

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ДОКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В. В. Болотин, Б. П. Макаров

(Москва)

Как известно [1,2], деформации тонких упругих оболочек под нагрузкой весьма чувствительны к малым начальным отклонениям срединной поверхности от идеальной формы. Это проявляется, в частности, в большом разбросе опытных данных при испытаниях оболочек на устойчивость. Стохастические задачи в теории оболочек обычно решают, применяя прямые методы. При этом распределенная система заменяется эквивалентной в некотором смысле системой с конечным числом степеней свободы. Приближенные решения такого рода оставляют чувство неудовлетворенности. Вместе с тем, если исходить из линеаризованных уравнений, то при некоторых достаточно широких предположениях удается получить точные решения стохастической краевой задачи [3].

Ниже задача решается на основе уравнений, получаемых линеаризацией уравнений теории оболочек в окрестности начального напряженного состояния. Используется дополнительное предположение о малости масштаба начальных отклонений и масштаба их корреляции по сравнению с характерными размерами срединной поверхности, а также предположение об однородности поля начальных отклонений. Выводятся общие формулы для корреляционных функций, дисперсий и спектральных плотностей параметров напряженно-деформированного состояния оболочки. Для широкого класса изотропных начальных отклонений результаты выражаются через табулированные функции. Это позволяет изучить зависимость корреляционных свойств перемещений, деформаций и напряжений от свойств начальных отклонений и от начальных напряжений в срединной поверхности.

1. Рассмотрим тонкую упругую оболочку с начальными отклонениями от идеальной формы. Пусть внешняя нагрузка такова, что в идеальной оболочке возникает чисто безмоментное напряженное состояние, формы потери устойчивости являются быстро изменяющимися функциями координат, а критические параметры пренебрежимо мало зависят от размеров оболочки и граничных условий на ее контуре. Пусть, далее, отклонения от идеальной формы достаточно малы и имеют достаточно малые масштабы изменчивости и корреляции. При значениях нагрузки, не слишком близких к критическим, этими свойствами будут обладать перемещения точек срединной поверхности нагруженной оболочки. В основу положим уравнения нелинейной теории оболочек типа Х. М. Муштари — В.З. Власова [4]:

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w - s^{\alpha\lambda}s^{\beta\mu}(b_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}w)\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\chi &= p \\ (1/Eh)\Delta\Delta\chi + s^{\alpha\lambda}s^{\beta\mu}\left(b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}w\right)\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}w &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $w(x^1, x^2)$ — функция нормальных перемещений, $\chi(x^1, x^2)$ — функция тангенциальных усилий, D — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, h — толщина оболочки, p — интенсивность нормаль-

ной нагрузки, $b^{\alpha\beta}$ — тензор начальной кривизны срединной поверхности, $s^{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор на срединной поверхности. Если отклонения от идеальной формы малы, то можно положить

$$b_{\alpha\beta} = b^{(0)}_{\alpha\beta} + \varepsilon b^{(1)}_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

где $b^{(0)}_{\alpha\beta}$ — тензор кривизны идеальной поверхности, ε — малый параметр. Пренебрегая изменением метрики вследствие безмоментной деформации, ищем решение уравнений (1.1) в виде

$$w = \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots, \quad \chi = \chi_0 + \varepsilon \chi_1 + \varepsilon^2 \chi_2 + \dots \quad (1.3)$$

Подстановка (1.2) и (1.3) после сравнения членов, содержащих ε , дает

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w_1 - s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} b_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_1 - N^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta w_1 &= N^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta w_0 \\ (1/Eh) \Delta\Delta \chi_1 + s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} b_{\alpha\beta}^{(0)} \nabla_\lambda \nabla_\mu w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом учтено, что $s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} b_{\alpha\beta}^{(0)} \Delta_\lambda \Delta_\mu \chi_0 = p$. Кроме того, введено обозначение для тензора начальных безмоментных усилий $N^{\alpha\beta}$, а поправка к тензору кривизны (1.2) выражена через функцию начальных отклонений $w_0(x^1, x^2)$

$$s^{\alpha\lambda} s^{\beta\mu} \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi_0 = N^{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\beta}^{(1)} = \nabla_\alpha \nabla_\beta w_0$$

Так как по предположению масштабы изменения и корреляции функций w_0 , w_1 и χ_1 малы по сравнению с масштабами изменения метрических свойств идеальной срединной поверхности, то уравнения (1.4) можно упростить, переписав их в ортогональных координатах (линиях кривизны) $r = x_1, x_2$ с единичным метрическим тензором и замечив тензорные производные соответствующими частными производными

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w_1 - \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} \right) - N_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= N_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi_1 + \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь R_1, R_2 — главные радиусы кривизны идеальной срединной поверхности; сохранено правило суммирования по индексам α, β .

2. Пусть $w_0(\mathbf{r})$ — случайная функция координат с математическим ожиданием, равным нулю. Рассмотрим область, достаточно удаленную от границ и других линий искажения. Можно ожидать, что при сделанных выше предположениях о характере нагрузки и при быстро изменяющемся поле начальных отклонений $w_0(\mathbf{r})$ влияние границ на поведение оболочки во внутренней области будет достаточно мало. Тогда можно вообще отвлечься от эффекта границ, заменяя граничные условия требованием ограниченности функции на бесконечности. Если в достаточно большой области срединной поверхности параметры оболочки и начальные безмоментные усилия можно принять постоянными, а функцию начальных неправильностей $w_0(\mathbf{r})$ можно рассматривать как однородное случайное поле, то стохастическая задача решается известным методом [3].

Однородное случайное поле $\varphi(\mathbf{r})$ допускает спектральное представление в виде стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dZ(\mathbf{k}) \quad (\mathbf{k} = k_1, k_2) \quad (2.1)$$

Функция распределения $Z(\mathbf{k})$ удовлетворяет соотношению

$$\langle dZ(\mathbf{k}) dZ^*(\mathbf{k}') \rangle = \Phi(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \quad (2.2)$$

где угловые скобки обозначают осреднение по множеству реализаций, звездочки — переход к комплексно-сопряженной величине, $d\mathbf{k} = dk_1 dk_2$, $\delta(\mathbf{k})$ — двухмерная дельта-функция. Функция $\Phi(\mathbf{k}) \geq 0$ является спектральной плотностью случайного поля $\varphi(\mathbf{r})$. Соответствующая корреляционная функция $R(\rho)$, где $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ выражается через $\Phi(\mathbf{k})$ согласно теореме Винера — Хинчина

$$R(\rho) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\rho} d\mathbf{k} \quad (2.3)$$

Представим случайные поля $w_0(\mathbf{r})$, $w_1(\mathbf{r})$ и $\chi_1(\mathbf{r})$ в форме интегралов типа (2.1) и учтем, что поля связаны между собой уравнениями (1.5). С использованием формул типа (2.2) получим следующие формулы для спектральных плотностей полей $w_1(\mathbf{r})$ и $\chi_1(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \Phi_{w_1}(\mathbf{k}) &= F^2(\mathbf{k}) \Phi_w(\mathbf{k}), & \Phi_{\chi_1}(\mathbf{k}) &= G^2(\mathbf{k}) \Phi_{w_0}(\mathbf{k}) \\ F(\mathbf{k}) &= \frac{k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta}}{k^4 D + (Eh/k^4)(k_1^2/R_2 + k_2^2/R_1)^2 + k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta}} \\ G(\mathbf{k}) &= \frac{Eh}{k^4} \left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1} \right) F(\mathbf{k}) \quad (k^2 = k_1^2 + k_2^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Спектральные плотности остальных параметров напряженно-деформированного состояния оболочки выражаются через $\Phi_{w_1}(\mathbf{k})$ и $\Phi_{\chi_1}(\mathbf{k})$, а также через их взаимную спектральную плотность

$$\Phi_{w_1\chi_1}(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}) \Phi_{w_0}(\mathbf{k}) \quad (2.5)$$

Так, флуктуационные напряжения σ_{11} в точках $z = \pm h/2$ определяются как

$$\sigma_{11} = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} \pm \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \right)$$

Отсюда с учетом (2.1) и (2.2) получаем спектральную плотность

$$\Phi_{\sigma_{11}}(\mathbf{k}) = \frac{k_1^2}{h^2} \Phi_{\chi_1}(\mathbf{k}) \pm \frac{E}{1-\nu^2} (k_1^2 + \nu k_2^2) \Phi_{w_1\chi_1}(\mathbf{k}) + \frac{E^2 h^2}{4(1-\nu^2)} (k_1^2 + \nu k_2^2) \Phi_{w_1}(\mathbf{k}) \quad (2.6)$$

Формулы типа (2.4) — (2.6) позволяют сделать некоторые общие выводы об изменении спектрального состава полей $w_1(\mathbf{r})$, $\chi_1(\mathbf{r})$ и т. д. в зависимости от характера и величины начальных безмоментных усилий. Рассмотрим выражение для $F(\mathbf{k})$. Функция $F(\mathbf{k})$ есть по существу передаточная функция системы, связывающая начальные отклонения срединной поверхности от ее идеальной формы с дополнительными отклонениями $w_1(\mathbf{r})$. Формулы (2.4) — (2.6) сохраняют смысл, пока функция $F(\mathbf{k})$ не имеет действительных полюсов. Уравнение для нахождения полюсов

$$k^4 D + \frac{Eh}{k^4} \left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1} \right) + k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.7)$$

совпадает с уравнением для нахождения критических усилий в линейной теории устойчивости оболочек. Напомним, что растяжению соответствует случай $N_{11} > 0, N_{22} > 0$. Таким образом, теория применима, пока начальные усилия меньше, чем их критические значения, определяемые по линейной теории.

Волновые числа, которые соответствуют наиболее быстро растущим отклонениям, найдем из условий

$$\frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial k_1} = \frac{\partial F(\mathbf{k})}{\partial k_2} = 0 \quad (2.8)$$

Пусть нагрузка задана с точностью до параметра p . Заменяя $N_{\alpha\beta}$ на $pN_{\alpha\beta}$ в уравнении (2.7), получим, что критическое значение параметра нагрузки равно

$$p_*(\mathbf{k}) = - \frac{1}{k_\alpha k_\beta N_{\alpha\beta}} \left[k^4 D + \frac{Eh}{k^4} \left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

С другой стороны, с учетом (2.9) формула (2.4) для $F(\mathbf{k})$ записывается при $p < p_*(\mathbf{k})$ в виде

$$F(\mathbf{k}) = \frac{p}{p_*(\mathbf{k}) - p}$$

Отсюда видно, что функции $p_*(\mathbf{k})$ и $F(\mathbf{k})$ принимают стационарные значения при одинаковых волновых числах k_1, k_2 . Таким образом, передаточная функции $F(\mathbf{k})$ принимает максимальное значение для отклонений, совпадающих с формами потери устойчивости в линейной теории. Именно эти отклонения растут быстрее всего, пока остаются применимыми линеаризованные уравнения (1.5).

3. Определение корреляционных функций по спектральным плотностям (2.4) — (2.6) сводится к двумерному преобразованию Фурье (2.3). В общем случае это преобразование может быть проведено только численными методами. Вместе с тем, имеется широкий класс задач, для которых аналитические вычисления могут быть доведены до конца.

Рассмотрим, например, сферическую оболочку, нагруженную равномерным давлением. Если начальные неправильности оболочки образуют изотропное поле, то интеграл в формуле (2.3) сводится к однократному интегралу по «радиальному» волновому числу k . В самом деле, формулы для корреляционных функций полей $w_1(\mathbf{r})$ и $\chi_1(\mathbf{r})$ принимают вид

$$\begin{aligned} R_{w_1}(\rho) &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(k) \Phi_{w_1}(k) e^{ik\rho} dk \\ R_{\chi_1}(\rho) &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(k) \Phi_{w_0}(k) e^{ik\rho} dk \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $F(k)$, $G(k)$ и $\Phi_{w_0}(k)$ зависят только от модуля k . Обозначим компоненты вектора $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ через ξ_1, ξ_2 . Переходя к полярным координатам $\xi_1 = \rho \cos \varphi, \xi_2 = \rho \sin \varphi, k_1 = k \cos \theta, k_2 = k \sin \theta$ и используя известное соотношение

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\rho \cos \theta) d\theta = 2\pi J_0(k\rho)$$

приведем первую из формул (3.1) к виду

$$R_{w_1}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} F^2(k) \Phi_{w_1}(k) J_0(k\rho) k dk \quad (3.2)$$

Аналогично преобразуются формулы для корреляционных функций других параметров, а также для взаимных корреляционных функций.

Обширный класс изотропных двумерных случайных полей задается при помощи спектральных плотностей вида

$$\Phi_{w_0}(k) = \frac{\Psi}{(1 + k^2/k_0^2)^n} \quad (3.3)$$

Здесь Ψ , k_0 и n — константы; при этом параметр $1/k_0$ характеризует масштаб корреляции. Случай $n = 2$ соответствует двумерному марковскому полю (аналогу экспоненциально коррелированной функции одной независимой переменной). При $n > 2$ формула описывает дифференцируемое случайное поле.

В дальнейшем полагаем n целым числом ($n = 3, 4, \dots$). Корреляционная функция начальных отклонений определяется по формуле типа (3.2)

$$R_{w_1}(\rho) = 2\pi\Psi \int_0^{\infty} \frac{J_0(k\rho) k dk}{(1 + k^2/k_0^2)^n} = 2\pi k_0^2 \Psi \frac{(k_0\rho)^{n-1} K_{n-1}(k_0\rho)}{2^{n-1} (n-1)!} \quad (3.4)$$

где K_n — функция Макдональда порядка n . На фиг. 1. показан график функции

$$\frac{1}{2\pi k_0^2 \Psi} R_{w_1} = \varphi_0(k_0\rho) = \varphi_0(\tau)$$

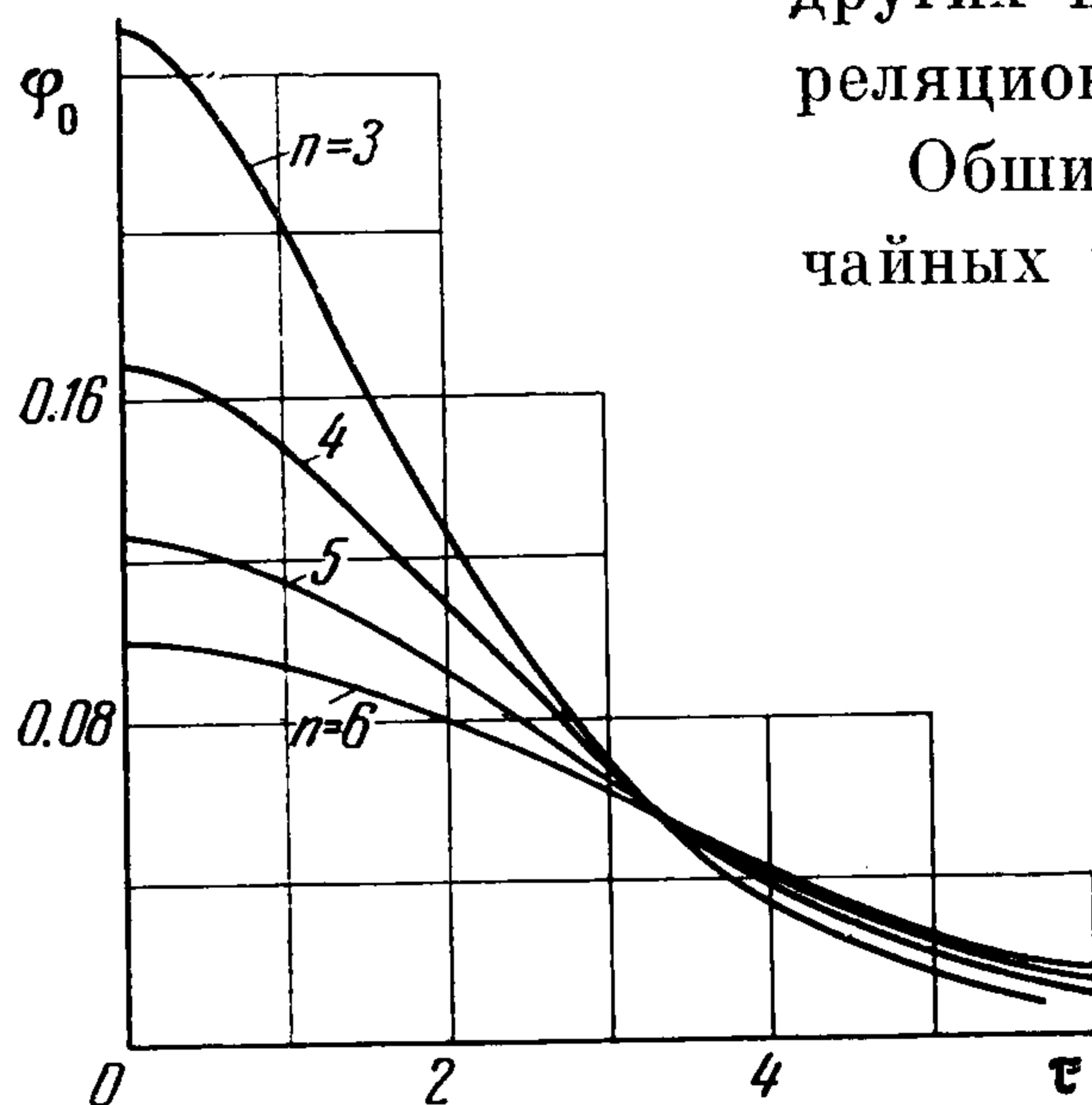
4. Вычисление корреляционных функций для $w_1(r)$ и $\chi_1(r)$ в случае изотропного поля отклонений со спектральной плотностью типа (3.3) можно произвести методом контурного интегрирования [5].

Рассмотрим, например, формулу (3.2) корреляционной функции прогиба $w_1(r)$. Запишем ее в виде

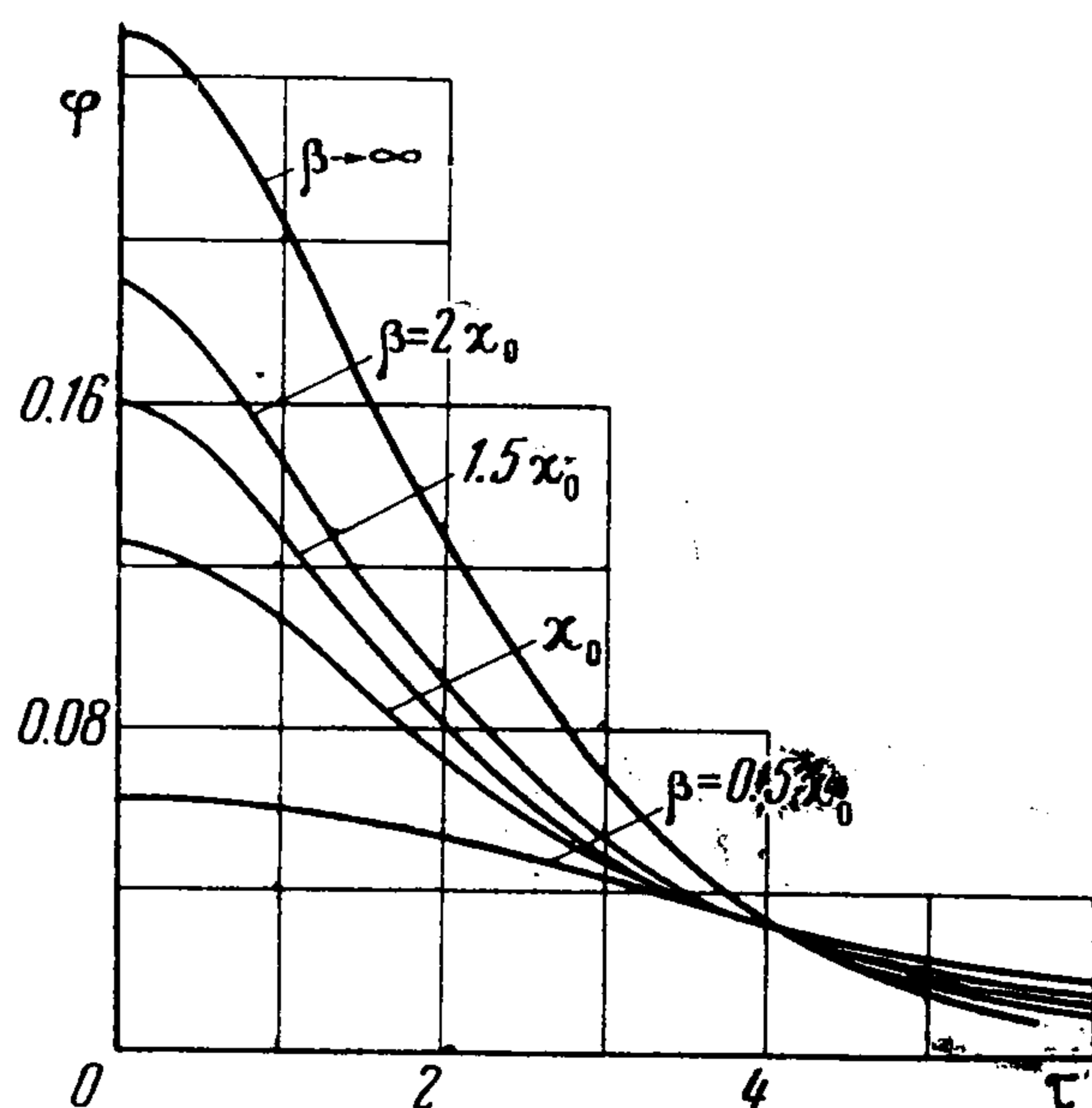
$$R_{w_1} = 2\pi k_0^2 \Psi \varphi(\tau) \quad (4.1)$$

и вычислим интеграл

$$c\varphi(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{J_0(\kappa\tau/k_0) \kappa^5 d\kappa}{(\kappa_0^2 + \kappa^2)^n (\kappa^4 + \beta^2 \kappa^2 + 1)^2} \quad (4.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{k}{k_*}, \quad \kappa_0 = \frac{k_0}{k_*}, \quad k_* = \left(\frac{Eh}{DR^2} \right)^{1/4}, \quad c = \frac{1}{\beta^4 \kappa_0^{2(n-1)}} \\ \beta^2 &= \frac{N}{Dk_*^2} = \frac{NR}{Eh^2} [12(1-\nu^2)]^{1/2}, \quad \tau = k_0 \rho \end{aligned} \quad (4.3)$$

Заменяем подынтегральное выражение функцией комплексного переменного

$$f(z) = \frac{H_0^{(1)}(z\tau/\kappa_0) z^5}{(\kappa_0^2 + z^2)^n (z^4 + \beta^2 z^2 + 1)^2} \quad (4.4)$$

Здесь $H_0^{(1)}(z\tau/\kappa_0)$ — функция Ганкеля нулевого порядка. Если начальное усилие N больше критического значения, т. е. $\beta^2 > -2$, то функция $f(z)$ голоморфна всюду в верхней полуплоскости в том числе и на действительной оси, за исключением конечного числа полюсов и точки ветвления $z=0$. Подсчитаем сумму вычетов вокруг всех полюсов функции $f(z)$ в верхней полуплоскости. Выражение (4.2) примет вид:

$$\begin{aligned} \text{сф}(\tau) &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \left(\frac{d}{\kappa_0 d\kappa_0} \right)^{n-1} \left[\frac{\kappa_0^4 K_0(\tau)}{(\kappa_0^4 - \beta^2 \kappa_0^2 + 1)^2} \right] - \\ &- \frac{1}{2\gamma_1} \frac{d}{d\gamma_1} \left[\frac{\gamma_1^4 K_0(\gamma_1 \tau / \kappa_0)}{(\kappa_0^2 - \gamma_1^2)^n (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)^2} \right] - \frac{1}{2\gamma_2} \frac{d}{d\gamma_2} \left[\frac{\gamma_2^4 K_0(\gamma_2 \tau / \kappa_0)}{(\kappa_0^2 - \gamma_2^2)^n (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^2} \right] \\ \gamma_{1,2}^2 &= 1/2 [\beta^2 \mp (\beta^4 - 4)^{1/2}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Частным случаем выражения (4.5) является формула для безразмерной корреляционной функции перемещений пластины (формула пригодна только при растягивающих усилиях в срединной поверхности)

$$\begin{aligned} \text{сф}(\tau) &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \left(\frac{d}{\kappa_0 d\kappa_0} \right)^{n-1} \left[\frac{K_0(\tau)}{(\kappa_0^2 - \beta^2)^2} \right] + \\ &+ \frac{(\kappa_0^2 - \beta^2)(\tau/\kappa_0) K_1(\beta\tau/\kappa_0) - 2\beta n K_0(\beta\tau/\kappa_0)}{2\beta(\kappa_0^2 - \beta^2)^{n+1}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

В соотношении (4.6) сохранены обозначения (4.3). При этом параметр R , который входит в коэффициент k_* , играет роль характерной длины.

5. Остановимся подробнее на случае $n=3$. Выражение для безразмерной корреляционной функции (4.5) примет вид

$$\begin{aligned} \text{сф}(\tau) &= a_1 \gamma_1 \tau K_1(\gamma_1 \tau / \kappa_0) + a_2 \gamma_2 \tau K_1(\gamma_2 \tau / \kappa_0) + a_3 K_0(\gamma_1 \tau / \kappa_0) + \\ &+ a_4 K_0(\gamma_2 \tau / \kappa_0) + (a_5 + a_6 \tau^2) K_0(\tau) + a_7 \tau K_1(\tau) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Коэффициенты a_j выражаются через κ_0 , γ_1 и γ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma_1^2}{2(\kappa_0^2 - \gamma_1^2)^3 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)^2 \kappa_0}; & a_2 &= \frac{\gamma_2^2}{2(\kappa_0^2 - \gamma_2^2)^3 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^2 \kappa_0} \\ a_3 &= \frac{\gamma_1^2 (3\gamma_1^4 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 - 2\kappa_0^2 \gamma_2^2)}{(\kappa_0^2 - \gamma_1^2)^4 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)^3}, & a_4 &= \frac{\gamma_2^2 (3\gamma_2^4 - \gamma_1^2 \gamma_2^2 - 2\kappa_0^2 \gamma_1^2)}{(\kappa_0^2 - \gamma_2^2)^4 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^3} \\ a_5 &= \frac{3\kappa_0^8 - 8\kappa_0^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 + 2\kappa_0^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \gamma_1^4 \gamma_2^4}{(\kappa_0^2 - \gamma_1^2)^4 (\kappa_0^2 - \gamma_1^2)^4} & (5.2) \\ a_6 &= \frac{1}{8(\kappa_0^2 - \gamma_1^2)^2 (\kappa_0^2 - \gamma_2^2)^2}, & a_7 &= \frac{5\kappa_0^4 - \kappa_0^2 (\kappa_1^2 + \gamma_2^2) - 3\gamma_1^2 \gamma_2^2}{4(\kappa_0^2 - \gamma_1^2)^3 (\kappa_0^2 - \gamma_2^2)^3} \end{aligned}$$

Аналогичная формула для пластины будет

$$c\varphi(\tau) = \frac{(\beta\tau/\kappa_0) K_1(\beta\tau/\kappa_0)}{2\beta^2(\kappa_0^2 - \beta^2)^3} + \frac{(5\kappa_0^2 - \beta^2)\tau K_1(\tau)}{4\kappa_0^4(\kappa_0^2 - \beta^2)^3} + \frac{\tau^2 K_0(\tau)}{8\kappa_0^4(\kappa_0^2 - \beta^2)^2} + \frac{3[K_0(\tau) - K_0(\beta\tau/\kappa_0)]}{(\kappa_0^2 - \beta^2)^4} \quad (5.3)$$

Представляет интерес предельный переход в формулах (5.1) и (5.3) при $\tau \rightarrow 0$, в результате которого получаются соответствующие значения безразмерных дисперсий. Для пластины такой предельный переход дает:

$$c\varphi(0) = \frac{(\kappa_0^2 - \beta^2)(2\kappa_0^4 + 5\beta^2\kappa_0^2 - \beta^4) - 12\kappa_0^4\beta^2 \ln(\kappa_0/\beta)}{4\beta^2\kappa_0^4(\kappa_0^2 - \beta^2)^4} \quad (5.4)$$

Дисперсия функции прогиба для оболочки выражается по-разному в зависимости от величины параметра нагрузки β . Если $\beta^2 > 2$, то коэффициенты γ_1 и γ_2 вещественны. Дисперсия в этом случае равна

$$c\varphi(0) = b_1 + b_2 \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + b_3 \ln \frac{\kappa_0}{\gamma_1} + b_4 \ln \frac{\kappa_0}{\gamma_2} \quad (5.5)$$

При $-2 < \beta^2 < 2$ коэффициенты γ_1, γ_2 являются комплексными. Формула для дисперсии будет

$$c\varphi(0) = c_1 + c_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2 - \beta^2}{2 + \beta^2} \right)^{1/2} + c_3 \ln \kappa_0 \quad (5.6)$$

коэффициенты b_j и c_j зависят от κ_0 и β .

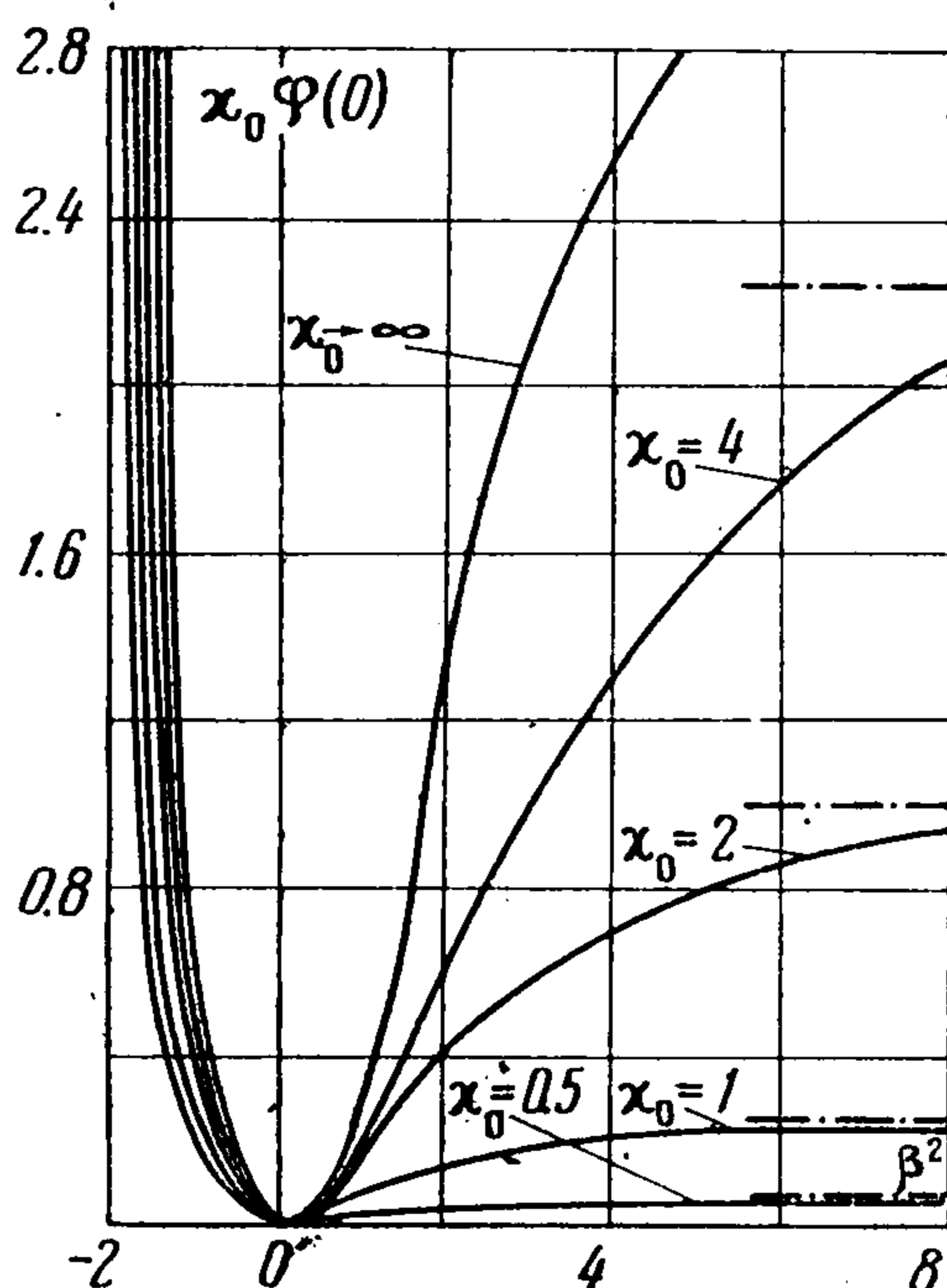
На фиг. 2 представлен график корреляционной функции (5.3) для пластины, испытывающей всестороннее растяжение. Дополнительные перемещения $w_1(r)$ имеют более слабую корреляцию, чем начальные отклонения. С ростом параметра нагрузки β корреляция усиливается. При $\beta \rightarrow \infty$ имеем $\varphi(\tau) \rightarrow \varphi_0(\tau)$, т. е. в пределе начальные отклонения «выправляются».

Результаты вычислений по формулам (5.5), (5.6) показаны на фиг. 3. По оси абсцисс отложен параметр нагрузки $\beta^2 = NR [12(1 - \nu^2)]^{1/2} / Eh^2$, по оси ординат — безразмерная дисперсия перемещения $w_1(r)$ в сферической оболочке. Параметр $\kappa_0 = k_0/k_*$ принимался равным 0.5, 1, 2 и 4. Кроме того, на фиг. 3 нанесена кривая, соответствующая предельному случаю $\kappa_0 \rightarrow \infty$ (дельта-коррелированному полю начальных отклонений). Правые ветви кривых соответствуют растягивающим усилиям. При $\beta \rightarrow \infty$ имеем $\varphi(0) \rightarrow \varphi_0(0)$. Левые ветви соответствуют сжимающим усилиям. При $\beta \rightarrow -2$, т. е. при стремлении давления к его критическому значению, определяемому по линейной теории, дисперсия перемещений $w_1(r)$ стремится к бесконечности.

Поступила 6 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в нелинейной теории упругих оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.
2. Макаров Б. П. Применение статистического метода для анализа экспериментальных данных по устойчивости оболочек. Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение, 1962, № 1.
3. Болотин В. В. Стохастические краевые задачи в теории оболочек. Тр. 6-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Баку, 1966, М., «Наука», 1966.
4. Мушгары Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. Изд-во иностр. лит., 1949.



Фиг. 3