Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

О РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ИНТЕГРАЛ ПО ПРИСОЕДИНЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская

(Ленинград)

Получена теорема разложения произвольной функции в интеграл по присоединенным сферическим функциям, представляющая интерес при решении краевых задач математической физики и теории упругости для однополостных гиперболоидов вращения.

§ 1. Введение. Рассмотрим интегральные разложения вида

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{[{}^1/{}_2(m-1)]} (m - {}^1/{}_2 - 2n)\,\Gamma(2m-2n)\,\Gamma(2n+1)\,\varphi^m_{m-{}^1/{}_2-2n}(x) \times$$
$$\times \int_0^\infty f(y)\,\varphi^m_{m-{}^1/{}_2-2n}(y)\,dy + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tau \operatorname{th}\pi\tau\,\Gamma({}^1/{}_2+m+i\tau)\,\Gamma({}^1/{}_2+m-i\tau) \times$$
$$\times\, \varphi_{i\tau}{}^m(x)\,d\tau \int_0^\infty f(y)\,\varphi_{i\tau}{}^m(y)\,dy \qquad (0<x<\infty;\ m=0,1,2,\ldots) \tag{1.1}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{[{}^1/{}_2 m]-1} (m - {}^3/{}_2 - 2n)\,\Gamma(2m-2n-1)\,\Gamma(2n+2)\,\psi^m_{m-{}^3/{}_2-2n}(x) \times$$
$$\times \int_0^\infty f(y)\,\psi^m_{m-{}^3/{}_2-2n}(y)\,dy + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tau \operatorname{th}\pi\tau\,\Gamma({}^1/{}_2+m+i\tau)\,\Gamma({}^1/{}_2+m-i\tau) \times$$
$$\times\, \psi_{i\tau}{}^m(x)\,d\tau \int_0^\infty f(y)\,\psi_{i\tau}{}^m(y)\,dy \qquad (0<x<\infty;\ m=0,1,2,\ldots) \tag{1.2}$$

где $\varphi_\nu{}^m(x)$ и $\psi_\nu{}^m(x)$ — четная и нечетная комбинации сферических функций мнимого аргумента

$$\varphi_\nu{}^m(x) = \frac{1}{2}\,[e^{\mp{}^1/{}_2 i\pi m} P^{-m}_{\nu-{}^1/{}_2}(ix) + e^{\pm{}^1/{}_2 i\pi m} P^{-m}_{\nu-{}^1/{}_2}(-ix)] \qquad (x \gtrless 0) \tag{1.3}$$

$$\psi_\nu{}^m(x) = \frac{1}{2i}\,[e^{\mp{}^1/{}_2 i\pi m} P^{-m}_{\nu-{}^1/{}_2}(ix) - e^{\pm{}^1/{}_2 i\pi m} P^{-m}_{\nu-{}^1/{}_2}(-ix)] \qquad (x \gtrless 0) \tag{1.4}$$

$P_\nu^{-m}(z)$ — функция Лежандра, $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Пустые суммы, получающиеся в (1.1) при $m = 0$ и в (1.2) при $m = 0$ и $m = 1$, принимаются, как обычно, равными нулю, и в этих случаях разложения содержат только интегральный член.

Формулы данного типа представляют интерес в связи с решением краевых задач математической физики и теории упругости для областей, ограниченных поверхностью однополостного гиперболоида вращения.

Для узкого класса функций эти формулы могут быть выведены из общей теории разложений по собственным функциям (Вейль [1], § 2, стр. 454; Титчмарш [2], стр. 119).

Прямое доказательство соотношений (1.1), (1.2) для частного случая $m = 0$ было дано в недавно опубликованной работе [3].

Цель настоящей статьи заключается в распространении предложенного в [3] метода на общий случай [1] произвольных целых m.

Результаты работы могут быть сформулированы в виде теоремы.

Теорема. Пусть $f(x)$ — заданная функция, определенная в промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяющая следующим условиям.

1. Функция $f(x)$ — кусочно-непрерывная и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке $(0, \infty)$.

2. Функция

$$f(x) \in L(0, a), \qquad f(x)\, x^{-1/2} \ln(1 + x) \in L(a, \infty) \qquad (a > 0)$$

Тогда для всякой точки x, отличной от точки разрыва, $f(x)$ может быть представлена формулой (1.1) или (1.2).

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющая следующим условиям.

1. Функция $f(x)$ — кусочно-непрерывная и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке $(-\infty, \infty)$.

2. Функция $f(x)\, |x|^{-1/2} \ln(1 + |x|) \in L(-\infty, -a)$

$$f(x)\, x^{-1/2} \ln(1 + x) \in L(a, \infty) \qquad (a > 0)$$

допускает представление в виде формулы аналогичного типа, содержащей функции $\varphi_\nu^m(x)$ и $\psi_\nu^m(x)$.

Это разложение легко получается при помощи формул (1.1), (1.2), если представить $f(x)$ в виде комбинации четной и нечетной функции

$$f(x) = {}^1/_2\, [f(x) + f(-x)] + {}^1/_2\, [f(x) - f(-x)]$$

§ 2. **Оценки и асимптотические представления сферических функций.** Доказательство теоремы разложения опирается на некоторые свойства функций $\varphi_\nu^m(x)$ и $\psi_\nu^m(x)$, которые могут быть выведены из представлений сферических функций через гипергеометрические ряды.

Так как доказательства формул (1.1) и (1.2) отличаются лишь незначительными деталями, ограничимся рассмотрением четного случая. Будем пользоваться следующими двумя представлениями функции $\varphi_\nu^m(x)$, вытекающими из определения функций Лежандра $P_\nu^{-m}(z)$ (см., например, [5]).

$$\varphi_\nu^m(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,(x^2+1)^{-1/2 m}}{2^m \Gamma({}^3/_4 + {}^1/_2 m + {}^1/_2 \nu)\, \Gamma({}^3/_4 + {}^1/_2 m - {}^1/_2 \nu)} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2} + \frac{\nu}{2},\ \frac{1}{4} - \frac{m}{2} - \frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ -x^2\right) \tag{2.1}$$

Эта формула показывает, что функция $\varphi_\nu^m(x)$ непрерывна относительно x в промежутке $(0, \infty)$ и является целой функцией параметра ν.

---

[1] Случай $m = 0$ соответствует краевым гармоническим задачам для однополостного гиперболоида, в которых искомая функция не зависит [4] от полярного угла φ. Общий случай целого m встречается, когда искомая функция есть произвольная периодическая функция от φ. В этом случае метод разделения переменных приводит к задаче Штурма — Лиувилля со смешанным спектром, состоящим из интервала $({}^1/_4, \infty)$ и конечного числа отрицательных собственных значений.

Второе представление

$$\varphi_\nu^m(x) = \frac{\Gamma(^3/_4 - {}^1/_2 m + {}^1/_2\nu)(x^2+1)^{-1/4}}{2^{m-\nu+1}\Gamma(1+\nu)\Gamma(^3/_4 + {}^1/_2 m - {}^1/_2\nu)} \times$$

$$\times\left\{(\sqrt{x^2+1}+x)^\nu F\left(\frac{1}{2}+m,\ \frac{1}{2}-m,\ 1+\nu, \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^\nu F\left(\frac{1}{2}+m,\ \frac{1}{2}-m,\ 1+\nu,\ \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\right\} \tag{2.2}$$

($F(a,\ b,\ c,\ x)$ — гипергеометрическая функция)

Эта формула позволяет получить оценки для $\varphi_\nu^m(x)$, необходимые для доказательства (1.1). Предварительно заметим, что при $0 \leqslant x < 1$ и $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$ имеет место[1]

$$\left|F\left(\frac{1}{2}+m,\ \frac{1}{2}-m,\ 1+\nu,\ x\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(^1/_2+m)_k(^1/_2-m)_k}{(1+\nu)_k\,k!}x^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|(^1/_2+m)_k(^1/_2-m)_k|}{(1)_k\,k!}x^k = O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(^1/_2)_k(^1/_2)_k}{(1)_k\,k!}x^k = O(1)\,F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ x\right)$$

Отсюда следует для $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant \tau < \infty$

$$\varphi_{i\tau}{}^m(x) = O(1)\,g(x) \tag{2.3}$$

$$g(x) = (x^2+1)^{-1/4}\left\{F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)+F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\right\}$$

При этом оценка равномерна относительно τ во всяком промежутке $(0,\ T)$.

Рассмотрение поведения гипергеометрических функций при $x \to \infty$ показывает, что

$$g(x) = O(1),\ (0 \leqslant x \leqslant a),\ g(x) = O(1)\,x^{-1/2}\ln(1+x)\ (a \leqslant x < \infty),\ (a > 0)$$

Далее, воспользовавшись разложением

$$F\left(\frac{1}{2}+m,\ \frac{1}{2}-m,\ 1+\nu,\ x\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(^1/_2+m)_k(^1/_2-m)_k}{(1+\nu)_k\,k!}x^k = 1 + r(\nu,\ x) \tag{2.4}$$

и оценивая остаточный член этой формулы, находим для $0 \leqslant x < 1$ и $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$:

$$|r(\nu,\ x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(^1/_2+m)_k(^1/_2-m)_k}{(1+\nu)_k\,k!}x^k\right| = \left|\frac{^1/_4-m^2}{1+\nu}x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(^3/_2+m)_k(^3/_2-m)_k}{(2+\nu)_k\,(k+1)!}x^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{xO(1)}{|1+\nu|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(^3/_2)_k(^3/_2)_k}{(2)_k\,k!}x^k = \frac{xO(1)}{|1+\nu|}F\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ 2, x\right)$$

Отсюда

$$F\left(\frac{1}{2}+m,\ \frac{1}{2}-m,\ 1+\nu,\ x\right) = 1 + \frac{x}{1-x}O(|\nu|^{-1})$$

Из последнего равенства и (2.2) следует асимптотическая формула

$$\frac{2^{m-\nu}\Gamma(1+\nu)\Gamma(^3/_4+{}^1/_2 m-{}^1/_2\nu)}{\Gamma(^3/_4-{}^1/_2 m+{}^1/_2\nu)}\varphi_\nu{}^m(\operatorname{sh}\alpha) = \qquad (|\arg\nu| \leqslant {}^1/_2\pi)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}\{e^{\alpha\nu}[1+e^{2\alpha}O(|\nu|^{-1})] + e^{-\alpha\nu}[1+e^{-2\alpha}O(|\nu|^{-1})]\} \qquad \begin{pmatrix}\alpha \geqslant 0\\ |\nu| \to \infty\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

---

[1] Из рассмотрения асимптотического поведения гамма-функции следует

$$|(^1/_2+m)_k(^1/_2-m)_k| = O(1)(^1/_2)_k(^1/_2)_k$$

Здесь символ O не зависит от k.

Наряду с функцией $\varphi_\nu^m(x)$ рассмотрим функцию $\omega_\nu^m(x)$, представляющую собой линейную комбинацию функций Лежандра второго рода $Q_\nu^{-m}(z)$

$$\omega_\nu^m(x) = (-1)^m\, {}^1/_2\, [e^{{}^1/_2 i\pi m} Q_{\nu-{}^1/_2}^{-m}(ix) + e^{-{}^1/_2 i\pi m} Q_{\nu-{}^1/_2}^{-m}(-ix)]$$

Эта функция допускает представления при помощи гипергеометрических рядов

$$\omega_\nu^m(x) = \frac{\pi\Gamma({}^1/_4 - {}^1/_2 m + {}^1/_2\nu)(x^2+1)^{-{}^1/_2\nu-{}^1/_4}}{2^{m+1}\Gamma(1+\nu)\Gamma({}^1/_4 + {}^1/_2 m - {}^1/_2\nu)} \times$$
$$\times F\left(\frac{1}{4} + \frac{m}{2} + \frac{\nu}{2}, \frac{1}{4} - \frac{m}{2} + \frac{\nu}{2}, 1+\nu, \frac{1}{x^2+1}\right) \qquad (2.7)$$

$$\omega_\nu^m(x) = \frac{\pi\Gamma({}^1/_4 - {}^1/_2 m + {}^1/_2\nu)(x^2+1)^{-{}^1/_4}}{2^{m-\nu+1}\Gamma(1+\nu)\Gamma({}^1/_4 + {}^1/_2 m - {}^1/_2\nu)} (\sqrt{x^2+1} + x)^{-\nu} \times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m, 1+\nu, \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \qquad (2.8)$$

Рассматриваемая функция непрерывна в интервале $(0, \infty)$ и является мероморфной функцией ν с полюсами в точках $\nu = m - {}^1/_2 - 2n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Из приведенных выше оценок следует, что эта функция имеет асимптотическое представление

$$\frac{2^{m-\nu}\Gamma(1+\nu)\Gamma({}^1/_4 + {}^1/_2 m - {}^1/_2\nu)}{\pi\Gamma({}^1/_4 - {}^1/_2 m + {}^1/_2\nu)}\, \omega_\nu^m(\operatorname{sh}\alpha) = \frac{e^{-\alpha\nu}}{2\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}} [1 + e^{-2\alpha} O(|\nu|)^{-1}]$$
$$\alpha \geqslant 0, \qquad |\nu| \to \infty, \qquad |\arg\nu| \leqslant {}^1/_2\pi \qquad (2.9)$$

Формулы (2.3), (2.5) и (2.9) достаточны для обоснования равенства (1.1).

§ 3. Доказательство теоремы разложения. Рассмотрим интеграл

$$J(T, x) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \tau\, \operatorname{th}\pi\tau\, \Gamma({}^1/_2 + m + i\tau)\Gamma({}^1/_2 + m - i\tau)\varphi_{i\tau}^m(x)\, d\tau \int_0^\infty f(y)\varphi_{i\tau}^m(y)\, dy$$
$$0 < x < \infty, \quad T > 0 \qquad (3.1)$$

Из (2.3), (2.4) вытекает, что внутренний интеграл в (3.1) мажорируется выражением

$$O(1)\int_0^a |f(y)|\, dy + O(1)\int_a^\infty |f(y)|\, y^{-{}^1/_2} \ln(1+y)\, dy$$

и, следовательно, в силу условий 2 теоремы сходится абсолютно и равномерно относительно τ во всяком промежутке $(0, T)$. Поэтому выражение под знаком [1] повторного интеграла (3.1) представляет непрерывную функцию τ, и интеграл имеет смысл для всякого $T > 0$.

Далее, в силу мажорированной сходимости, можно изменить в (3.1) порядок интегрирования и представить $J(T, x)$ в виде

$$J(T, x) = \int_0^\infty f(y) K(x, y, T)\, dy \qquad (3.2)$$

$$K(x, y, T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \tau\, \operatorname{th}\pi\tau\, \Gamma({}^1/_2 + m + i\tau)\Gamma({}^1/_2 + m - i\tau)\varphi_{i\tau}^m(x)\varphi_{i\tau}^m(y)\, d\tau \qquad (3.3)$$

---

[1] Заметим, что функция под знаком внутреннего интеграла кусочно непрерывна в открытом интервале $(0, \infty)$ и является непрерывной функцией параметра τ в интервале $(0, T)$.

или, так как подынтегральное выражение — четная функция от τ, то

$$K(x, y, T) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-iT}^{iT} \nu \operatorname{tg} \pi\nu \Gamma(1/2 + m + \nu)\,\Gamma(1/2 + m - \nu)\,\varphi_\nu^{\ m}(x)\,\varphi_\nu^{\ m}(y)\,d\nu \tag{3.4}$$

Если воспользоваться соотношением [1]

$$\pi \operatorname{tg} \pi\nu \varphi_\nu^{\ m}(x) = \omega_{-\nu}^{\ m}(x) - \omega_\nu^{\ m}(x),$$

то равенство (3.4) можно преобразовать к одной из следующих двух форм:

$$K(x, y, T) = \frac{2}{\pi^2 i}\int_{-iT}^{iT} \nu\Gamma(1/2 + m + \nu)\,\Gamma(1/2 + m - \nu)\,\omega_\nu^{\ m}(x)\,\varphi_\nu^{\ m}(y)\,d\nu \qquad (y \leqslant x)$$

$$K(x, y, T) = \frac{2}{\pi^2 i}\int_{-iT}^{iT} \nu\Gamma(1/2 + m + \nu)\,\Gamma(1/2 + m - \nu)\,\varphi_\nu^{\ m}(x)\,\omega_\nu^{\ m}(y)\,d\nu \quad (y \geqslant x) \tag{3.5}$$

(x — фиксированное положительное число).

Выражения под знаком интегралов (3.5) представляют собой аналитические функции комплексного переменного ν, которые не имеют в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$ особых точек, за исключением конечного числа полюсов [2]

$$\nu = m - 1/2 - 2n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ [1/2\,(m-1)] \tag{3.6}$$

Дополняя контур интегрирования в (3.5) дугой Γ_T радиуса $T > m$, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$, и применяя теорему о вычетах, получаем

$$K(x, y, T) = \frac{2}{\pi^2 i}\int_{\Gamma_T} \nu\Gamma(1/2 + m + \nu)\,\Gamma(1/2 + m - \nu)\,\omega_\nu^{\ m}(x)\,\varphi_\nu^{\ m}(y)\,d\nu - $$
$$- \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{[1/2(m-1)]} (a_{-1})_{\nu = m - 1/2 - 2n} \qquad (y \leqslant x)$$

$$K(x, y, T) = \frac{2}{\pi^2 i}\int_{\Gamma_T} \nu\Gamma(1/2 + m + \nu)\,\Gamma(1/2 + m - \nu)\,\varphi_\nu^{\ m}(x)\,\omega_\nu^{\ m}(y)\,d\nu - $$
$$- \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{[1/2(m-1)]} (a_{-1})_{\nu = m - 1/2 - 2n} \qquad (y \geqslant x) \tag{3.7}$$

где

$$(a_{-1})_{\nu = m - 1/2 - 2n} = (m - 1/2 - 2n)\,\Gamma(2m - 2n)\,\Gamma(2n + 1)\,\varphi_{m-1/2-2n}^{\ m}(x)\,\varphi_{m-1/2-2n}^{\ m}(y) \tag{3.8}$$

Обозначим интегралы, взятые по дуге Γ_T, в формулах (3.7) через $K_1(x, y, T)$ и $K_2(x, y, T)$. Тогда равенство (3.2) может быть записано в виде [3]

---

[1] Это соотношение есть следствие известной формулы

$$\pi \operatorname{tg} \pi\nu P_{\nu-1/2}^{-m}(z) = Q_{-\nu-1/2}^{-m}(z) - Q_{\nu-1/2}^{-m}(z).$$

[2] Эти полюса будут особыми точками функции $\omega_\nu^{\ m}(x)$, расположенными в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$. Что касается полюсов функции $\Gamma(1/2 + m - \nu)$

$$\nu = 1/2 + m + N \quad (N = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

то они компенсируются нулями $\omega_\nu^m(x)$ при $N = 2p$ и нулями $\varphi_\nu^m(x)$ при $N = 2p + 1$ ($p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) (см. формулы (2.1) и (2.7).

[3] Заметим, что из определения $\varphi_\nu^m(x)$ легко получить

$$\varphi_{m-1/2-2n}^{m}(x) = O(1) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad \varphi_{m-1/2-2n}^{m}(x) = O(1)\,\overline{x}^{-m+2n}, \quad (x \geqslant 1)$$

поэтому интегралы под знаком суммы сходятся абсолютно.

$$J(T, x) = \int_0^x f(y) K_1(x, y, T)\, dy + \int_x^\infty f(y) K_2(x, y, T)\, dy - \tag{3.9}$$

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{[{}^1/_2(m-1)]} (m - {}^1/_2 - 2n)\, \Gamma(2m - 2n)\, \Gamma(2n + 1)\, \varphi_{m-{}^1/_2-2n}^{m}(x) \int_0^\infty f(y)\, \varphi_{m-{}^1/_2-2n}^{m}(y)\, dy$$

Исследуем теперь поведение интеграла $J(T, x)$ при $T \to \infty$. Из формул (2.5) и (2.9) и асимптотических формул для гамма-функции следует, что при $|\nu| \to \infty$, $|\arg \nu| \leqslant {}^1/_2\pi$:

$$\nu\pi^{-1}\Gamma({}^1/_2 + m + \nu)\, \Gamma({}^1/_2 + m - \nu)\, \psi_\nu^m(\operatorname{sh}\alpha)\, \varphi_\nu^m(\operatorname{sh}\alpha') =$$

$$(0 \leqslant \alpha' \leqslant \alpha)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha'}} \{e^{-(\alpha-\alpha')\nu} + e^{-(\alpha+\alpha')\nu} + e^{-(\alpha-\alpha')\nu} O(|\nu|^{-1}) + e^{-(\alpha+\alpha')\nu} O(|\nu|^{-1})\}$$

$$\nu\pi^{-1}\Gamma({}^1/_2 + m + \nu)\, \Gamma({}^1/_2 + m - \nu)\, \psi_\nu^m(\operatorname{sh}\alpha')\, \varphi_\nu^m(\operatorname{sh}\alpha) =$$

$$(\alpha \leqslant \alpha' < \infty$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha'}} \{e^{-(\alpha'-\alpha)\nu} + e^{-(\alpha'+\alpha)\nu} + e^{-(\alpha'-\alpha)\nu} O(|\nu|^{-1}) + e^{-(\alpha'+\alpha)\nu} O(|\nu|^{-1})\} \tag{3.10}$$

Полагая на дуге Γ_T

$$\nu = Te^{i\varphi} \quad (-{}^1/_2\pi \leqslant \varphi \leqslant {}^1/_2\pi)$$

и воспользовавшись (3.10), находим

$$K_1(\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{sh}\alpha', T) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha'}} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \alpha')T}{\pi(\alpha - \alpha')} + \frac{\sin(\alpha + \alpha')T}{\pi(\alpha + \alpha')} + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{1 - e^{-(\alpha-\alpha')T}}{(\alpha - \alpha')T} + O(1)\frac{1 - e^{-(\alpha+\alpha')T}}{(\alpha + \alpha')T} \right\} \qquad (0 \leqslant \alpha' \leqslant \alpha) \tag{3.11}$$

$$K_2(\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{sh}\alpha', T) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha'}} \left\{ \frac{\sin(\alpha' - \alpha)T}{\pi(\alpha' - \alpha)} + \frac{\sin(\alpha' + \alpha)T}{\pi(\alpha' + \alpha)} + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{1 - e^{-(\alpha'-\alpha)T}}{(\alpha' - \alpha)T} + O(1)\frac{1 - e^{-(\alpha'+\alpha)T}}{(\alpha' + \alpha)T} \right\} \qquad (\alpha \leqslant \alpha' < \infty)$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующими рассуждениями работы [3].

В (3.9) положим $x = \operatorname{sh}\alpha$, $y = \operatorname{sh}\alpha'$; воспользовавшись (3.11), можно представить интегралы, взятые по промежуткам $(0, x)$ и (x, ∞), в виде суммы интегралов.

Например

$$\int_0^x f(y) K_1(x, y, T)\, dy = \int_0^\alpha f(\operatorname{sh}\alpha') K_1(\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{sh}\alpha', T) \operatorname{ch}\alpha'\, d\alpha' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha f(\operatorname{sh}\alpha') \left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2} \frac{\sin(\alpha - \alpha')T}{\alpha - \alpha'}\, d\alpha' +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha f(\operatorname{sh}\alpha') \left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2} \frac{\sin(\alpha + \alpha')T}{\alpha + \alpha'}\, d\alpha' +$$

$$+ O(1)\int_0^\alpha |f(\operatorname{sh}\alpha')| \left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2} \frac{1 - e^{-(\alpha-\alpha')T}}{(\alpha - \alpha')T}\, d\alpha' +$$

$$+ O(1)\int_0^\alpha |f(\operatorname{sh}\alpha')| \left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2} \frac{1 - e^{-(\alpha+\alpha')T}}{(\alpha + \alpha')T}\, d\alpha'$$

Из условий, наложенных на функцию $f(x)$, следует, согласно теореме Дирихле

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha f(\operatorname{sh}\alpha')\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin(\alpha-\alpha')T}{\alpha-\alpha'}\,d\alpha'=\frac{1}{2}f(\operatorname{sh}\alpha-0)$$

Остальные интегралы стремятся при возрастании T к нулю (При доказательстве последнего утверждения для интеграла, содержащего в знаменателе разность $\alpha-\alpha'$, следует выделить δ-окрестность точки α и, взяв достаточно малое δ, неограниченно увеличивать T).

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^x f(y)K_1(x,y,T)\,dy=\frac{1}{2}f(x-0) \tag{3.12}$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_x^\infty f(y)K_2(x,y,T)\,dy=\frac{1}{2}f(x+0) \tag{3.13}$$

Таким образом,

$$\lim_{T\to\infty}J(T,x)={}^1\!/_2\,[f(x+0)+f(x-0)]\,- \tag{3.14}$$

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{[{}^1\!/_2(m-1)]}(m-{}^1\!/_2-2n)\,\Gamma(2m-2n)\,\Gamma(2n+1)\,\varphi^m_{m-1/2-2n}(x)\int_0^\infty f(y)\,\varphi^m_{m-1/2-2n}(y)\,dy.$$

Это и доказывает равенство (1.1).

§ 4. **Примеры.** Рассмотрим разложение функции $f(x)=(x^2+1^{-1/2\,s}$, $s>{}^1\!/_2$. Условия теоремы будут тогда выполненными, и разложение (1.1) имеет место. Вычисление интегралов по переменной y производится путем замены $\varphi^m_\nu(y)$ ее выражением по формуле (2.2). Искомое разложение имеет вид

$$(x^2+1)^{-1/2\,s}=\frac{2^{m-1}}{\pi\Gamma({}^1\!/_2 s+{}^1\!/_2 m)\,\Gamma({}^1\!/_2 s-{}^1\!/_2 m)}\times$$

$$\times\left\{2\sum_{n=0}^{[{}^1\!/_2(m-1)]}\left(m-\frac{1}{2}-2n\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(m-n)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+\frac{m}{2}-n\right)\times\right.$$

$$\times\,\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{m}{2}+n\right)\varphi^m_{m-1/2-2n}(x)+\int_0^\infty\tau\operatorname{th}\pi\tau\,\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{m}{2}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{m}{2}-\frac{i\tau}{2}\right)\times$$

$$\left.\times\,\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\varphi^m_{i\tau}(x)\,d\tau\right\}$$

$$0\leqslant x<\infty,\qquad s>{}^1\!/_2,\qquad m=0,1,2,\ldots \tag{4.1}$$

Другим примером использования доказанных теорем, представляющим интерес для приложений, является вывод разложения потенциала точечного источника по собственным функциям краевой гармонической задачи для однополостного гиперболоида вращения. Здесь не приводится окончательного результата вычислений, ввиду несколько громоздкого вида полученной формулы.

Поступила 12 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. W e y l H. Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen. Nachr. Königl. Gesellschaft Wissenschaften Göttingen, 1910.
2. Т и т ч м а р ш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Л е б е д е в Н. Н., С к а л ь с к а я И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, стр. 252.
4. Л е б е д е в Н. Н., С к а л ь с к а я И. П. Некоторые краевые задачи математической физики и теории упругости для однополостного гиперболоида вращения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, стр. 889.
5. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.