Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ПО ФУНКЦИИ ГРИНА МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

В. Л. Инденбом, С. С. Орлов

(Москва)

Для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, заданных в нечетномерном пространстве, указан метод построения тензора Грина (обычного или обобщенного) по тензору Грина для гиперплоскости. Приложение метода к задачам теории поля в анизотропных средах показано на примере основных задач классической теории упругости, теории внутренних напряжений, теории дислокаций.

§ 1. Как известно, по n-мерной скалярной или тензорной функции Грина $G(\mathbf{x})$ методом спуска можно построить функцию Грина $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ для любого n — 1-мерного подпространства $x_i\tau_i = 0$ ортогонального вектору $\boldsymbol{\tau}$. В неограниченном пространстве

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}s)\, \tau ds \qquad (1.1)$$

где τ — длина вектора $\boldsymbol{\tau}$. Как функция первого аргумента $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ является функцией не n-мерного вектора $\mathbf{x}$, а n — 1-мерного вектора $\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}\boldsymbol{\tau})\tau^{-2}$.

Покажем, что для широкого класса уравнений, заданных в неограниченном пространстве нечетной размерности, возможно решение обратной задачи.

§ 2. *Лемма.* Пусть в n-мерном пространстве задана функция, удовлетворяющая условию

$$G(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^{-k} \operatorname{sign}\alpha\, G(\mathbf{x}) \qquad (2.1)$$

где k — натуральное число. Тогда $G(\mathbf{x})$ отыскивается по функции $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$, определяемой формулой (1.1), при помощи соотношений

$$G(\boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{2\tau} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) \qquad (k = 1) \qquad (2.2)$$

$$G(\tau) = \frac{(-1)^{k-1}}{2(k-2)!} D^{k-1} \frac{\Phi(\mathbf{x}, \tau)}{\tau} \qquad (k \geqslant 2) \qquad D = x_j \partial(\ldots) / \partial\tau_j \qquad (2.3)$$

Доказательство. 2.1°. Если $k = 1$, интеграл (1.1) логарифмически расходится, и определение функции $\Phi(\mathbf{x}, \tau)$ требует известных уточнений, однако градиент этой функции определяется однозначно

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \Phi_{,i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{,i}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}s)\, \tau\, ds \qquad (2.4)$$

Умножим (2.4) на x_i и используем теорему Эйлера для однородных функций

$$x_i \Phi_{,i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}s)\, \tau\, ds + \int\limits_{-\infty}^{\infty} s\tau_i G_{,i}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}s)\, \tau\, ds$$

Замечая, что

$$\tau_i G_{,i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s) = -\frac{d}{ds} G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)$$

и выполняя интегрирование по частям правой части последнего равенства, получим

$$x_i \Phi_{,i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = -s\tau G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\Big|_{s=-\infty}^{s=\infty} = -2\tau G(\boldsymbol{\tau})$$

2.2°. В случае $k \geqslant 2$ действуя оператором D на обе части равенства

$$\frac{\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{\tau} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\, ds \tag{2.5}$$

и используя теорему Эйлера, имеем

$$D\frac{\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{\tau} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} s x_i G_{,i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\, ds = k\int\limits_{-\infty}^{\infty} sG(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\, ds - \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2\tau_i G_{,i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\, ds$$

После интегрирования по частям получим

$$D\frac{\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{\tau} = (k-2)\int\limits_{-\infty}^{\infty} sG(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\, ds + s^2 G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\Big|_{s=-\infty}^{s=\infty}$$

Отсюда

$$D\frac{\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{\tau} = -2G(\boldsymbol{\tau}) \quad (k=2); \quad D\frac{\Phi(x, \boldsymbol{\tau})}{\tau} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k-2)\, sG(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\, ds \quad (k>2)$$

Легко видеть, что действуя на обе части равенства (2.5) оператором D^{k-2}, получим

$$D^{k-2}\frac{\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{\tau} = (k-2)!\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^{k-2} G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\, ds$$

Тогда

$$D^{k-1}\frac{\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{\tau} = (k-2)!\, s^k G(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\Big|_{s=-\infty}^{s=\infty}$$

Учитывая (2.1), получаем формулу (2.4).

§ 3. Найдем условия приложимости леммы § 2 к тензорам Грина. Для сокращения обозначений будем использовать греческие буквы для индексов, пробегающих n^l значений, и обозначать одним таким индексом компоненты тензоров ранга l. (Как и прежде, латинский алфавит используется для индексов, пробегающих n значений.)

Пусть в n-мерном неограниченном пространстве задан линейный однородный дифференциальный оператор m-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta p_1 \ldots p_m} \nabla_{p_1} \ldots \nabla_{p_m}$$

Рассмотрим уравнение

$$L_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x}) + f_\alpha(\mathbf{x}) = 0 \tag{3.1}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для нечетномерных пространств тензор Грина системы (3.1) или его производные могут быть построены по тензору Грина для гиперплоскостей с помощью соотношений типа (2.2) — (2.3).

Доказательство. Будем предполагать, что существует тензор Грина $G_{\beta\gamma}(\mathbf{x})$, удовлетворяющий уравнению

$$L_{\alpha\beta}G_{\beta\gamma}(\mathbf{x})+\delta_{\alpha\gamma}\delta(\mathbf{x})=0 \tag{3.2}$$

Замечая, что

$$G_{\beta\gamma}(\alpha\mathbf{x})=\alpha^{m-n}(\operatorname{sign}\alpha)^m G_{\beta\gamma}(\mathbf{x})$$

и обозначая $n-m=k$, имеем

$$G_{\beta\gamma}(\alpha\mathbf{x})=\begin{cases}\alpha^{-k}G_{\beta\gamma}(\mathbf{x}), & \text{если } n \text{ четное} \quad (3.3)\\ \alpha^{-k}\operatorname{sign}\alpha G_{\beta\gamma}(\mathbf{x}) & \text{если } n \text{ нечетное} \quad (3.4)\end{cases}$$

Если $k\leqslant 0$, рассмотрим производные тензора Грина

$$G_{\beta\gamma,\, p_1,\ldots,p_{1-k}}(\alpha\mathbf{x})=\begin{cases}\alpha^{-1}G_{\beta\gamma,\, p_1,\ldots,p_{1-k}}(\mathbf{x}), & \text{если } n \text{ четное} \quad (3.5)\\ \alpha^{-1}\operatorname{sing}\alpha G_{\beta\gamma,\, p_1,\ldots,p_{1-k}}(\mathbf{x}), & \text{если } n \text{ нечетное} \quad (3.6)\end{cases}$$

Решение задачи для гиперплоскости $x_i\tau_i=0$ достигается с помощью тензора Грина $\Phi_{\beta\gamma}(\mathbf{x},\boldsymbol{\tau})$, определяемого системой уравнений

$$L_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma}(\mathbf{x},\boldsymbol{\tau})+\delta_{\alpha\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\,\tau ds \tag{3.7}$$

Если $k\geqslant 1$, то

$$\Phi_{\beta\gamma}(\mathbf{x},\boldsymbol{\tau})=\int_{-\infty}^{\infty}G_{\beta\gamma}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\,\tau\, ds \tag{3.8}$$

Если $k\leqslant 0$, определим производные тензора Грина

$$\Phi_{\alpha\beta,\, p_1,\ldots,p_{1-k}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\tau})=\int_{-\infty}^{\infty}G_{\alpha\beta,\, p_1,\ldots,p_{1-k}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\,\tau\, ds \tag{3.9}$$

Сопоставляя соотношения (3.4), (3.6), (3.8), (3.9) с условиями леммы, убеждаемся в справедливости теоремы.

§ 4. Пусть теперь поле ψ не может быть построено с помощью точечных источников, т. е. система (3.1) не допускает построения обычного тензора Грина (3.2) и существует лишь обобщенный тензор Грина $G_{\alpha q_1\ldots q_r}(\mathbf{x})$ соответствующий некоторому неточечному элементарному источнику поля ψ (см. например, [1]). Для подпространства $x_k\tau_k=0$ обобщенный тензор Грина $\Phi_\alpha(\mathbf{x},\boldsymbol{\tau})$ благодаря проектированию на направление τ имеет меньший ранг, чем тензор $G_{\alpha q_1\ldots q_r}(\mathbf{x})$

$$\Phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\tau})=\tau_{q_1}\ldots\tau_{q_r}\tau^{1-r}\int_{-\infty}^{\infty}G_{q_1\ldots q_r}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\,ds \tag{4.1}$$

(индексы, не участвующие в свертке, опущены). К (4.1) лемма § 2 не применима, однако, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Если обобщенный тензор Грина $G_{\alpha q_1\ldots q_r}$, связанный с обобщенными тензорами Грина для гиперплоскостей $x_i\tau_i=0$ соотношениями (4.1), может быть представлен в форме

$$G_{\alpha q_1\ldots q_r}=e_{q_1p_1}^{t_1h_1}\ldots e_{q_rp_r}^{t_rh_r}x_{p_1}\ldots x_{p_r}G'_{\alpha t_1\ldots t_r h_1\ldots h_r} \tag{4.2}$$

где $e_{pq}^{ij}=\delta_p{}^i\delta_q{}^j-\delta_q{}^i\delta_p{}^j$, а G' удовлетворяет условиям (2.1), то

$$G_{\alpha q_1\ldots q_r}(\boldsymbol{\tau})=\frac{(-1)^{k+r-1}}{2r!\,(k-2)!}\frac{\partial^r}{\partial x_{q_1}\ldots\partial x_{q_r}}D^{k-1}\frac{\Phi_\alpha(\mathbf{x},\boldsymbol{\tau})}{\tau^{1-r}} \tag{4.3}$$

Доказательство. Подставим (4.3) в (4.2) и подействуем на обе части равенства оператором D^{k-1}. Оператор обращает в нуль любую функцию бивектора

$$y^{ij} \equiv e^{ij}_{pq}\tau_p x_q$$

Поэтому

$$D^{k-1}\frac{\Phi_\alpha(\mathrm{x}, \tau)}{\tau^{1-r}} = y^{p_1q_1}\ldots y^{p_rq_r}D^{k-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G'_{\alpha p_1\ldots p_r q_1\ldots q_r}(\mathrm{x}-\tau s)\,ds$$

Отсюда, применяя лемму, получим

$$\frac{(-1)^{k-1}}{2(k-2)!}D^{k-1}\frac{\Phi_\alpha(\mathrm{x}, \tau)}{\tau^{1-r}} = y^{p_1q_1}\ldots y^{p_rq_r}G'_{\alpha p_1\ldots p_r q_1\ldots q_r}(\tau) \tag{4.4}$$

Здесь в правой части r-кратная свертка тензора G′ с бивектором y^{ij} будет полином степени r от вектора x, поэтому применение к обеим частям равенства (4.4) оператора $\partial^r(\ldots)/\partial x_{q_1}\ldots\partial x_{q_r}$ дает искомую формулу (4.3).

§ 5. В качестве приложения метода рассмотрим типичные трехмерные задачи теории упругости анизотропных сред и сведем их к исследованию плоских задач, допускающих использование методов теории функций комплексного переменного. Различные типы источников, фигурирующих в классической теории упругости (потенциальные поля, обычные функции Грина), теории дислокаций (вихревые поля, обобщенные функции Грина) и теории внутренних напряжений (потенциальные и бивихревые поля, соответственно, обычные и обобщенные функции Грина в зависимости от способа задания источников), позволяют дать примеры различных случаев приложения доказанных выше теорем. Классификация источников, терминология и основные уравнения даются по [2,3].

5.1.° Тензор Грина для сосредоточенной силы. В анизотропной среде, характеризуемой упругими модулями C_{ijkl}, поле смещений u_i для единичной сосредоточенной силы описывается тензором Грина G_{ij}, удовлетворяющим уравнению

$$C_{ijkl}G_{lm,lj}(\mathrm{x}) + \delta_{im}\delta(\mathrm{x}) = 0 \tag{5.1}$$

Как известно [4], решение системы (5.1) лишь в частных случаях может быть найдено в явном виде. В двухмерном случае для плоскости $x_i\tau_i = 0$ поле смещений описывается тензором Грина $\Phi_{ij}(\mathrm{x}, \tau)$, удовлетворяющим уравнению

$$C_{ijkl}\Phi_{km,lj}(\mathrm{x}, \tau) + \delta_{im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathrm{x}-\tau s)\,\tau ds$$

Согласно теореме 1

$$G_{ij}(\tau) = -\frac{1}{2\tau}x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi_{ij}(\mathrm{x}, \tau) \tag{5.2}$$

5.2°. Тензор Грина для собственных деформаций. Если источниками напряжений являются не внешние силы, а собственные деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ какого-либо происхождения (например, термоупругие, стрикционные, пластические и т. д.), поле смещений удовлетворяет уравнениям

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = -C_{ijkl}\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl,j} \tag{5.3}$$

Системе (5.3) соответствует тензор Грина

$$G_{ijk} = \sigma^k_{ij} = C_{ijlm}G_{lk,m} \tag{5.4}$$

Здесь σ^k_{ij} — ij-компонента поля напряжений, вызванного единичной силой, действующей [2,3,5] в направлении k, а G_{lk} — тензор Грина для сосредоточенной силы.

В двумерном случае

$$\Phi_{ijk} = C_{ijlm}\Phi_{lk,m} \tag{5.5}$$

Согласно теореме 1

$$\sigma^k_{ij}(\tau) = -\frac{1}{2}x_l\frac{\partial}{\partial\tau_l}\frac{\Phi_{ijk}(\mathrm{x}, \tau)}{\tau} \tag{5.6}$$

т. е.

$$u_k(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\tau_l \frac{\partial}{\partial x_l}\int \Phi_{ijk}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{X})\, \varepsilon_{ij}{}^\circ(\mathbf{x}')\frac{(d\mathbf{x}')}{R} \qquad (\mathbf{X} = \mathbf{x}-\mathbf{x}',\ R = |\mathbf{X}|)$$

Для упругих деформаций (5.7)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) - \varepsilon_{ij}{}^\circ = \int\left\{\frac{1}{2}[\sigma^i_{mn,j}(\mathbf{X}) + \sigma^j_{mn,i}(\mathbf{X})] - \delta_{in}\delta_{jm}\delta(\mathbf{X})\right\}\overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}(\mathbf{x}')(d\mathbf{x}')$$

учитывая, что показатель однородности функции $\sigma^k_{ij,l}(\mathbf{x})$ и $\delta(\mathbf{x})$ равен — 3, по теореме 1 получаем

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\tau_m\tau_n\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n}\int E^{ik}_{jl}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{X})\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{jl}(\mathbf{x}')\frac{(d\mathbf{x}')}{R} \tag{5.8}$$

где $E^{ik}_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ — двухмерный тензор Грина, описывающий поле упругих деформаций $\varepsilon_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \overset{\circ}{\varepsilon}_{il}E^{ik}_{il}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ для элементарного источника плоского поля

$$\varepsilon_{ij}{}^\circ(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}{}^\circ\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\,\boldsymbol{\tau}\,ds \tag{5.9}$$

5.3°. Тензор Грина для собственных дисторсий. Если задан несимметричный тензор собственных дисторсий $\overset{\circ}{u}_{ij}$, тензором Грина, определяющим поля смещений u_k, снова служит тензор σ^k_{ij}. В отличие от случая § 5.2° по u_k может быть построен не только тензор упругих деформаций (5.7), но и несимметричный тензор упругих дисторсий

$$u_{ik} = u_{k,i} - \overset{\circ}{u}_{ik} = \int[\sigma^k_{mn,i}(\mathbf{X})\,\overset{\circ}{u}_{nm}(\mathbf{x}') - \delta(\mathbf{X})\,\overset{\circ}{u}_{ik}(\mathbf{x}')]\,(d\mathbf{x}') =$$

$$= \int[\sigma^k_{mn,i}(\mathbf{X})\,\overset{\circ}{u}_{nm}(\mathbf{x}') + X_j\delta_{,i}(\mathbf{X})\,\overset{\circ}{u}_{jk}(\mathbf{x}')]\,(d\mathbf{x}') =$$

$$= \int[\sigma^k_{mn,i}(\mathbf{X})\,\overset{\circ}{u}_{nm}(\mathbf{x}') + X_j\sigma^k_{mn,in}(\mathbf{X})\,\overset{\circ}{u}_{jm}(\mathbf{x}')]\,(d\mathbf{x}') = \int[\sigma^k_{mn,i}(\mathbf{X})\,X_j\overset{\circ}{u}_{jm,n}(\mathbf{x}')]\,(d\mathbf{x}')$$

5.4°. Тензор Грина для дислокаций. Считается известным источник вихревого типа тензор плотности дислокаций

$$\alpha_{ij} = -e_{ikl}u_{lj,k} = e_{ikl}\overset{\circ}{u}_{lj,k} \tag{5.10}$$

Воспользуемся тем, что

$$\int[X_j\sigma^k_{mn,i}(\mathbf{X})\,\overset{\circ}{u}_{nm,j}(\mathbf{x}')]\,(d\mathbf{x}') = 0$$

в этом легко убедиться, интегрируя по частям и учитывая, что показатель однородности функции $\sigma^k{}_{mn,i}$ равен —3) и преобразуем (5.9) к виду

$$u_{ik} = \int X_j\sigma^k_{mn,i}\,[\overset{\circ}{u}_{jm,n}(\mathbf{x}') - \overset{\circ}{u}_{nm,j}(\mathbf{x}')]\,(d\mathbf{x}') = \int\sigma^k_{mn,i}(\mathbf{X})\,e_{njl}X_j\alpha_{lm}(\mathbf{x}')\,(d\mathbf{x}') \tag{5.11}$$

соответствующему (4.2). Элементарный источник плоского поля (прямолинейная дислокация) описывается выражением

$$\alpha_{ij}(\mathbf{x}) = \tau_i b_j\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\,ds \tag{5.12}$$

соответствующем формуле (4.1). Для упругой дисторсии, вызываемой прямолинейной дислокацией, с вектором Бюргерса $\mathbf{b}$:

$$u_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}) = b_m u^m_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$$

из (5.11) следует

$$u^m_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = e_{njl}x_j\tau_l\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^k_{mn,i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}s)\,ds \tag{5.13}$$

Отсюда по теореме 2 обобщенный тензор Грина

$$e_{njl}\tau_j\sigma^k_{mn,i}(\tau) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_l}\left[x_j x_n \frac{\partial^2}{\partial\tau_j\partial\tau_n} u^m_{ik}(\mathrm{x}, \tau)\right]$$

и поле дисторсий, вызываемых заданным распределением дислокаций, следующим образом выражается через поле дисторсий (5.13) прямолинейных дислокаций

$$u_{ik}(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j}\left[\delta_{lq}\tau_j + \delta_{jq}\tau_l + \tau_l\tau_j\frac{\partial}{\partial\tau_q}\right]\int u^m_{ik}(\tau, \mathrm{X})\,\alpha_{qm}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{5.14}$$

5.5°. Тензор Грина для несовместности деформаций. Пусть задан тензор несовместности деформаций — источник бивихревого типа

$$\eta_{ij} = -e_{ikm}e_{jlm}\varepsilon_{mn,kl} = e_{ikm}e_{jln}\overset{\circ}{\varepsilon}_{mn,kl} \tag{5.15}$$

Исходя из выражения (5.7) для поля упругих деформаций, порождаемого заданным распределением собственных деформаций, и поступая по аналогии с выводом обобщенного тензора Грина для дислокаций, получаем

$$\varepsilon_{ij,k}(\mathrm{x}) = \frac{1}{4}e_{mps}e_{nqt}\int X_p X_q\,[\sigma^i_{mn,jk}(\mathrm{X}) + \sigma^j_{mn,ik}(\mathrm{X})]\,\eta_{st}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{5.16}$$

Элементарным источником плоского поля служит

$$\eta_{ij} = \tau_i\tau_j\tau^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathrm{x} - \tau s)\,ds \tag{5.17}$$

По теореме 2 имеем

$$\varepsilon_{ij,k}(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8}\frac{\partial^2}{\partial\tau_s\partial\tau_t}\tau_m\tau_n\tau_l\frac{\partial^3}{\partial x_m\partial x_n\partial x_l}\int R\varepsilon_{ij,k}(\tau, \mathrm{X})\,\eta_{st}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{5.18}$$

Дифференцирование выражений (5.16) и (5.18) по x_k дает лапласиан упругих деформаций, по которому поле ε_{ij} может быть построено при помощи известной функции Грина уравнения Пуассона.

§ 6. Тензоры Грина, рассмотренные в § 5, могут быть построены более рационально и единообразно, если исходить не из классического тензора Грина теории упругости $G_{ij}(\mathrm{x})$, а из тензора

$$G_{ijkl}(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi}G_{ijmn}\int R_{,pplm}G_{kn}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{6.1}$$

построение которого по методу [3] будет не более сложным, чем построение тензора G_{ij}. Так как $G_{ijkl}(\alpha, \mathrm{x}) = |\alpha|^{-1}G_{ijkl}\,\mathrm{x}$, то по теореме 1

$$G_{ijkl}(\tau) = -\frac{1}{2\tau}x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\Phi_{ijkl}(\mathrm{x}, \tau) \tag{6.2}$$

где $\Phi_{ijkl}(\mathrm{x}, \tau)$ — двумерный аналог тензора $G_{ijkl}(\mathrm{x})$. Из (6.1) следует формула

$$C_{ijmn}G_{kn,m} = G_{ijkl,l} \tag{6.3}$$

позволяющая выразить тензоры Грина, в пп. 5.2°—5.4° через тензор G_{ijkl}

$$u_k(\mathrm{x}) = -\int G_{ijkl,l}(\mathrm{X})\,\varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{6.4}$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}\int[G_{mnij,kk} + G_{mnji,kk}]\overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') - \varepsilon_{ij}^{\circ} \tag{6.5}$$

$$u_{ik}(\mathrm{x}) = -\int G_{mnki;pp}e_{njl}X_j\alpha_{lm}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{6.6}$$

и получить в явной форме для задачи (5.5°) тензоры Грина для упругих деформаций

$$\varepsilon_{ij}(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}e_{mkp}\int[e_{njq}G_{mnik} + e_{niq}G_{mnjk}]\,\eta_{pq}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{6.7}$$

и внутренних напряжений

$$\sigma_{ij}(\mathrm{x}) = -C_{ijkl}e_{mtp}e_{neq}\int G_{mnkt}\eta_{pq}(\mathrm{x}')\,(d\mathrm{x}') \tag{6.8}$$

Отметим, в частности, что при помощи тензора G_{ijkl} можно построить поле смещений одиночной дислокационной петли (аналог формулы Бюргерса для анизотропной среды)

$$u_i = \frac{b_i}{4\pi}\,\Omega + e_{ljm} b_k \oint_C G_{klij}(\mathbf{X})\, dx_m' \tag{6.9}$$

§ 7. Полученные результаты допускают простую геометрическую интерпретацию. Сравнение действий источников по различным направлениям в анизотропной среде провести не удается. Поэтому используя закон подобия (2.1) для источников, действующих вдоль одного и того же направления, заменим заданное распределение источников другим распределением, эквивалентным по воздействию на рассматриваемую точку. Тогда построение n-мерной функции Грина $G(\mathbf{x})$ по n — 1-мерной функции Грина $\Phi(\mathbf{x}, \tau)$ основано на замене линейного источника постоянной мощности, соответствующего функции $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$, другим линейным источником, расположенным уже не вдоль оси $\boldsymbol{\tau}$, а вдоль $\mathbf{x}$ и обладающим переменной мощностью, распределенной вдоль источника по закону $s^{k-2}\operatorname{sign} s$.

Действительно,

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau} s)\, \tau ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s^k \operatorname{sign} s\, G\left(\frac{x}{s} - \boldsymbol{\tau}\right) \tau ds = - \int_{-\infty}^{\infty} (-s')^{k-2} \operatorname{sign} s' G(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}s')\, \tau\, ds' \tag{7.1}$$

где $s' = s^{-1}$. В результате k — 1 производная поля по направлению этого источника соответствует полю точечного источника, т. е. дает функцию Грина.

На аналогичном использовании закона подобия основаны преобразования, позволившие выразить упругие дисторсии через первый момент распределения дислокаций, а градиент упругих деформаций — через второй момент распределения несовместности деформаций. Геометрический подход к анализу полей различных источников на основании соотношений подобия развивается авторами в работе [6], в работе [7] специально рассматривается приложение метода к теории дислокаций.

Поступила 14 VIII 1967

Институт кристаллографии АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кунин И. А. Внутренние напряжения в анизотропной упругой среде. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. Indenbom V. L. Internal Stress in Crystals. Theory of crystal defects. Academia. Prague, 1966.
3. Инденбом В. Л. Типы дефектов в решетке. Теория дислокаций. Физика кристаллов с дефектами. Тбилиси, 1966, т. I.
4. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упругой-анизотропной среды. ЖЭТФ, 1947, т. 17, вып. 9.
5. Майзель В. М. Температурные задачи теории упругости. Киев, Изд-во АН УССР, 1951.
6. Инденбом В. Л., Орлов С. С. Решение объемных анизотропных задач теории поля с помощью прямолинейных источников. Кристаллография, 1967, т. 12, вып. 6.
7. Инденбом В. Л., Орлов С. С. Дислокации в анизотропных средах. «Письма ЖЭТФ», 15 октября 1967 г.