Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

НЕЖЕСТКОСТЬ НЕПОЛОГОГО СФЕРИЧЕСКОГО КУПОЛА

Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Асимптотический метод, развитый в работах [1-3], применяется для исследования нежесткости непологого сферического купола. Класс нежестких оболочек, т. е. оболочек, имеющих при заданных условиях закрепления и отсутствия внешней нагрузки формы равновесия, отличные от тривиальной, был введен И. И. Воровичем [4]. Характерным свойством нежесткой оболочки является тот факт, что для таких оболочек нижняя критическая нагрузка есть величина отрицательная.

Строгое доказательство существования нежестких оболочек и соответствующий численный анализ задачи в рамках пологой теории был дан в работах [5, 6]. Здесь нежесткость строго доказана для непологого сферического купола с неподвижным шарнирным закреплением по краю. Именно показано, что, кроме тривиальной, существует еще одна форма равновесия, близкая к зеркально отраженной. При этом используются нелинейные уравнения Рейсснера [7] для конечной симметричной деформации тонких оболочек вращения, выведенных без предположения о какой-либо малости углов поворота элемента оболочки в результате деформации.

Эти уравнения содержат при старших производных естественный малый параметр ε^2 — относительную тонкостенность ($\varepsilon^2 = h^2 / a^2\gamma^2$, где h — толщина, a — радиус сферы и γ — известное число). Для доказательства существования второго решения сначала строятся асимптотические разложения при малых ε (§ 2) , а затем доказывается существование второго решения задачи, для которого справедливы построенные асимптотические разложения (§ 3).

Отметим, что если формальное построение асимптотики проходит для любых сферических сегментов (в том числе больших полусферы), то предлагаемый метод существования второго решения связан ограничением, что купола меньше полусферы.

§ 1. К постановке задачи. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений Рейсснера для симметричной деформации сферического купола свободного от воздействия нагрузки

$$\varepsilon^2\left\{\frac{d}{d\xi}\left(\sin\xi\,\frac{du}{d\xi}\right)+\cos(\xi-u)\,\frac{\sin(\xi-u)-\sin\xi}{\sin\xi}-\right.$$
$$\left.-\nu\left[\cos(\xi-u)-\cos\xi\right]\right\}+v\sin(\xi-u)=0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon^2\left\{\frac{d}{d\xi}\left(\sin\xi\,\frac{dv}{d\xi}\right)-\left[\frac{\cos^2(\xi-u)}{\sin\xi}-\nu\left(1-\frac{du}{d\xi}\right)\sin(\xi-u)\right]v\right\}+$$
$$+\cos\xi-\cos(\xi-u)=0$$
$$(0\leqslant\xi\leqslant b<{}^1/_2\,\pi,\qquad 0<\nu<0.5)$$

с краевыми условиями, соответствующими шарнирному неподвижному закреплению купола по краю

$$u(0)=0,\qquad v(0)=0$$
$$\left[\frac{dv}{d\xi}-\nu\,\frac{v\cos(\xi-u)}{\sin\xi}\right]_{\xi=b}=0,\qquad \left[\frac{du}{d\xi}+\nu\,\frac{\sin\xi-\sin(\xi-u)}{\sin\xi}\right]_{\xi=b}=0 \tag{1.2}$$

Все величины, входящие в уравнения (1.1), (1.2), безразмерные. При этом

$$v=\frac{\Psi}{aEh}, \quad u=\xi-\Phi, \quad \varepsilon^2=\frac{h^2}{a^2\gamma}, \quad \gamma=12\,(1-\nu^2)$$

(см. формулу (5.8) в [7]).

Здесь u — угол поворота элемента оболочки в результате деформации, Ψ — функция напряжений, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, a — радиус сферы, ξ — параметр, соответствующий длине дуги большой окружности единичной сферы. Малый параметр ε^2 характеризует относительную тонкостенность оболочки.

Легко видеть, что задача (1.1), (1.2) имеет тривиальное решение $v=u\equiv 0$. Это решение соответствует форме равновесия с нулевыми напряжениями и деформациями. Будем рассматривать малые значения параметра ε^2. Положим $\varepsilon=0$. Уравнения (1.1) перейдут в алгебраические

$$v_0\sin(\xi-u_0)=0, \qquad \cos\xi-\cos(\xi-u_0)=0 \tag{1.3}$$

Здесь два решения. Одно из них $v_0=u_0\equiv 0$ — тривиальное, которое одновременно является и решением задачи (1.1), (1.2). Другое решение

$$v_0=0, \;\; u_0=2\xi \tag{1.4}$$

соответствует форме равновесия, близкой к зеркально отраженной.

Решение (1.4) удовлетворяет уравнению (1.1), но не удовлетворяет краевым условиям при $\xi=b$ в (1.2). Поэтому естественно ожидать, что задача (1.1), (1.2) при малых ε имеет второе решение, которое всюду внутри области ведет себя подобно (1.4) и только вблизи границы претерпевает быстрые изменения — такие, что краевые условия (1.2) выполняются.

§ 2. Построение асимптотики. Введем обозначения. Пусть вектор $\mathbf{V}\equiv(u,v)$ — решение, $\mathbf{P}[\mathbf{V}]$ — левая часть системы (1.1) — (1.4). Для второго решения строятся асимптотические разложения

$$\begin{aligned} u&=\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s u_s+\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s g_s+\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s\beta_s+z_n \\ v&=\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s v_s+\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s h_s+\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s\alpha_s+x_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Функции $u_s(\xi)$ и $v_s(\xi)$ получаются при помощи первого итерационного процесса [8]. Именно потребуем, чтобы

$$\mathbf{P}[\mathbf{V}_n]=O(\varepsilon^{n+1}), \qquad \mathbf{V}_n\equiv\Big(\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s u_s, \;\; \sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s v_s\Big)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ε, для определения u_0, v_0 получаем систему (1.3) (причем выбирается второе решение (1.4)), а для определения u_s, v_s — системы линейных однородных уравнений. Поэтому

$$u_s(\xi)=v_s(\xi)=0 \qquad (s=1,2,\ldots,n)$$

Функции типа пограничного слоя $h_s(\xi)$, $g_s(\xi)$ получаются при помощи второго итерационного процесса [8]. Для этого разности $v - v_0$ и $u - u_0$ $(v_0 = 0,\ u_0 = 2\xi)$ ищем в виде

$$v = \sum_{s=0}^{n}{}' \varepsilon^s h_s, \qquad u - 2\xi = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s g_s \tag{2.2}$$

Подставим (2.2) в (1.1), (1.2), произведем замену $\xi = b - \varepsilon t$, затем воспользуемся разложениями Тейлора в окрестности $\varepsilon = 0$ функций

$$\sin(b - \varepsilon t), \quad \cos(b - \varepsilon t), \quad \sin\left(b - \varepsilon t + \sum_{s=0}^{n}{}' \varepsilon^s g_s\right), \quad \cos\left(b - \varepsilon t + \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s g_s\right)$$

и приравниваем нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$. Для определения h_0, g_0 получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений (2.3)

$$\sin b\, g_0'' - h_0 \sin(b + g_0) = 0, \qquad \sin b h_0'' - \cos(b + g_0) + \cos b = 0$$

Для получения h_1, g_1 получим систему

$$\sin b g_1'' + h_0 (t - g_1) \cos(b + g_0) - \operatorname{tg}_0'' \cos b - \cos b\, g_0' - \\ - h_1 \sin(b + g_0) = 0 \tag{2.4}$$

$$\sin b h_1'' - t h_0' \cos b - h_0' \cos b + (g_1 - t) \sin(b + g_0) + t \sin b = 0$$

Аналогично из (1.2) выводим первое краевое условие для h_0 и g_0 при $t = 0$, а второе краевое условие получаем из требования, чтобы решение имело характер пограничного слоя в окрестности $\xi = b$, т. е.

$$h_0'(0) = g_0'(0) = 0, \qquad h_0(\infty) = 0, \quad g_0(\infty) = 0 \tag{2.5}$$

Из (2.3) и (2.5) вытекает, что

$$h_0 = g_0 = 0 \tag{2.6}$$

Теперь из (2.4), используя (2.6), выводим

$$g_1'' - h_1 = 0, \qquad h_1'' + g_1 = 0$$

с краевыми условиями

$$h_1'(0) = 0, \qquad g_1'(0) = 2(1 + \nu), \qquad g_1(\infty) = h_1(\infty) = 0$$

Отсюда получим

$$h_1(\xi) = a(\xi, \varepsilon)(\cos\alpha + \sin\alpha), \qquad g_1(\xi) = a(\xi, \varepsilon)(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$a(\xi, \varepsilon) = \sqrt{2}(1 + \nu)\exp\left(\frac{b - \xi}{\sqrt{2}\varepsilon}\right), \qquad \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{b - \xi}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

Аналогично функции h_s, g_s $(s \geqslant 2)$ находятся из систем линейных уравнений вида (2.7), но неоднородных, причем правые части представляют собой конечные полиномы, состоящие из членов вида

$$t^m \left[B \sin\left({}^1/_2 \sqrt{2}\, lt\right) + C \cos\left({}^1/_2 \sqrt{2}\, nt\right)\right] \exp\left(-{}^1/_2 \sqrt{2}\, kt\right)$$

где m, k, l и n — целые числа, не превосходящие s. Нетрудно убедиться, что h_s, g_s будут функциями типа пограничного слоя.

Наконец, введем бесконечно дифференцируемые монотонные функции $\beta_s(\xi), \alpha_s(\xi)$, которые компенсируют невязку (экспоненциального порядка малости) в выполнении граничных условий (1.2) при $\xi = 0$, соответственно, для функций g_s и h_s:

$$\beta_s(\xi) = \begin{cases} -g_s(0) & (0 \leqslant \xi \leqslant 0.1b), \\ 0 & (02b \leqslant \xi \leqslant b), \end{cases} \qquad \alpha_s(\xi) = \begin{cases} -h_s(0) & (0 \leqslant \xi \leqslant 0.1b) \\ 0 & (02b \leqslant \xi \leqslant b) \end{cases}$$

Таким образом, асимптотические разложения (2.1) можно переписать следующим образом:

$$u = 2\xi + \sum_{s=1}^{n} \varepsilon^s g_s + \sum_{s=1}^{n} \varepsilon^s \beta_s + z_n, \qquad v = \sum_{s=1}^{n} \varepsilon^s h_s + \sum_{s=1}^{n} \varepsilon^s \alpha_s + x_n \tag{2.8}$$

Далее в § 3 будут использованы обозначения

$$\psi_n = v - x_n, \qquad \varphi_n = u - z_n \tag{2.9}$$

Заметим, что из (2.8) и явных выражений для h_s, g_s, α_s и β_s легко устанавливаются оценки [1]

$$|\varphi_n| \leqslant m_1 \varepsilon \xi, \qquad |\psi_n| \leqslant m_2 \varepsilon \xi \tag{2.10}$$

§ 3. Обоснование асимптотики. Существование нетривиального решения. Введем следующие пространства векторов $\mathbf{V} \equiv (u, v)$.

1) Пространство, состоящее из векторов с конечной нормой

$$(X) \qquad \|\mathbf{V}\|_X = \|u\|_{C_2} + \|v\|_{C_2}$$

где через C_2 обозначается банахово пространство, элементами которого являются все дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0, b]$ функции, обращающиеся в нуль при $\xi = 0$;

2) Пространство пар $\lambda = (\mathbf{f}, \varphi)$, где $\mathbf{f} \equiv (f_1, f_2)$, $\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$, т. е. пространство четверок $\lambda \equiv (f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2)$ с нормой

$$(Y) \qquad \|\lambda\|_Y = \|f_1\|_{C_0} + \|f_2\|_{C_0} + |\varphi_1(b)| + |\varphi_2(b)|$$

где через C_0 обозначено банахово пространство всех непрерывных функций с конечной нормой

$$\|f_1\|_{C_0} = \max |f_1 / \xi| \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant b)$$

Задачу (1.1), (1.2) будем рассматривать как функциональное уравнение

$$\mathbf{P}(\mathbf{V}) = 0 \tag{3.1}$$

где оператор $\mathbf{P}$ определяется левой частью системы (1.1), (1.2). Покажем, что оператор $\mathbf{P}$ действует из пространства X в Y. Для этого отметим, что для любой функции u из пространства C_2 справедливы соотношения

$$u(\xi) = u'(0)\xi + u''(\xi_1)\xi^2 \quad (0 \leqslant \xi_1 \leqslant b), \qquad |u(\xi)| \leqslant \xi \|u\|_{C_2}$$

[1] Здесь и всюду в дальнейшем m_i — некоторые положительные постоянные, не зависящие от ξ и ε.

Теперь рассмотрим первое уравнение из (1.1). Используя, что u и v являются элементами из C_2, легко выводим неравенства

$$|\cos(\xi - u) - \cos\xi| = 2|\sin(\xi - {}^1/_2 u)\sin{}^1/_2 u| \leqslant |u(\xi)| \leqslant \xi\|u\|_{C_2}$$

$$|\sin\xi u''| \leqslant \xi\|u\|_{C_2} \quad (0 \leqslant \xi_i \leqslant b) \tag{3.2}$$

$$\left|\cos\xi u' + \frac{1}{2}\frac{\sin 2(\xi - u)}{\sin\xi} - \cos(\xi - u)\right| = \left|\cos\xi u'(0) + \cos\xi u''(\xi_2)\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\sin 2(\xi - u)}{\sin\xi} - \cos\xi + (\cos\xi - \cos(\xi - u))\right| \leqslant \left|(u'(0) - 1)\cos\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\sin 2(\xi - u)}{\sin\xi}\right| + |u''(\xi_3)\xi\cos\xi + (\cos\xi - \cos(\xi - u))| \leqslant$$

$$\leqslant \left|(u'(0) - 1)2\sin^2\frac{\xi}{2} + \xi r(\xi_4)\right| + m_3\xi\|u\|_{C_2} \leqslant m_4\xi\|u\|_{C_2}$$

так как

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\xi - u)}{\sin\xi} = 1 - u'(0) + \xi r(\xi_4), \qquad |r(\xi_4)| \leqslant \max\left[\frac{\sin 2(\xi - u)}{\sin\xi}\right]' (0 \leqslant \xi \leqslant b)$$

Применяя неравенства (3.2) и аналогичные оценки для второго уравнения (1.1) и краевых условий (1.2), получаем, что оператор $\mathbf{P}$ действует из X в Y.

Теорема 3.1. Задача (1.1), (1.2) имеет, кроме тривиального решения $u = v \equiv 0$, другое решение, для которого справедливы асимптотические разложения (2.10), причем имеют место следующие оценки:

$$\max|x_n(\xi)| \leqslant m_3\varepsilon^n, \qquad \max|z_n(\xi)| \leqslant m_3\varepsilon^n \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant b) \tag{3.3}$$

Для доказательства воспользуемся теоремой [2], позволяющей установить существование решения в окрестности $\mathbf{V}_k^*$, где за $\mathbf{V}_k^* \equiv (\varphi_k, \psi_k)$ принимается отрезок асимптотического ряда.

Теорема 3.2. Пусть оператор $\mathbf{P}$ определен в сфере Ω ($\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_k^*\| \leqslant R$) пространства X и имеет в замкнутой сфере Ω_0 ($\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_k^*\| \leqslant r < R$) непрерывную вторую производную. Пусть, кроме того, существует оператор

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon(\mathbf{V}) = [\mathbf{P}'_{\mathbf{V}_k^*}(\mathbf{V})]^{-1}$$

и выполняются условия

$$(1)\quad \|\mathbf{P}(\mathbf{V}_k^*)\|_Y \leqslant m_1\varepsilon^{k+1} \qquad (2)\quad \|\mathbf{P}_{\mathbf{V}}''\| \leqslant m_3$$

$$(3)\quad \|\mathbf{\Gamma}_\varepsilon\|_{(Y\to X)} \leqslant m_2\varepsilon^{-m} \qquad (2m < k + 1) \tag{3.4}$$

Тогда уравнение (3.1) имеет решение $\mathbf{V}^*$ при достаточно малых ε:

$$\varepsilon < (2m_1m_2^2m_3)^{2m-k-1}$$

и справедлива оценка

$$\|\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_k^*\|_X \leqslant C\varepsilon^{k+1-m}$$

Доказательство. Покажем, что условия теоремы 3.2 выполняются, причем $m = 4$ и не зависит от k, а k можно подобрать так, что $k > 2m - 1$.

Первая оценка (3.4) устанавливается непосредственно из соотношения

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{V}_k^*) = O\ (\varepsilon^{k+1}),\ \mathrm{V}_k^* \equiv (\varphi_k, \psi_k) \tag{3.5}$$

которое легко проверяется подстановкой ψ_k и φ_k в левую часть системы (1.1), (1.2).

Далее покажем, что имеет место оценка

$$\| \Gamma_\varepsilon \|_{(Y \to X)} \leqslant m_2 \varepsilon^{-4} \tag{3.6}$$

Для этого рассмотрим производную Фреше на элементе V_k^*:

$$\mathrm{P}'_{\mathrm{V}_k^*}(\mathrm{V}) \equiv \Big\{\varepsilon^2 \Big[\sin \xi u'' + \cos \xi u' - \frac{\cos 2(\xi - \varphi_k)}{\sin \xi} u - (1 + \nu) u \sin (\xi - \varphi_k)\Big] -$$
$$- \psi_k u \cos (\xi - \varphi_k) + v \sin (\xi - \varphi_k)$$

$$\varepsilon^2 \Big(\sin \xi v'' + \cos \xi v' - \Big[\frac{\cos^2 (\xi - \varphi_k)}{\sin \xi} - \nu (1 - \varphi_k') \sin (\xi - \varphi_k)\Big] v -$$
$$- \psi_k \Big[\frac{\sin 2(\xi - \varphi_k)}{\sin \xi} u + \nu u' \sin (\xi - \varphi_k) + \nu u (1 - \varphi_k') \cos (\xi - \varphi_k)\Big] - \sin (\xi - \varphi_k) u \Big\}$$

и при $\zeta = b$:

$$\Big\{u' + \nu \frac{u}{\sin \xi} \cos (\xi - \varphi_k),\quad v' - \nu v \frac{\cos (\xi - \varphi_k)}{\sin \xi} - \nu \psi_k u \frac{\sin (\xi - \varphi_k)}{\sin \xi}\Big\}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\mathrm{P}'_{\mathrm{V}_k^*}(\mathrm{V}) = \mathrm{f}, \qquad \mathrm{f} \equiv (f_1, f_2) \tag{3.7}$$

Используя (2.8) и (2.9), перепишем (3.7) в виде

$$\varepsilon^2 \Big\{\sin \xi u'' + \cos \xi u' - u \frac{\cos 2(\xi + \varepsilon s_2)}{\sin \xi} + (1 + \nu) u \sin (\xi + \varepsilon s_2)\Big\} -$$
$$- v \sin (\xi + \varepsilon s_2) - \varepsilon s_1 u \cos (\xi + \varepsilon s_2) = f_1$$

$$\varepsilon^2 \Big\{\sin \xi v'' + \cos \xi v' - \Big[\frac{\cos^2 (\xi + \varepsilon s_2)}{\sin \xi} - \nu (1 + \varepsilon s_2') \sin (\xi + \varepsilon s_2)\Big] v +$$
$$+ \varepsilon s_1 u \frac{\sin 2(\xi + \varepsilon s_2)}{\sin \xi} + \nu \varepsilon u' s_1 \sin (\xi + \varepsilon s_2) + \nu \varepsilon s_1 u (1 + \varepsilon s_2') \cos (\xi + \varepsilon s_2)\Big\} +$$
$$+ u \sin (\xi + \varepsilon s_2) = f_2 \tag{3.8}$$

с краевыми условиями

$$u = v = 0 \quad \text{при } \xi = 0$$

$$u' + \nu \frac{u}{\sin \xi} \cos (\xi + \varepsilon s_2) = \varphi_1 \quad \text{при } \xi = b \tag{3.9}$$

$$v' - \nu \frac{v \cos (\xi + \varepsilon s_2)}{\sin \xi} + \nu \varepsilon s_1 u \frac{\sin (\xi + \varepsilon s_2)}{\sin \xi} = \varphi_2 \quad \text{при } \xi = b$$

$$s_1 = \varepsilon^{-1} \psi_k, \qquad s_2 = \varepsilon^{-1} (\varphi_k - 2\xi)$$

В дальнейшем будем считать, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ при $\zeta = b$, так как сведéние к этому случаю легко производится заменой соответственно u и v на

$$u + \frac{\varphi_1 \xi}{1 + \nu k_1 b}, \qquad v + \frac{1}{1 - \nu k_1 b} \Big(\varphi_2 - \frac{\varepsilon k_2 b \varphi_1}{1 + \nu k_1 b}\Big) \xi$$

где k_1 и k_2 — числа

$$k_1 = \frac{\cos (b + \varepsilon s_2 (b))}{\sin b}, \qquad k_2 = \frac{\nu s_1 (b) \sin (b + \varepsilon s_2 (b))}{\sin b}$$

причем при $b < \frac{1}{2}\pi$ и достаточно малых ε имеем, что $k_1 > 0$. При такой замене краевые условия будут однородными, а в правые части f_1 и f_2 добавятся члены вида

$$m_1 \varphi_1 (b) \xi + m_2 \varphi_2 (b) \xi.$$

Умножим первое уравнение (3.6) на $v + u$, а второе на $v - u$, проинтегрируем от 0 до b и сложим. В результате получим

$$\varepsilon^2 \left[\int_0^b \sin\xi u'^2 d\xi + \int_0^b \sin\xi v'^2 d\xi + \int_0^b \frac{\cos^2\xi \cos 2\varepsilon s_2}{\sin\xi} u^2 d\xi + \int_0^b \frac{\cos^2(\xi + \varepsilon s_2)}{\sin\xi} v^2 d\xi \right]_1 +$$
$$+ \varepsilon^2 \left[-\int_0^b u^2 \sin\xi \cos 2\varepsilon s_2 d\xi - 2\int_0^b u^2 \cos\xi \sin\varepsilon s_2 d\xi - (1+\nu)\int_0^b u^2 \sin(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi - \right.$$
$$- \nu \int_0^b v^2 (1 + \varepsilon s_2') \sin(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi - \int_0^b \frac{\sin^2(\xi + \varepsilon s_2)}{\sin\xi} uv d\xi -$$
$$- (1+\nu)\int_0^b vu \sin(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi +$$
$$\left. + \nu \int_0^b vu (1 - \varepsilon s_2') \sin(\xi + \varepsilon S_2)\, d\xi \right]_2 - \varepsilon^3 \left[\int_0^b \frac{\sin 2(\xi + \varepsilon s_2)}{\sin\xi} s_1 uv d\xi + \right.$$
$$+ \nu \int_0^b s_1 vu (1 + \varepsilon s_2') \cos(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi + \nu \int_0^b s_1 u' v \sin(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi - \tag{3.10}$$
$$- 2\int_0^b s_1 u^2 \cos\xi \cos\varepsilon s_2 d\xi - \int_0^b \frac{\cos 2\xi \sin\varepsilon s_2}{\sin\xi} s_1 u^2 d\xi - \nu \int_0^b s_1 (1 + \varepsilon s_2') u^2 \cos(\xi + \varepsilon s_3)\, d\xi -$$
$$\left. - \nu \int_0^b s_1 u u' \sin(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi \right]_3 + \int_0^b (v^2 + u^2) \sin(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi + \varepsilon \int_0^b s_1 u^2 \cos(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi +$$
$$+ \varepsilon \int_0^b s_1 v u \cos(\xi + \varepsilon s_2)\, d\xi + \varepsilon^2 [-\nu v^2(b) \cos(b + \varepsilon s_2(b)) + \nu u^2(b) \cos(b + \varepsilon s_2(b)) +$$
$$+ 2\nu v(b)\, u(b) \cos(b + \varepsilon s_2(b))]_4 + \varepsilon^3 [\nu v(b)\, u(b) \sin(b + \varepsilon s_2(b)) -$$
$$- \nu s_1(b)\, u^2(b) \sin(b + \varepsilon s_2(b))]_5 = \int_0^b f_1 (v + u)\, d\xi + \int_0^b f_2 (v - u)\, d\xi$$

(Цифры, указанные после квадратных скобок, расставлены для удобства.)

Отметим, что при выводе (3.10) используется равенство, справедливое для любых гладких функций, удовлетворяющих условиям (3.9) при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$:

$$\int_0^b v (\sin\xi u')' d\xi - \int_0^b u (\sin\xi v')' d\xi = -2\nu v(b)\, u(b) \cos(b + \varepsilon s_2(b)) +$$
$$+ \varepsilon \nu s_1(b)\, u^2(b) \sin(b + \varepsilon s_2(b))$$

Покажем, что выражения, стоящие во второй и третьей квадратных скобках можно оценить при помощи неравенств

$$\varepsilon^2 [\ldots\ldots]_2 \leqslant m_1 \varepsilon^2 \int_0^b (v^2 + u^2) \sin\xi d\xi \tag{3.11}$$

$$\varepsilon^3 [\ldots\ldots]_3 \leqslant m_2 \varepsilon^3 \left(\int_0^b (v^2 + u^2) \sin\xi d\xi + \int_0^b u'^2 \sin\xi d\xi \right) \tag{3.12}$$

Для доказательства отметим следующие неравенства, которые справедливы при условии, что $0 \leqslant \xi \leqslant b < {}^1/_2\pi$ и ε достаточно мало

$$
\begin{array}{ll}
|s_1| \leqslant m\zeta \leqslant m\,{}^1/_2\pi \sin\zeta, & |s_2| \leqslant m\xi,\ |\varepsilon s_2'| \leqslant m \\
{}^1/_2\pi \sin\zeta \leqslant \sin {}^1/_2\zeta, & \sin 2\xi \leqslant 2\sin\xi \\
|\sin \varepsilon s_2| \leqslant \sin\xi, & \cos\varepsilon s_2 > 1-\alpha,\quad 0 \leqslant \xi + \varepsilon s_2 < {}^1/_2\pi \\
\sin(\zeta + \varepsilon s_2) \geqslant \pi^{-1}\sin\xi, & |\sin(\xi + \varepsilon s_2)| \leqslant 2\sin\zeta
\end{array}
\qquad (3.13)
$$

где α можно сделать сколь угодно малым за счет выбора малого ε.

Используя оценки (3.13), а также неравенства среднеарифметического, приходим к (3.11), (3.12).

Аналогично устанавливаем оценки

$$\int_0^b (v^2+u^2)\sin(\zeta+\varepsilon s_2)\,d\xi \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^b (v^2+u^2)\sin\xi d\xi$$

$$\varepsilon\int_0^b s_1(u^2+vu)\cos(\xi+\varepsilon s_2)\,d\zeta \leqslant m\varepsilon\int_0^b (v^2+u^2)\sin\xi d\xi \qquad (3.14)$$

$$\varepsilon^2[\ldots]_1 \geqslant -2\varepsilon^2 \nu u^2(b)\cos(b+\varepsilon s_2(b)), \qquad \varepsilon^3[\ldots]_5 \geqslant -\varepsilon^3 m\,(u^2(b)+v^2(b))$$

Применяя (3.11) — (3.14), из (3.10) выводим

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\left[\int_0^b u'^2\sin\xi d\xi + \int_0^b \frac{\cos^2\xi\cos 2\varepsilon s_2}{\sin\xi}u^2 d\xi + \int_0^b v'^2\sin\xi d\xi + \int_0^b \frac{\cos^2(\xi+\varepsilon S_2)}{\sin\xi}v^2 d\xi\right]_1 - \\
&-\varepsilon^2 m_1\int_0^b (v^2+u^2)\sin\xi d\xi - \varepsilon^3 m_2\int_0^b (v^2+u^2)\sin\xi d\xi - \varepsilon^3 m_3\int_0^b u'^2\sin\xi d\xi + \\
&+\frac{1}{\pi}\int_0^b (v^2+u^2)\sin\xi d\xi - \varepsilon m_4\int_0^b (v^2+u^2)\sin\xi d\zeta - 2\varepsilon^2\nu u^2(b)\cos(b+\varepsilon s_2(b)) - \\
&-\varepsilon^3\nu m_5(u^2(b)+v^2(b))\sin(b+\varepsilon s_2(b)) \leqslant \int_0^b (|f_1|\,|v+u| + |f_2|\,|v-u|)\,d\xi
\end{aligned}
\qquad (3.15)
$$

Теперь подберем ε настолько малым, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$
\begin{array}{lll}
\varepsilon m_4 + \varepsilon^2 m_1 + \varepsilon^3 m_2 < \pi^{-1}, & \varepsilon^3 m_3 < {}^1/_3\alpha, & \cos 2\,\varepsilon s_2 > 1 - {}^1/_3\alpha \\
(1-\alpha)\cos b > 2\nu\cos(b+\varepsilon s_2(b)) & & (0 < \nu < 0.5) \\
\varepsilon m_5\nu\,\mathrm{tg}\,b < {}^1/_3\alpha, & \cos\xi \geqslant \cos b & (0 \leqslant \xi \leqslant b < {}^1/_2\pi)
\end{array}
\qquad (3.16)
$$

Используя (3.16) и неравенства вида

$$u^2(b) = 2\int_2^b uu'd\xi \leqslant \int_0^b u'^2\sin\xi d\xi + \int_0^b \frac{u^2}{\sin\xi}\,d\zeta \qquad (3.17)$$

из (3.15) получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{3}\varepsilon^2\left(\int_0^b u'^2\sin\xi d\xi + \cos^2 b\int_0^b \frac{u^2}{\sin\xi}\,d\xi + \int_0^b v'^2\sin\xi d\xi + \cos^2 b\int_0^b \frac{v^2}{\sin\xi}\,d\xi\right) \leqslant \\
&\leqslant \int_0^b (|f_1|\,|v+u| + |f_2|\,|v-u|)\,d\xi
\end{aligned}
\qquad (3.18)
$$

Применяя еще раз оценку (3.17) к левой части (3.18) и неравенство треугольника к правой, выводим

$$^{1}/_{3}\alpha\varepsilon^2(\max|v^2|+\max|u^2|)\leqslant\|\mathbf{f}\|_Y(\max|v|^2+\max|u|^2)^{1/2}\qquad(0\leqslant\xi\leqslant b)$$

Отсюда

$$\max|v|+\max|u|\leqslant m\varepsilon^{-2}\|\mathbf{f}\|_Y\qquad(0\leqslant\xi\leqslant b)\tag{3.19}$$

Чтобы получить оценку для старших производных, в первом уравнении (3.8) к левой и правой частям добавим по члену — $u\csc\xi$, а во втором уравнении $-v\csc\xi$. Тогда (3.8) можно переписать в виде

$$\varepsilon^2\sin\xi\frac{d}{d\zeta}\frac{1}{\sin\xi}\frac{d}{d\xi}\sin\xi u=F_1,\qquad\varepsilon^2\sin\xi\frac{d}{d\zeta}\frac{1}{\sin\xi}\frac{d}{d\xi}\sin\xi v=F_2\tag{3.20}$$

Здесь

$$F_1=\frac{1}{\varepsilon^2}f_1+\frac{\cos2(\xi+\varepsilon s_2)-1}{\sin\xi}-(1+\nu)u\sin(\xi+\varepsilon s_2)+\frac{1}{\varepsilon^2}v\sin(\xi+\varepsilon s_2)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}s_1u\cos(\xi+\varepsilon s_2)$$

$$F_2=\frac{1}{\varepsilon^2}f_2+\frac{\cos^2(\xi+\varepsilon s_2)-1}{\sin\xi}v-\nu v(1+\varepsilon s_2')\sin(\xi+\varepsilon s_2)-\varepsilon s_1u\frac{\sin2(\xi+\varepsilon s_2)}{\sin\xi}-$$
$$-\nu\varepsilon u's_1\sin(\xi+\varepsilon s_2)-\nu\varepsilon s_1u(1+\varepsilon s_2')\cos(\xi+\varepsilon s_2)-\frac{u}{\varepsilon^2}\sin(\xi+\varepsilon s_2)$$

Теперь от (3.20) перейдем к системе двух эквивалентных интегральных уравнений, из которых, используя оценки (3.19), получим оценки u'' и v''. Для примера получим оценки u' и u''. Из (3.20) с учетом краевых условий (3.9) имеем

$$u=\frac{1}{\sin\xi}\Phi(\xi,\ t,\ b)+k\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\Phi(b,\ t,\ b)\tag{3.21}$$

$$\Phi(\zeta,\ t,\ b)=\int_0^\xi\sin\ t\,dt\int_b^t\frac{F_1(s)}{\sin s}ds,\qquad k=\frac{\cos b-\nu\cos(b+\varepsilon s_2(b))}{\sin b[\sin b-(\cos b-\nu\cos(b+\varepsilon s_2(b))\operatorname{tg}{}^1/_2b]}$$

Далее заметим, что для F_1 справедлива оценка

$$|F_1|\leqslant m\varepsilon^{-4}\xi\|\mathbf{f}\|_{C_0}\leqslant{}^1/_2m\pi\varepsilon^{-4}\|\mathbf{f}\|_{C_0}\sin\xi\qquad(0\leqslant\xi\leqslant b<{}^1/_2\pi)\tag{3.22}$$

Это следует из (3.20) в силу оценок (3.13) и того факта, что $f_1\in C_0$. Из (3.21) имеем

$$u'=-\frac{\cos\xi}{\sin^2\xi}\Phi(\xi,\ t,\ b)+\int_b^\zeta\frac{F(s)}{\sin s}ds+\frac{k}{2\cos^2(\xi/2)}\Phi(b,t,\ b)\tag{3.23}$$

Используя (3.22) и неравенство треугольника, из (3.23) выводим

$$\max|u'(\xi)|\leqslant m\varepsilon^{-4}\|\mathbf{f}|_Y\qquad(0\leqslant\xi\leqslant b)\tag{3.24}$$

Теперь рассмотрим u'':

$$u''=\frac{1+\cos^2\xi}{\sin^3\xi}\Phi(\xi,t,\ b)-\frac{\operatorname{ctg}\xi}{2\sin^2(\xi/2)}\Phi(\xi,\ \xi,\ b)+\frac{F_1(\xi)}{\sin\xi}+\frac{k\sin(\xi/2)}{\cos^3(\xi/2)}\Phi(b,\ t,\ b)$$

Применяя к разности первых двух членов в правой части тождество

$$a_1b_1-a_2b_2=a_1(b_1-b_2)+b_2(a_1-a_2)$$

имеем: (3.25)

$$u''=-\frac{1+\cos^2\xi}{\sin^3\xi}\Phi(\xi,\xi,t)+\frac{1+\cos^2\xi}{2\sin\xi\cos^2(\xi/2)}\Phi(\xi,\ \xi,b)+\frac{F_1(\xi)}{\sin\xi}+\frac{k\sin\xi}{\cos^3(\xi/2)}\Phi(b,t,b)$$

Из (3.25) при помощи (3.22) неравенства треугольника, а также неравенств

$$| \xi - t | < \xi, \; 0 \leqslant \xi \leqslant b < {}^1/_2\pi$$

получаем

$$\max | u'' (\xi) | \leqslant m\varepsilon^{-4} \| \mathbf{f} \|_Y (0 \leqslant \xi \leqslant b) \tag{3.26}$$

Из (3.19), (3.24) и (3.26) следует:

$$\| \mathbf{V} \|_X \leqslant m_1\varepsilon^{-4} \| \mathbf{f} \|_Y, \qquad \| \mathbf{V} \|_X \leqslant m_1\varepsilon^{-4} \| \mathbf{P}_{\mathbf{V}_k^*}' (\mathbf{V}) \|_Y$$

Отсюда легко выводим, что оператор $\mathbf{P}_{\mathbf{V}_k^*}'$ в правой части последнего неравенства обратим и имеет место оценка (3.6).

Оценка $\| \mathbf{P}_\mathbf{V}'' \|$ следует из рассмотрения билинейной формы

$$\mathbf{P}_\mathbf{V}'' (\mathbf{V}_1) (\mathbf{V}_2), \qquad \mathbf{V}_1 \equiv (u_1, v_1), \qquad \mathbf{V}_2 \equiv (u_2, v_2) \qquad \left(\frac{\sin 2 (\xi - u)}{\sin \xi} u_1 u_2\right)$$

Для примера здесь в скобках указан типичный член этой формы. Очевидно, что

$$\left| \frac{\sin 2 (\xi - u)}{\sin \xi} u_1 u_2 \right| \leqslant m \, | \sin 2 (\xi - u) | \left| \frac{u_1}{\xi^{1/2}} \right| \left| \frac{u_2}{\xi^{1/2}} \right| \leqslant m \| u_1 \|_{C_2} \| u_2 \|_{C_2}$$

В общем случае получаем

$$\| \mathbf{P}_\mathbf{V}'' (\mathbf{V}_1) (\mathbf{V}_2) \|_Y \leqslant m_3 \| \mathbf{V}_1 \|_X \| \mathbf{V}_2 \|_X$$

отсюда и следует вторая оценка в (3.4).

Итак, условия теоремы 3.2 выполняются, если $k > 7$ и ε будет достаточно мало $(0 < \varepsilon < \varepsilon_1)$. Поэтому уравнение (3.1) имеет решение $\mathbf{V}^* \equiv (u, v)$, для которого справедлива оценка

$$\| \mathbf{V}^* - \mathbf{V}_k^* \| \leqslant m\varepsilon^{k-3} \qquad (k > 7) \tag{3.27}$$

Теперь, применяя неравенство треугольника и явные выражения для функций h_s, g_s из (3.27) получаем оценки x_n, z_n и их производных.

Автор благодарит И. И. Воровича и В. И. Юдовича за внимание и помощь.

Поступила 20 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Асимптотическое интегрирование систем большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
2. Срубщик Л. С. Об асимптотическом интегрировании системы нелинейных уравнений теории пластин. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
4. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
5. Срубщик Л. С. Нежесткость сферической оболочки, ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
6. Ворович И. И., Зипалова В. Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
7. Reissner E. On Axysmmetrical Deformation of thin Shells of Revolution, Proc. Symp. Appl. Math., 1950, vol. 3, pp. 27—52.
8. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.