2} dx \right]$$

Наконец, последний пятый интеграл может быть представлен в виде

$$\int_0^\infty e^{-a\beta y} \frac{\beta^2 \cos \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta = \int_0^\infty e^{-a\beta y} \cos \beta x d\beta - \xi_0^2 \int_0^\infty e^{-a\beta y} \frac{\cos \beta x}{\xi_0^2 + \beta^2} d\beta$$

Здесь первый интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-a\beta} \cos \beta x d\beta = \frac{ay}{x^2 + (ay)^2}$$

Доказать ограниченность второго интеграла в этом соотношении не составляет труда.

Выполняя предельный переход и принимая во внимание ограниченность интегралов, являющихся коэффициентами при  $y$ , окончательно получим

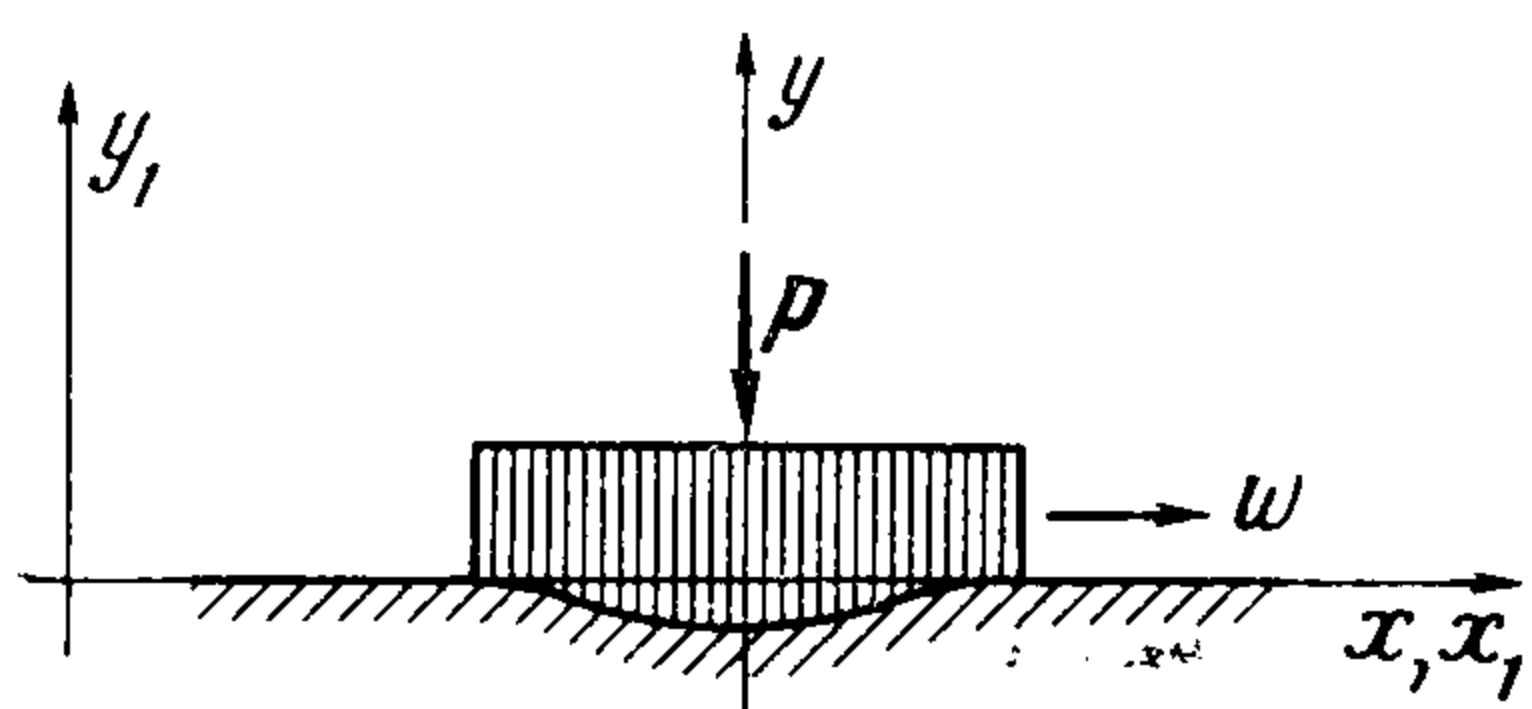
$$\frac{dv(x)}{dx} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{dv(x, y)}{dx} = \frac{P}{\pi E} l_0 \left[ (l_4 - l_1) \frac{1}{x} + (l_5 - l_2) e^{-\xi_0 x} Ei(\xi_0 x) \right] \quad (2.16)$$

Используя асимптотическое представление интегральной показательной функции  $Ei(\xi_0 x)$  и раскладывая  $e^{-\xi_0 x}$  в степенной ряд, получаем следующее приближенное выражение для ядра:

$$K(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{P}{\pi E} l_0 \left\{ (l_4 - l_1) \frac{1}{x} + (l_5 - l_2) [\ln x + x \ln x + (C^\circ + \ln \xi_0) + x(C^\circ + \ln \xi_0 + \xi_0) + o(x)] \right\} \quad (2.17)$$

где  $C^\circ$  — постоянная Эйлера.

3. Задача об определении давления, которое возникает под жестким штампом, движущимся с постоянной скоростью  $w$  по границе вязко-упругой полуплоскости (фиг. 1), может быть сведена к решению некоторого сингулярного интегрального уравнения.



Фиг. 1

Будем полагать, что размеры площадки контакта являются известными, а силы трения между штампом и вязко-упругой полуплоскостью отсутствуют. Тогда

$$f(x) = \int_{-1}^1 P(\xi) \left[ \frac{A_0}{x - \xi} + A_1 \ln |x - \xi| + A_2 + A_3(x - \xi) + A_1(x - \xi) \ln |x - \xi| + \dots \right] d\xi \quad (3.1)$$

Здесь  $P(\xi)$  — давление, возникающее под штампом;  $x_0 = a$ , где  $2a$  — размер площадки контакта;  $f(x) = df_1(x) / dx$ , причем  $f_1(x)$  — форма контактирующей поверхности

$$A_0 = \pi^{-1} l_0 (l_4 - l_1), \quad A_1 = \pi^{-1} l_0 (l_5 - l_2), \quad A_2 = \pi^{-1} l_0 (l_5 - l_2) \times \\ \times (C^\circ + \ln \xi_0), \quad A_3 = \pi^{-1} l_0 (l_5 - l_2) (C^\circ + \ln \xi_0 + \xi_0)$$

Уравнение (3.1) можно записать следующим образом:

$$f(x) = \int_{-1}^1 P(\xi) \left[ \frac{A_0}{x - \xi} + A_1 \ln |x - \xi| + K^*(x - \xi) \right] d\xi$$

причем первый член в ядре этого интегрального уравнения обусловлен упругими свойствами материала, второй — вязко-упругими, наконец,

$K^*(x - \xi)$  — регулярная функция, также зависящая от вязко-упругих свойств среды.

Будем искать приближенное решение полученного интегрального уравнения.

Рассмотрим первое приближение. Будем иметь

$$f(x) = \int_{-1}^1 P(\xi) \left[ \frac{A_0}{x - \xi} + A_1 \ln |x - \xi| \right] d\xi \quad (3.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\int_{-1}^1 P(\xi) \ln |x - \xi| d\xi = \operatorname{Re} \left[ \int_{-1}^1 P(\xi) \ln (x - \xi) d\xi \right] \quad (3.3)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(\xi) \ln (x - \xi) d\xi &= i\pi \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi + \ln(1 - x) \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi + \\ &+ \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^{\xi} P(\xi) d\xi \right] \frac{d\xi}{x - \xi} \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$\int_{-1}^1 \left[ A_0 P(\xi) + A_1 \int_{-1}^{\xi} P(\xi) d\xi \right] \frac{d\xi}{x - \xi} = f(x) - A_1 \ln(1 - x) \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

Введем следующие обозначения:

$$q(\xi) = A_0 P(\xi) + A_1 \int_{-1}^{\xi} P(\xi) d\xi, \quad F(x) = f(x) - A_1 \ln(1 - x) \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi \quad (3.5)$$

Таким образом, приходим к уравнению Карлемана первого рода

$$\int_{-1}^1 q(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} = F(x) \quad (3.6)$$

Решение будем искать в виде некоторого ряда

$$q(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{B_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.7)$$

Здесь  $T_n(\xi) = \cos(n \arccos \xi)$  — полиномы Чебышева. Подставим (3.7) в уравнение (3.6) и преобразуем интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{d\xi}{\xi - x} = \pi \sqrt{\frac{1 - T_n^2(x)}{1 - x^2}} = \frac{\pi}{n} T_n'(x)$$

Допустим, что функцию  $F(x)$ , определяемую соотношением (3.5), можно разложить в рассматриваемом промежутке  $(-1, 1)$  по производным от полиномов Чебышева

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n T_n'(x) \quad (3.8)$$

Тогда приходим к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $B_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n T_n'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi}{n} T_n'(x) - B_0 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\xi}{\xi-x}, \quad T_0(x) = 1$$

Отсюда

$$B_n = - (n/\pi) \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.9)$$

Постоянная же  $B_0$  определится из условия, что давление, действующее на штамп, равно заданной величине

$$\frac{P}{E} = \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi \quad (3.10)$$

Положим теперь, что

$$P(\xi) = r'(\xi) \quad (3.11)$$

Тогда, учитывая соотношение (3.5), получим

$$A_0 r'(\xi) + A_1 r(\xi) = q(\xi) \quad (3.12)$$

где  $q(\xi)$  — решение уравнения (3.6). Отсюда

$$r(\xi) = \frac{1}{A_0} \exp \frac{-A_1 \xi}{A_0} \int q(\xi) \exp \frac{A_1 \xi}{A_0} d\xi \quad (3.13)$$

причем произвольная постоянная определяется из соотношения (3.4). Учитывая вышесказанное, запишем окончательное выражение для контактного напряжения

$$P(\xi) = \frac{1}{A_0} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \varepsilon_n \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{B_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] - \frac{A_1}{A_0^2} \exp \frac{-A_1 \xi}{A_0} \left[ M + \int_{-1}^{\xi} \exp \frac{A_1 \xi}{A_0} \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \varepsilon_n \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{B_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) d\xi \right] \quad (3.14)$$

Из соотношения (3.4) получаем, что  $M = 0$ . Используя же условие (3.10), находим

$$B_0 = \frac{1}{\pi I_0(-A_1/A_0)} \left\{ A_0 \frac{P}{E} \exp \frac{A_1}{A_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \varepsilon_n I_n \left( - \frac{A_1}{A_0} \right) \right\} \quad (3.15)$$

Здесь  $I_n(x)$  — функции Бесселя чисто мнимого аргумента.

Рассмотрим интегралы, входящие в соотношение (3.14)

$$\int_{-1}^{\xi} \exp \frac{A_1 \xi}{A_0} \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$$

Посредством подстановки  $\theta = \arccos \xi$ , а также разложения экспоненциальной функции в степенной ряд, эти интегралы можно свести к интегралам вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{A_1}{A_0} \right)^k \int_{\arccos \xi}^{\pi} \cos^k \theta \cos n\theta d\theta$$

для которых существуют уже рекуррентные соотношения.

Найдем второе приближение для решения уравнения (3.1). Будем иметь

$$f(x) = \int_{-1}^1 P(\xi) \left[ \frac{A_0}{x-\xi} + A_1 \ln|x-\xi| + A_2 + A_3(x-\xi) + A_1(x-\xi) \ln|x-\xi| \right] d\xi \quad (3.16)$$

Преобразуя уравнение (3.16) тем же самым способом и соотношение (3.2), получим

$$\int_{-1}^1 q_1(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} = F_1(x) \quad (3.17)$$

$$q_1(\xi) = A_0 P(\xi) + A_1 \int_{-1}^{\xi} P(\xi) d\xi + A_1 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\xi} P(\xi) d\xi d\xi$$

$$F_1(x) = f(x) + C_0^* [A_1 \ln(1-x) + A_2 - A_3(1-x) - A_1(1-x) \ln(1-x)] + C_1^* [A_1 + A_3 + A_1 \ln(1-x)]$$

$$C_0^* = \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi, \quad C_1^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi} P(\xi) d\xi d\xi$$

Дальнейшее решение проводится аналогично приведенному выше.

4. Рассмотрим пример. Пусть жесткий штамп с плоским прямолинейным основанием шириной  $2a$  движется с постоянной скоростью по границе вязко-упругой полуплоскости. Материал, из которого состоит полуплоскость — полиметилметакрилат.

При изучении механических свойств полиметилметакрилата при больших скоростях нагружения установлено [6], что может быть использована зависимость

$$\sigma = E\varepsilon + A \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-\tau}{\alpha}} \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau$$

где величины  $E$ ,  $A$  и  $\alpha$ , выбранные из условия лучшего совпадения с данными экспериментов, таковы:

$$E = 8 \cdot 10^{10} \text{ дин} / \text{см}^2, \quad A = 14.5 \cdot 10^{11} \text{ дин} / \text{см}^2, \quad \alpha = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$$

В работе [6] указано также, что для полиметилметакрилата объемная ползучесть пренебрежимо мала. Другие константы: коэффициент Пуассона  $\nu = 0.36$ , плотность —  $1.45 \text{ г} / \text{см}^3$ . Скорость движения штампа положим равной  $300 \text{ м} / \text{сек}$ .

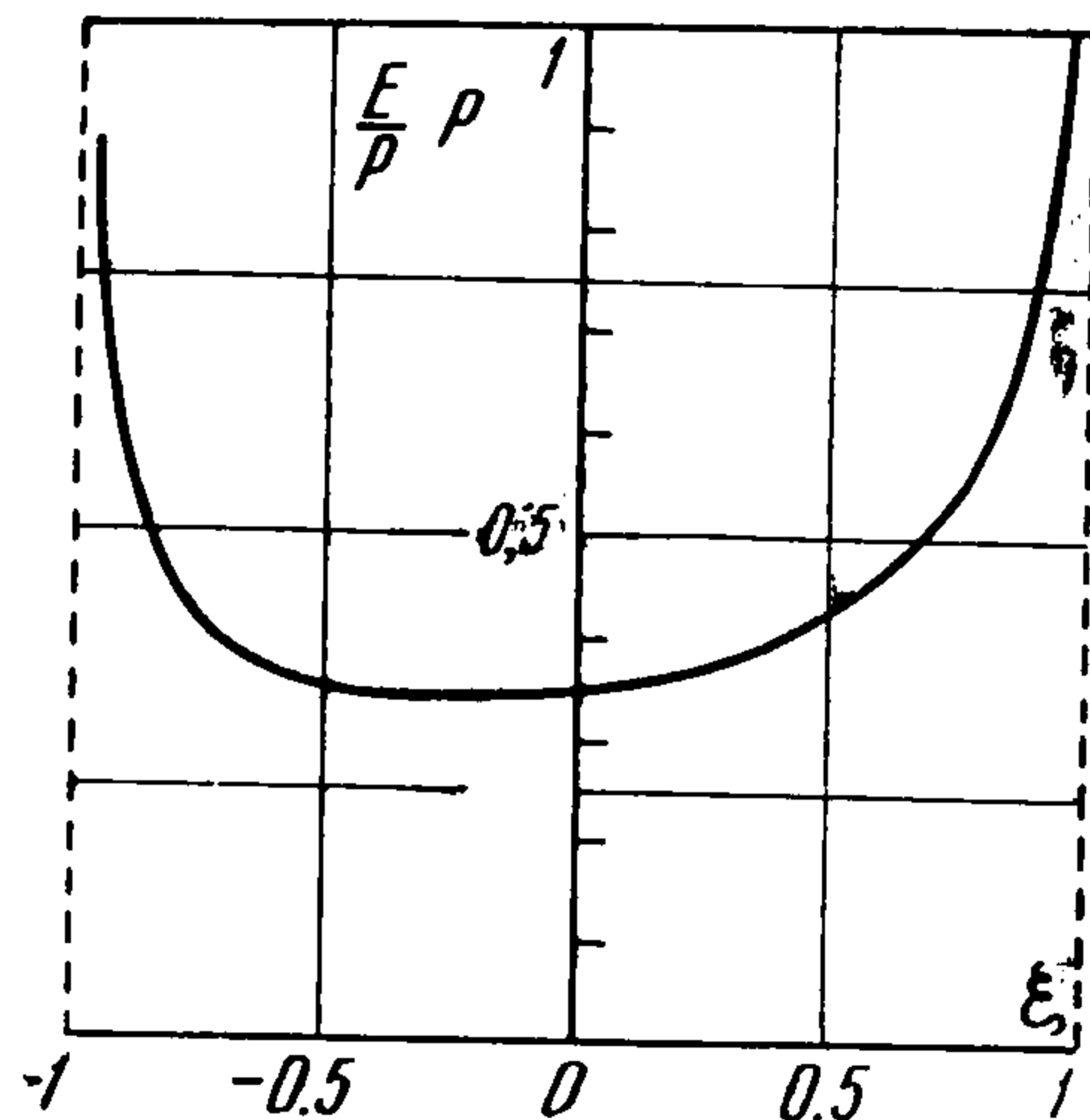
Распределение давления, возникающего под штампом, показано на фиг. 2.

Поступила 5 XI 1967

Институт проблем механики  
АН СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hunter S. C. The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space. J. Appl., Mech., 1961, vol. 28, No 4.
2. Morland L. W. A plane problem of a rolling contact in linear viscoelasticity theory. J. Appl. Mech. 1962, vol. 29, No. 2.
3. Иванова Р. Я. Качение вязко-упругого цилиндра по основанию из того же материала. ПМТФ, 1964, № 3.
4. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
5. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
6. Кольский Г. Исследование механических свойств материалов при больших скоростях нагружения. Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1950, вып. 4.



Фиг. 2