Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

В. М. Александров, А. В. Белоконь
(Ростов-на-Дону)

Рассмотрен специальный класс интегральных уравнений первого рода с разностным нерегулярным ядром структуры сложной, зависящим от безразмерного параметра λ. Строится асимптотическое решение этого интегрального уравнения при малых значениях λ. При этом используется математический аппарат метода Винера — Хопфа; вводится класс специальных аппроксимаций трансформанты Фурье ядра, что позволяет произвести приближенную факторизацию и довести ту или иную конкретную задачу до получения числовых значений.

Полученные результаты использованы для изучения осесимметричных задач о взаимодействии жесткого бандажа с поверхностью упругого бесконечного цилиндра, а также о взаимодействии жесткой втулки с поверхностью бесконечной цилиндрической шахты в упругом пространстве. Решения получены в виде достаточно простых формул, асимптотически стыкующихся с соответствующими решениями работы [1]. Таким образом метод, изложенный в работе [1], и метод данной работы позволяют полностью и эффективно исследовать изучаемый класс интегральных уравнений для всего диапазона изменения параметра λ.

§ 1. Структура ядра интегрального уравнения. Структура его решения. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\tau) K\left(\frac{\tau - x}{\lambda}\right) d\tau = \pi f(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.1}$$

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(u)}{u} e^{-iut} du \qquad \left(t = \frac{\tau - x}{\lambda}\right) \tag{1.2}$$

Функция $L(u)\, u^{-1}$ предполагается четной, действительной и регулярной на вещественной оси $-\infty < u < \infty$; кроме того, предполагается

$$L(u)\, u^{-1} = A + O(u^2) \quad \text{при } u \to 0 \tag{1.3}$$

$$L(u)\, u^{-1} = |u|^{-1} [1 + c_1 |u|^{-1} + c_2 u^{-2} + O(|u|^{-3})], \quad |u| \to \infty \tag{1.4}$$

На основании указанных свойств функции $L(u)\, u^{-1}$ можно выяснить структуру ядра $K(t)$. Именно

$$K(t) = -\ln|t| + a_{20}|t| + a_{30} + F(t), \qquad 0 \leqslant t < \infty \tag{1.5}$$

$$F(t) = \frac{c_2 t^2}{2} \ln|t| - \frac{3 c_2 t^2}{4} + \int_0^\infty \frac{[uL(u) - u - c_1 - c_2 u^{-1}](\cos ut - 1) - {}^1/_2 c_2 u e^{-u} t^2}{u^2} du$$

$$a_{30} = \int_0^\infty \frac{L(u) - 1 + e^{-u}}{u} du, \qquad a_{20} = -\frac{1}{2} \pi c_1 \tag{1.6}$$

Здесь использованы формулы (2.6) работы [1]. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1.1. При всех $0 \leqslant |t| < \infty$ функция $F(t)$ вида (1.6) принадлежит к классу функций [1]

$$H_1^{\alpha}(-2/\lambda,\ 2/\lambda), \qquad 1-\varepsilon < \alpha < 1, \quad \varepsilon > 0$$

Доказательство. Найдем вторую производную функции $F(t)$ вида (1.6)

$$F''(t) = c_2 \ln|t| - \int_0^\infty \left\{\left[uL(u) - u - c_1 - \frac{c_2}{u}\right]\cos ut + \frac{c_2}{u}e^{-u}\right\} du \tag{1.7}$$

Заметим, что на основании свойств (1.3), (1.4) функции $L(u)u^{-1}$ интеграл в (1.7) равномерно сходится при всех $0 \leqslant |t| < \infty$. Отсюда следует утверждение леммы.

Приступим к изучению структуры решения интегрального уравнения (1.1). Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 1.2. Если $\gamma(t) \in H_m^{\alpha}(-1, 1)$, где $\alpha > 1/2$ при $1-\varepsilon < |t| \leqslant 1$ и $\alpha > 0$ при $0 \leqslant |t| \leqslant 1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то интеграл

$$I_1(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)} \in C_m(-1, 1), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.8}$$

Доказательство. Используя известное соотношение

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} = 0$$

представим интеграл (1.8) в виде

$$I_1(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)-\gamma(x)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\,dt \tag{1.9}$$

Продифференцируем формально равенство (1.9) m раз по x. Будем иметь

$$I_1^{(m)}(x) = m! \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)-\gamma(x)-(t-x)/1!\,\gamma'(x) - \ldots - (t-x)^m/m!\,\gamma(x)^{(m)}}{(t-x)^{m+1}\sqrt{1-t^2}}\,dt \tag{1.10}$$

Используя тождества [2]

$$\gamma(t)-\gamma(x) - \frac{(t-x)}{1!}\gamma'(x) - \ldots - \frac{(t-x)^{m-1}}{(m-1)!}\gamma(x)^{(m-1)} = \frac{1}{(m-1)!}\int_x^t (t-\tau)^{m-1}\gamma^{(m)}(\tau)\,d\tau$$

$$\frac{(t-x)^m}{m} = \int_x^t (t-\tau)^{m-1}\,d\tau$$

оценим числитель подынтегрального выражения в (1.10)

$$|\gamma(t)-\gamma(x)-(t-x)-1!\,\gamma'(x) - \ldots - (t-x)^m - m!\,\gamma^{(m)}(x)| = \tag{1.11}$$

$$= \left|\frac{(t-x)^m}{m!}[\gamma(t)^{(m)} - \gamma(x)^{(m)}] - \frac{1}{(m-1)!}\int_x^t (t-\tau)^{m-1}[\gamma^{(m)}(t)-\gamma^{(m)}(\tau)]\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{m!}(t-x)^{m+\alpha} + \frac{A}{(m-1)!}\int_x^t (t-\tau)^{m+\alpha-1}\,d\tau = B\,|t-x|^{m+\alpha}$$

[1] Определение класса функций $H_n^{\alpha}(-\beta, \beta)$ см. в работе [1].

При выводе оценки (1.11) предполагалось $t \geqslant x$, что не уменьшает общности.

Докажем теперь, что $I_1^{(m)}(x) \in C(-1, 1)$. Для этого достаточно показать, что интеграл (1.10) равномерно сходится при всех $x \in [-1,1]$, тем самым будет также обосновано дифференцирование под знаком интеграла в (1.9). Равномерная сходимость интеграла (1.10) может быть достаточно просто показана, если воспользоваться оценкой (1.11). Лемма доказана.

Следствие 1.1 Если $\gamma(t) \in H_m^{\alpha}(-1, 1)$, $\alpha > 0$, то интеграл [1]

$$I_2(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \in C_m(-1, 1), \qquad |x| \leqslant 1$$

Следствие 1.2. Если $\gamma(t) \in H_m^{\alpha}(-1+\varepsilon, 1)$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ и $\gamma(t) \in H_m^{\beta}(-1, -1+\varepsilon)$, $\beta > 1/2$, то интеграл

$$I_3(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)}{t-x}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2} dt \in C_m(-1, 1), \qquad |x| \leqslant 1$$

Аналогичное следствие имеет место для интеграла

$$I_4(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)}{t-x}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2} dt \tag{1.12}$$

Будем далее предполагать, что функция $f(x)$, стоящая в правой части интегрального уравнения (1.1), по крайней мере, принадлежит $H_1^{\beta}(-1, 1)$, $0 < \beta \leqslant 1$. Тогда имеет место следующая теорема [2].

Теорема 1.1. Если решение интегрального уравнения (1.1) в классе функций $L_p(-1, 1)$, $1+\delta > p > 1$, $\delta > 0$ существует, то при любом значении $\lambda \in (0, \infty)$ оно имеет вид $\varphi(x) = (1-x^2)^{-1/2}\omega_1(x)$, где функция $\omega_1(x) \in C(-1, 1)$.

Доказательство. Представим интегральное уравнение (1.1) с ядром вида (1.5) в форме эквивалентного ему интегрального уравнения второго рода

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left\{P - \int_{-1}^{1} \frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \int_{-1}^{1}\left[a_{20}\operatorname{sgn}(t-y) + F'\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\right]\varphi(y)\,dy\right\}, \qquad P = \int_{-1}^{1}\varphi(y)\,dy \tag{1.13}$$

при условии

$$P = \frac{1}{\ln 2\lambda + a_{30}}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\left[a_{20}\frac{|t-y|}{\lambda} + F\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\right]\varphi(y)\,dy\right\} \tag{1.14}$$

На основании допущения теоремы $\varphi(x) \in L_p(-1, 1)$, а значит тем более $\varphi(x) \in L(-1, 1)$, тогда $P < \infty$ и, принимая во внимание результат леммы 11, можно до-

[1] Формулировка этого следствия приведена в работе [3].

[2] Заметим, что теорема 1.1, по сути дела, сформулирована в работе [1], но при доказательстве были допущены некоторые неточности, которые здесь исправляются.

казать, что интеграл

$$J(t)=\int_{-1}^{1} F'\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\varphi(y)\,dy \in H_0^{\alpha}(-1,1)$$

Если теперь учесть указанные выше свойства функции $f(x)$ и следствие 1.1, то придем к выводу, что выражение

$$-\int_{-1}^{1}\frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt\int_{-1}^{1}F'\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\varphi(y)\,dy \in C(-1,1)$$

Для доказательства теоремы остается показать, что

$$I(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(t-y)\,\varphi(y)\,dy \in C(-1,1) \qquad (1.15)$$

Представим внутренний интеграл в (1.15) следующим образом:

$$N(t)=2\int_{-1}^{t}\varphi(y)\,dy-P$$

Теперь, используя неравенство Гельдера, можно доказать, что

$$N(t)\in H_0^{1/q}(-1,1),\quad 1/q+1/p=1$$

Отсюда с учетом следствия 1.1 вытекает справедливость (1.15). Теорема доказана.

Исследуем теперь возможность нахождения ограниченного на одном из краев $x=\pm 1$ линии контакта или на обоих решения интегрального уравнения (1.1).

Теорема 1.2. Если функция $f(x)\in H_1^{\alpha}(-1+\varepsilon,\ 1)$, $\alpha>0$ и $f(x)\in H_1^{\beta}(-1,\ -1+\varepsilon)$, $\beta>{}^1/_2$, решение интегрального уравнения (1.1) в классе функций $L_p(-1,1)$, $1+\delta>p>1$ существует и ограничено в ε-окрестности точки $x=-1$, то при любом значении $\lambda\in(0,\infty)$ оно имеет вид $\varphi(x)=(1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}\omega_2(x)$, причем $\omega_2(x)\in C(-1,\ 1)$ и выполняется соотношение

$$P=-\int_{-1}^{1}f'(t)\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2}dt-$$

$$-\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2}dt\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\left[a_{20}\operatorname{sgn}(\tau-t)+F'\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)\right]d\tau \qquad (1.16)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.1. При этом только необходимо воспользоваться следствием 1.2 леммы 1.2 и интегральным уравнением

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}\left\{\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t'}{1+t}\right)^{1/2}\frac{dt}{t-x}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\left[a_{20}\operatorname{sgn}(\tau-t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+F'\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)\right]d\tau+\int_{-1}^{1}\frac{f'(t)}{t-x}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2}dt\right\} \qquad (1.17)$$

которое эквивалентно интегральному уравнению (1.1) при условиях (1.14) и (1.16).

Аналогичная теорема имеет место в предположении ограниченности решения интегрального уравнения (1.1) в ε-окрестности точки $x=1$.

Теорема 1.3. Если функция $f(x) \in H_1^\alpha(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$; $f(x) \in H_1^\beta(-1,\ -1+\varepsilon)$, $\beta > {}^1/_2$; $f(x) \in H_1^\gamma(1-\varepsilon,\ 1)$, $\gamma > {}^1/_2$, решение интегрального уравнения (1.1) в классе функций $L_p(-1,\ 1)$, $1+\delta > p > 1$ существует и ограничено в ε-окрестностях точек $x = \pm 1$, то при любом $\lambda \in (0,\ \infty)$ оно имеет вид $\varphi(x) = (1-x^2)^{1/2}\,\omega_3(x)$, причем $\omega_3(x) \in C(-1,\ 1)$ и выполняются соотношения (1.18)

$$P = -\int_{-1}^{1} \frac{tf'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\left[a_{20}\operatorname{sgn}(\tau-t) + F'\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)\right]d\tau$$

$$0 = \int_{-1}^{1} \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\left[a_{20}\operatorname{sgn}(\tau-t) + F'\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)\right]d\tau$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.1. При этом только необходимо воспользоваться леммой 1.2 и интегральным уравнением

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\left[a_{20}\operatorname{sgn}(\tau-t) + F'\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right)\right]d\tau + \int_{-1}^{1}\frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}\right\}$$

которое эквивалентно интегральному уравнению (1.1) при условиях (1.14) и (1.18).

§ 2. Метод малых λ. Устойчивость решения интегрального уравнения (1.1). Построение класса возможных аппроксимаций его ядра. При сделанных предположениях относительно функции $f(x)$ она допускает разложение в ряд Фурье, тогда в силу линейности интегрального уравнения (1.1) достаточно научиться решать интегральное уравнение следующего частного вида:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_\eta(\tau)\,K\left(\frac{\tau-x}{\lambda}\right)d\tau = \pi\gamma e^{i\eta x}, \qquad |x| \leqslant 1 \tag{2.1}$$

Поставим вопрос о нахождении приближенного решения интегрального уравнения (2.1) при малых значениях параметра λ. Как показано в работе [3], нулевой член асимптотики решения при малых λ может быть представлен в виде

$$\varphi_\eta(x) = \psi_+\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) + \psi_-\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) - \psi_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{2.2}$$

Здесь функции $\psi_\pm(t)$ и $\psi_0(t)$ находятся из интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty \psi_\pm(\tau)\,K(t-\tau)\,d\tau = \pi\gamma_\pm e^{\mp i\beta t}, \qquad 0 \leqslant t < \infty \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\tau)\,K(t-\tau)\,d\tau = \pi\gamma_0 e^{i\beta t}, \qquad |t| < \infty \tag{2.4}$$

$$\gamma_\pm = \gamma\lambda^{-1}e^{\pm i\eta}, \qquad \gamma_0 = \gamma\lambda^{-1}, \qquad \beta = \lambda\eta$$

Решение интегрального уравнения (2.4) может быть получено использованием теоремы о свертках для интегрального преобразования Фурье и имеет вид

$$\psi_0(t) = \gamma_0 \beta L^{-1}(\beta) e^{i\beta t} \tag{2.5}$$

Решение интегрального уравнения (2.3) может быть найдено методом Винера — Хопфа [4]. Для возможности доведения задачи до числа целесообразно, как впервые показал Койтер [5], прибегнуть к приближенной факторизации. Для этого им была предложена следующая аппроксимация трансформанты Фурье $L(u)u^{-1}$ ядра $K(t)$:

$$\frac{L^*(u)}{u} = \frac{1}{\sqrt{u^2+A^{-2}}}\frac{P_1(u)}{P_2(u)} \qquad (P_1(0)=P_2(0)=B=\mathrm{const}) \tag{2.6}$$

Здесь $P_1(u)$ и $P_2(u)$ — четные полиномы одинаковой степени. В дальнейшем в работе [6] предложена несколько более общая аппроксимация вида

$$\frac{L^*(u)}{u} = \frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+C^2}\prod_{n=1}^{N}\frac{(u^2+D_n^2)}{(u^2+E_n^2)} \qquad \left(\frac{B}{C^2}\prod_{n=1}^{N}\frac{D_n^2}{E_n^2}=A\right) \tag{2.7}$$

позволяющая получить высокую точность при небольшом номере N.

По мнению авторов заслуживает внимания также следующая, легко факторизуемая аппроксимация:

$$\frac{L^*(u)}{u} = \frac{\sqrt{u^2+C^2}}{\varkappa^2+\varkappa\sqrt{(C-iu)(D-iu)}+\varkappa\sqrt{(C+iu)(D+iu)}+\sqrt{(C^2+u^2)(D^2+u^2)}}\times$$

$$\times\prod_{n=1}^{N}\frac{(u^2+D_n^2)}{(u^2+E_n^2)}\frac{C}{(\varkappa+\sqrt{CD})^2}\prod_{n=1}^{N}\frac{D_n^2}{E_n^2}=A, \qquad \varkappa>0 \tag{2.8}$$

позволяющая в ряде случаев более точно учесть структуру функции $L(u)\,u^{-1}$ и тем самым повысить точность решения.

Легко видеть, что все аппроксимации вида (2.6) — (2.8) удовлетворяют свойству (1.3) функции $L(u)\,u^{-1}$, но при $|u|\to\infty$ их асимптотика имеет вид

$$L^*(u)\,u^{-1} = |u|^{-1}\,[1+c_2^*u^{-2}+O(u^{-4})] \tag{2.9}$$

Отсюда вытекает представление для аппроксимирующего ядра:

$$K^*(t) = -\ln|t| + a_{30}^* + F^*(t) \qquad (0\leqslant t<\infty)$$

$$F^*(t) = O(t^2\ln|t|) \quad \text{при } t\to 0 \tag{2.10}$$

Сравним формулы (1.4) — (1.6) с (2.9), (2.10). Видим, что отсутствие члена вида $|u|^{-1}$ в квадратной скобке асимптотической формулы (2.9) приводит к отсутствию члена вида $|t|$ в представлении (2.10). Таким образом некоторая неточность поведения аппроксимирующей функции $L^*(u)\,H$ при $|u|\to\infty$ приводит к тому, что функция $K^*(t)+\ln|t|$ оказывается более гладкой, чем $K(t)+\ln|t|$.

Выясним, как это может повлиять на точность асимптотического при малых λ решения интегрального уравнения (1.1). Наряду с уравнением

(1.1), (1.5), рассмотрим интегральное уравнение вида (2.11)

$$\int_{-1}^{1} \varphi_1(\tau)\left[-\ln\frac{|\tau-x|}{\lambda}+b_{20}\frac{|\tau-x|}{\lambda}+b_{30}+G\left(\frac{\tau-x}{\lambda}\right)\right]d\tau=\pi g(x),\quad |x|\leqslant 1$$

Будем предполагать, что, как и для уравнения (1.1), (1.5), функции

$$g(x)\in H_1^{\beta}(-1,\,1),\quad \beta>0;\qquad G(t)\in H_1^{\alpha}(-2/\lambda,\,2/\lambda)$$
$$1-\varepsilon<\alpha<1,\ \varepsilon>0$$

Интегральное уравнение (2.11) будем называть возмущенным по отношению к (1.1), (1.5), если выполнены следующие условия:

$$|a_{20}-b_{20}|\leqslant\varepsilon,\qquad |a_{30}-b_{30}|\leqslant\varepsilon$$
$$\|f(x)-g(x)\|_{H_1^{\alpha}(-1,1)}\leqslant\varepsilon,\qquad \|F(t)-G(t)\|_{H_1^{\alpha}(-2/\lambda,\,2/\lambda)}\leqslant\varepsilon \tag{2.12}$$

Норму в пространстве $H_1^{\alpha}(-\beta,\,\beta)$ введем следующим образом:

$$\|f(x)\|_{H_1^{\alpha}(-\beta,\beta)}=\max|f(x)|+\max|f'(x)|+$$
$$+\sup\frac{|f'(t)-f'(x)|}{|t-x|^{\alpha}}\quad (x,\,t)\in[-\beta,\,\beta] \tag{2.13}$$

Как легко показать, $H_1^{\alpha}(-\beta,\,\beta)$ — полное, линейное, нормированное пространство. Из определения нормы в $H_1^{\alpha}(-\beta,\,\beta)$ следует, что если $\|f(x)\|_{H_1^{\alpha}(-1,1)}\leqslant\varepsilon$, то

$$\|f(x)\|_{C(-1,1)}\leqslant\varepsilon,\qquad \|f'(x)\|_{C(-1,1)}\leqslant\varepsilon\leqslant|f'(t)-f'(x)|\leqslant\varepsilon|t-x|^{\alpha} \tag{2.14}$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2.1. Если решения интегрального уравнения (1.1), (1.6) и возмущенного по отношению к нему интегрального уравнения в классе функций $L_p(-1,1)$, $1+\delta>p>1$, $\delta>0$ существуют, то при любом значении $\lambda\in(0,\infty)$ справедлива следующая оценка:

$$\|\varphi(x)-\varphi_1(x)\|_{C(-1,1)}\leqslant A\varepsilon(1-x^2)^{-1/2},\qquad A=\mathrm{const} \tag{2.15}$$

Доказательство. Представим интегральное уравнение (2.11) в форме эквивалентного ему интегрального уравнения второго рода, аналогичного (1.13), (1.14). Составляя разность между полученным уравнением и уравнением (1.13), будем иметь

$$\psi(x)+\frac{1}{\pi^2(\ln 2\lambda+b_{30})}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\left[b_{20}\frac{|t-y|}{\lambda}+G\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\right]\frac{\psi(y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}}-$$
$$-\frac{1}{\pi^2\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt\int_{-1}^{1}\left[b_{20}\operatorname{sgn}(t-y)+G'\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\right]\frac{\psi(y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\gamma(x)$$

$$\gamma(x)=\frac{1}{\pi(\ln 2\lambda+b_{30})}\left\{-c_{30}P+\int_{-1}^{1}\frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\left[c_{20}\frac{|t-x|}{\lambda}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+F_1\left(\frac{t-x}{\lambda}\right)\right]\varphi(x)\,dx\right\}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_1'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt-$$
$$-\frac{1}{\pi^2\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt\int_{-1}^{1}\left[c_{20}\operatorname{sgn}(t-y)+F_1'\left(\frac{t-y}{\lambda}\right)\right]\varphi(y)\,dy \tag{2.16}$$

При составлении уравнения (2.16) разность $P - P_1$ была заменена с учетом формулы (1.14) выражением (2.17)

$$P - P_1 = \Big\{ -c_{30} P + \int_{-1}^{1} \frac{f_1'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^{1} \Big[b_{20} \frac{|t-y|}{\lambda} \times G\Big(\frac{t-y}{\lambda}\Big)\Big]$$

$$\frac{\psi(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^{1} \Big[c_{20} \frac{|t-y|}{\lambda} + F_1\Big(\frac{t-y}{\lambda}\Big)\Big] \varphi(y)\,dy \Big\} \frac{1}{\ln 2\lambda + b_{30}}$$

В формулах (2.16), (2.17) обозначено

$$(1 - x^2)^{-1/2}\, \psi(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x), \quad c_{20} = a_{20} - b_{20}, \qquad c_{30} = a_{30} - b_{30}$$

$$f_1(x) = f(x) - g(x), \qquad F_1(t) = F(t) - G(t) \tag{2.18}$$

Исследуем интегральный оператор, стоящий в левой части уравнения (2.16). Из теоремы 1.1 следует, что $\psi(x) \in C(-1, 1)$, тогда, учитывая что $G(t) \in H_1^{\alpha}(-2/\lambda, 2/\lambda)$ без труда придем к выводу, что функция от y

$$\{b_{20}\,\mathrm{sgn}\,(t-y)/\lambda + G'[(t-y)/\lambda]\}\,(1-y^2)^{-1/2}\,\psi(y) \in L(-1, 1)$$

Тогда на основании леммы (см. например [7], гл. 1, § 7) следует возможность перестановки порядка интегрирования в третьем слагаемом левой части (2.16) и тем более во втором слагаемом. Уравнение (2.16) можно переписать в виде

$$\psi(x) + \int_{-1}^{1} \psi(y)\, M(y, x)\,dy = \gamma(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{2.19}$$

где

$$M(y, x) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \Big\{ \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} \Big[b_{20}\,\mathrm{sgn}\,(t-y) + G'\Big(\frac{t-y}{\lambda}\Big)\Big] dt -$$

$$- \frac{1}{\ln 2\lambda + b_{30}} \int_{-1}^{1} \Big[b_{20} \frac{|t-y|}{\lambda} + G\Big(\frac{t-y}{\lambda}\Big)\Big] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \Big\} \tag{2.20}$$

Исследуем свойства ядра (2.20) интегрального уравнения (2.19). Очевидно второй интеграл в (2.20), как функция y принадлежит $H_1^{\alpha}(-1, 1)$, $1 - \varepsilon < \alpha < 1$. Далее, так как $G'(t) \in H_0^{\alpha}(-2/\lambda, 2/\lambda)$, то на основании следствия 1.1 интеграл как функция x

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\, G'\Big(\frac{t-y}{\lambda}\Big)\,dt \in C(-1, 1)$$

а как функция y по крайней мере ограничен. Последнее нетрудно показать. Рассмотрим наконец интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,\mathrm{sgn}\,(t-y)\,dt = 2x \arcsin y - 2\sqrt{1-y^2} +$$

$$+ \sqrt{1-x^2} \ln \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + 1 - xy}{|y-x|} \qquad (x, y) \in [-1, 1]$$

Видно, что он имеет только логарифмическую особенность при $x = y \neq \pm 1$.

Таким образом, ядро $M(y, x)$ имеет особенность при $y = \pm 1$ типа $(1 - y^2)^{-1/2}$ и при $x = y \neq \pm 1$ имеет логарифмическую особенность. При остальных сочетаниях x и y оно, по крайней мере, ограничено.

Произведем в интегральном уравнении (2.19) замену переменных вида $y = \sin\tau$, $x = \sin\theta$ получим интегральное уравнение, ядро которого имеет лишь логарифмическую особенность и, следовательно, является Фредгольмовым [8]. Тогда по лемме [9] в предположении, что уравнение (2.19) имеет единственное решение, будем иметь

$$|\psi(\sin\theta)| = |\psi(x)| \leqslant B\,|\gamma(x)|, \quad B = \text{const} \tag{2.21}$$

Оценим теперь $\gamma(x)$. Принимая во внимание (2.12), нетрудно получить, что $|\gamma(x)| \leqslant \varepsilon B_1$. Подставляя последнее в (2.21), придем к (2.15). Отметим также, что из (2.15) следует:

$$|P - P_1| \leqslant \varepsilon D_1, \quad D_1 = \text{const} \tag{2.22}$$

Теорема доказана.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.2. Если решения интегральных уравнений (1.1), (1.5) и возмущенного по отношению к нему интегрального уравнения в классе функций $L_p(-1, 1)$, $1 + \delta > p > 1$ существуют и ограничены в ε-окрестности точки $x = -1$ и для каждого из решений выполняется соотношение (1.16), то при любом значении $\lambda \in (0, \infty)$ справедлива оценка

$$\|\varphi(x) - \varphi_1(x)\|_{C(-1,1)} \leqslant \varepsilon A\,(1 - x)^{-1/2}, \qquad A = \text{const} \tag{2.23}$$

В предположении, что решение уравнений (1.1), (1.5) и возмущенного по отношению к нему ограничены в ε-окрестности точки $x = 1$, имеет место аналогичная теорема.

Теорема 2.3. Если решения интегральных уравнений (1.1), (1.5) и возмущенного по отношению к нему интегрального уравнения в классе функций $L_p(-1, 1)$, $1 + \delta > p > 1$ существуют и ограничены в ε-окрестностях точек $x = \pm 1$ и для каждого из решений выполняются соотношения (1.18), то при любом значении $\lambda \in (0, \infty)$ справедлива оценка

$$\|\varphi(x) - \varphi_1(x)\|_{C(-1,1)} \leqslant \varepsilon A, \qquad A = \text{const} \tag{2.24}$$

Таким образом, при выполнении условий (2.12) теоремы 2.1—2.3 гарантируют малое отличие приближенного решения интегрального уравнения (1.1) с аппроксимированным ядром от точного. Но, как легко видеть, функция $K^*(t) + \ln|t|$ вида (2.10), полученная на базе одной из аппроксимаций (2.6) — (2.8), вообще говоря, не удовлетворяют первому условию (2.12). Поэтому использование аппроксимаций (2.6) — (2.8) в процессе построения приближенного решения интегрального уравнения (1.1) при малых λ не дает полной уверенности в том, что это решение будет близко к точному. Действительно, числовой анализ примеров, полученных для малых λ на базе аппроксимации (2.7), показал плохое совпадение с практически точными результатами, найденными другими методами.

Итак, характер поведения функции $L(u)\,u^{-1}$ при $|u| \to \infty$ и вышеизложенные теоремы приводят к необходимости построения аппроксимаций, отличных от (2.6) — (2.8). Заметим, что функция $L(u)\,u^{-1}$ всегда может быть представлена в виде следующей суммы двух функций:

$$\begin{gathered} L(u)\,u^{-1} = L_1(u)\,u^{-1} + L_2(u)\,u^{-1} \\ L_1(u)\,u^{-1} = 0.5\,|u|^{-1}\,[L(|u|) + L(-|u|)] \\ L_2(u)\,u^{-1} = 0.5\,|u|^{-1}\,[L(|u|) - L(-|u|)] \end{gathered} \tag{2.25}$$

причем, очевидно, что при $|u| \to \infty$:

$$\begin{gathered} L_1(u)\,u^{-1} = |u|^{-1}\,[1 + c_2 u^{-2} + O(u^{-4})] \\ L_2(u)\,u^{-1} = |u|^{-1}\,[c_1 |u|^{-1} + c_3 |u|^{-3} + O(|u|^{-5})] \end{gathered}$$

Это построение сразу наталкивает на мысль, отдельно аппроксимировать функции $L_1(u)\,u^{-1}$ и $L_2(u)\,u^{-1}$. Для первой функции, очевидно, годится одна из вышеприведенных аппроксимаций (2.6) — (2.8), вторая функция может быть хорошо аппроксимирована выражением

$$\frac{L_2^*(u)}{u}=\frac{c_1}{(u^2+c^2)}\prod_{n=1}^{N}\frac{(u^2+d_n^2)}{(u^2+l_n^2)}\cdot \tag{2.26}$$

Можно поступить несколько иначе; именно, аппроксимировать сначала всю функцию $L(u)\,u^{-1}$ одним из выражений (2.6) — (2.8). Высокой точности, как показывают конкретные примеры, при этом добиться не удастся даже при достаточно большом номере N из-за того, что функции (2.6) — (2.8), как это уже отмечалось, не отражают полностью характера поведения $L(u)\,u^{-1}$. После этого разность $L(u)\,u^{-1}-L^*(u)\,u^{-1}$ аппроксимируем выражением вида (2.26). Такой подход к аппроксимации функции $L(u)\,u^{-1}$ оказывается удобным для решения интегрального уравнения Винера — Хопфа (2.3) методом последовательных приближений (§ 3); отметим, что этот метод сходится тем быстрее, чем меньше

$$\max|L(u)\,u^{-1}-L^*(u)\,u^{-1}|$$

Наконец, изложим еще третий подход к аппроксимированию функции $L(u)\,u^{-1}$; именно, аппроксимируем $L(u)\,u^{-1}$ одним из выражений (2.6) — (2.8). Затем отношение $L(u)\,/\,L^*(u)$ аппроксимируем функцией вида $\exp\,[c_1M(u)]$, где $M(u)$ — функция, аналогичная (2.6) — (2.8). Легко видеть, что сконструированная таким образом аппроксимация будет удовлетворять условиям (1.3), (1.4).

§ 3. Решение интегрального уравнения Винера — Хопфа (2.3). Опуская подробности, представим интегральное уравнение (2.3) в виде эквивалентного ему функционального уравнения [4]

$$\Phi_+(\alpha)\quad L(\alpha)\,\alpha^{-1}=F_+(\alpha)+E_-(\alpha) \tag{3.1}$$

Здесь

$$\Phi_+(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\psi_\pm(\tau)\,e^{i\alpha\tau}d\tau,\qquad F_+(\alpha)=-\frac{\gamma_\pm}{i\sqrt{2\pi}\,(\alpha\pm\beta)}$$

$$E_-(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e_\pm(\tau)\,e^{i\alpha\tau}d\tau,\qquad e_\pm(x)=2\pi\int_0^\infty\psi_\pm K(x-\tau)\,d\tau \tag{3.2}$$

$$0>x>-\infty$$

Перейдем к приближенному решению функционального уравнения (3.1). Представим $L(u)\,u^{-1}$ в виде (2.25) с учетом (2.7) и (2.28), получим

$$\Phi_+(\alpha)\quad L_1^*(\alpha)\,\alpha^{-1}+\varepsilon\,\Phi_+(\alpha)\quad L_2^*(\alpha)\,\alpha^{-1}=F_+(\alpha)+E_-(\alpha),\quad \varepsilon=1 \tag{3.2}$$

Параметр ε введен для удобства дальнейшего изложения. Учитывая, что $\max|L_2^*(u)\,u^{-1}|$ мал по сравнению с $L_1^*(u)\,u^{-1}$ (этого, как указывалось в § 2, можно добиться при соответствующем подходе к аппроксимации функции $L(u)\,u^{-1}$, будем искать решение уравнения (3.2) в виде (см., например, [4], § 4, 5)

$$\Phi_+(\alpha)=\Phi_+^{(0)}+\varepsilon\Phi_+^{(1)}+\varepsilon^2\Phi_+^{(2)}+\ldots+\varepsilon^m\Phi_+^{(m)} \tag{3.3}$$

Подставляя последнее в (3.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему функциональных уравнений

$$\Phi_+^{(0)}(\alpha)\, L_1{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1} = F_+(\alpha) + E_-(\alpha) \tag{3.4}$$

$$\Phi_+^{(i)}(\alpha)\, L_1{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1} + \Phi_+^{(i-1)}(\alpha)\, L_2{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1} = 0 \tag{3.5}$$

Учитывая, что $\varphi\eta(x)$ имеет на краях в общем случае (теорема 1.1) особенность типа $(1 - x^2)^{-1/2}$, будем, принимая во внимание (2.2), искать решение уравнения (2.3) в классе функций, удовлетворяющих условию $\psi_\pm(\tau) \to \tau^{-1/2}$ при $\tau \to 0$. Используя обычные рассуждения [4], для решения функционального уравнения (3.3), получим

$$\Phi_+^{(0)}(\alpha) = i\gamma_\pm (2\pi)^{-1/2} (\alpha \mp \beta)^{-1} [L_1{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1}]_+^{-1} [\pm L_1{}^*(\pm\beta)\,\beta^{-1}]_-^{-1}$$

$$L_1{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1} = [L_1{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1}]_+ \, [L_1{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1}]_- \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.5) и проделав элементарные преобразования, получим

$$\Phi_+^{(1)}(\alpha) = \gamma_\pm (2\pi)^{-1/2} C_+(\alpha)\, [L_1{}^*(\alpha)\,\alpha^{-1}]_+^{-1} [\pm L^*(\pm\beta)\,\beta^{-1}]_-^{-1}$$

$$C_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{1}{i(\tau \mp \beta)} \frac{L_2{}^*(\tau)}{L_1{}^*(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \alpha} \tag{3.7}$$

Если представить $(\tau^2 + B^2)^{-1/2}$ в виде

$$(\tau^2 + B^2)^{-1/2} = g_+(\tau) + g_-(\tau)$$

$$g_+(\tau) = i\pi^{-1} (\tau^2 + B^2)^{-1/2} \ln \{(iB)^{-1} [\tau + (\tau^2 + B^2)^{1/2}]\} \tag{3.8}$$

$$g_-(\tau) = -i\pi^{-1} (\tau^2 + B^2)^{-1/2} \ln \{(-iB)^{-1} [\tau + (\tau^2 + B^2)^{1/2}]\}$$

то, разбивая интеграл, входящий в (3.7), на два, в каждом из которых подынтегральная функция имеет только полюса при $\mathrm{Jm}\,\tau > c$ для одного интеграла и при $\mathrm{Jm}\,\tau < c$ для другого, легко получить выражение $C_+(\alpha)$. Далее, подставляя (3.7) в (3.6) и решая новое функциональное уравнение, найдем $\Phi_+^{(2)}(\alpha)$ и т. д. Построение следующих членов ряда (3.3) сопряжено с трудностями вычисления интегралов вида (3.7); для практических расчетов часто оказывается достаточным нахождения только $\Phi_+^{(1)}(\alpha)$.

Перейдем к построению решения уравнения (3.1), основанном на аппроксимации, описанной в § 2. Представим функцию $L(u)\,u^{-1}$ в виде

$$L(u)\,u^{-1} = \exp[c_1 M(u)]\, L^*(u)\,u^{-1}, \qquad M(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + c^2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{u^2 + a_n{}^2}{u^2 + b_n{}^2}$$

Тогда уравнение (3.1) можно записать в виде

$$\Phi_+(\alpha)\, L^*(\alpha)\alpha^{-1} \exp[c_1 M(\alpha)] = F_+(\alpha) + E_-(\alpha) \tag{3.9}$$

Решая функциональное уравнение (3.9), получим

$$\Phi_+(\alpha) = i(2\pi)^{-1/2} \gamma_\pm (\alpha \mp \beta)^{-1} [L^*(\alpha)\,\alpha^{-1}]_+^{-1} [\pm L^*(\beta)\,\beta^{-1}]_-^{-1}] \times$$
$$\times \exp\{-c_1 [M_+(\alpha + M_-(\pm\beta)]\} \tag{3.10}$$

$$M_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \frac{1}{\sqrt{u^2 + c^2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{u^2 + a_n{}^2}{u^2 + b_n{}^2} \frac{du}{u - \alpha}$$

Функцию $M_+(\alpha)$ легко вычислить, если учесть (3.8) и замечание к вычислению интеграла, входящего в (3.7). Формула (3.10) дает замкнутое решение уравнения (3.9), однако для получения $\psi_\pm(\tau)$ придется вычислять сложный контурный интеграл от $\Phi_+(\alpha)$ приближенными методами. Вычисление упрощается, если, учитывая свойства $M(u)$, описанные в конце § 2, записать (3.10) в виде

$$\Phi_+(\alpha) = i(2\pi)^{-1/2}\gamma_\pm(\alpha \mp \beta)^{-1}[L^*(\alpha)\alpha^{-1}]_+^{-1}[\pm L^*(\pm\beta)\beta^{-1}]_-^{-1} \times$$
$$\times \exp[-c_1 M_-(\pm\beta)] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_1{}^k M_+{}^k(\alpha)}{k!} \qquad (3.11)$$

Нетрудно заметить, что представление (3.11) аналогично представлению (3.3), только в отличие от последнего здесь все $\Phi_+^i(\alpha)$ уже определены.

§ 4. Примеры. Рассмотрим задачи о взаимодействии жесткого бандажа с поверхностью цилиндра (задача а) [1] и жесткого вкладыша с поверхностью цилиндрической шахты в упругом пространстве (задача б). Будем предполагать, что в области контакта силы трения отсутствуют, а вне области контакта отсутствует нагрузка. Методами операционного исчисления указанные задачи могут быть приведены к определению контактных давлений $q(z)$ из интегрального уравнения [1]

$$\int_{-1}^{1} q(a\tau) K\left(\frac{\tau - z}{\lambda}\right) d\tau = \pi\delta \qquad \left(\begin{matrix} |z| \leqslant a, \ \lambda = Ra^{-1}, \ \delta = \Delta\gamma a^{-1} \\ \Delta = {}^1/_2 E(1-\nu^2)^{-1} \end{matrix}\right)$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut\, du \qquad \left(t = \frac{\tau - z}{\lambda}\right)$$

Здесь a — полуширина бандажа или втулки, R — радиус цилиндра или шахты, γ — величина внедрения бандажа или втулки в поверхность цилиндра или шахты, $L(u)u^{-1}$ определяется по формулам (2.3) или (2.4) работы [1].

Для решения задач представим $L(u)u^{-1}$ в виде (2.25), где положим

$$\frac{L_1(u)}{u} = \frac{\sqrt{u^2+B^2}\,(u^2+D^2)}{(u^2+C^2)(u^2+E^2)}, \qquad \frac{L_2(u)}{u} = \frac{c_1 u^2(u^2+d^2)}{(u^2+C^2)(u^2+E^2)(u^2+e^2)}$$

Воспользовавшись формулами (3.6), (3.7) и (3.2), получим

$$\psi_\pm^{(0)}(t) = \delta A^{-1/2}[e^{-Bt}(\pi t)^{-1/2} + A^{-1/2}\operatorname{erf}\sqrt{Bt} - r_0 e^{-Dt}\operatorname{erf}\sqrt{(B-D)t}\,]$$

$$\psi_\pm^{(1)}(t) = c_1\delta A^{-1/2}\{-S_0(t) - r_1(D)J_0^+(D,t) + r_1(e)J_0^+(e,t) + r_3 e^{-Dt}\operatorname{erf}\sqrt{(B-D)t} +$$
$$+ r_2\int_0^t e^{-D\tau}\operatorname{erf}\sqrt{(B-D)\tau}\,K_0[B(t-\tau)]\,d\tau + r_1(-e)J_0^-(-e,t) -$$
$$- A_1 D r_0 J_1^-(-D,t) - r_0 A_1 D(B-D)^{-1/2}[S_1(t) + g_+(iD)\pi^{-1/2}t^{1/2}\exp(-Bt)]\} \qquad (4.1)$$

Здесь

$$r_0 = \frac{(C-D)(E-D)}{D\sqrt{B-D}}, \quad r_1(x) = \frac{(d-x^2)(C+x)(E+x)}{2(e^2-D^2)(D+x)\sqrt{B+x}}, \quad A_1 = \frac{d-D^2}{2(e^2-D^2)}$$

$$r_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{A_1 B r_0}{2(B-D)} - \frac{2A_2 D^2 r_0}{D^2-e^2} - A_1(C+E-2D)\right], \qquad A_2 = \frac{D-e^2}{2(e^2-D^2)}$$

$$r_3 = \frac{A_1(2D-B)r_0 g_+(iD)}{2(B-D)} - \frac{2A_2 D e r_0 g_+(ie)}{D^2-e^2} - A_1(C+E-2D)g_+(iD)$$

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^t \tau^{k-1/2}e^{-B\tau}K_0[B(t-\tau)]\,d\tau, \qquad A = \frac{BD^2}{C^2E^2} \qquad (4.2)$$

---

[1] Эта задача рассматривалась для полубесконечного бандажа в работах [10, 11] и для конечного бандажа в [12, 13], однако полное ее решение не было получено.

$$J_k^{\pm}(x, t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t e^{x\tau} \operatorname{erf} \sqrt{(B+x)\tau}\, K_0 [B(t-\tau)]\, \tau^k\, d\tau \mp g_{\pm}(ix)\, t^k e^{xi} \operatorname{erf} \sqrt{(B+x)\, t}$$

В этих формулах $K_0(x)$ — функция Макдональда, а функции $g_{\pm}(ix)$ и $\Psi_{\pm}(t)$ имеют вид

$$g_+(ix) = \pi^{-1}(B^2 - x^2)^{-1/2} \ln B^{-1}[x + (B^2 - x^2)^{1/2}] = g_-(-ix) \quad \psi_{\pm}(t) = \psi_{\pm}^{(0)}(t) + \psi_{\pm}^{(1)}(t)$$

Аппроксимируя функцию $L(u)u^{-1}$ с погрешностью, не превышающей 5% на всем интервале изменения $u \in [0, \infty)$, найдем, что для задачи а: $B = 1$, $D = 1.0354$, $C = 1.7321$, $E = 0.9640$, $c_1 = 0.4$, $d = -0.4$, $e = 1.2247$; для задачи б: $B = 1$; $D = 1.0354$, $C = 1.264$, $E = 0.9694$; $c_1 = -0.4$, $d = e = 0$

В таблице даны для сравнения некоторые значения $\varphi^*(0) = \varphi(0)\delta^{-1}$, $\varphi^*(0.5) = \varphi(0.5)\delta^{-1}$ и $f(1) = \lim [\sqrt{1 - x^2}\, \varphi(x)\delta^{-1}]$ при $x \to 1$, вычислены при $\lambda = 2$ по формулам (4.1), (4.2) и (2.2), (2.5) данной работы и по формулам (1.14) — (1.18) и (2.12), (2.13) работы [1].

		$\varphi^*(0)$	$\varphi^*(0,5)$	$f(1)$
а	(1.14)—(1.18) [1]	1.170	1.241	0.923
	(2.12) [1]	1.223	1.304	0.898
	(4.1), (4.2), (2.2), (2.5)	1.222	1.308	0.910
б	(1.14)—(1.18) [1]	0.988	1.025	0.666
	(2.13) [1]	0.931	1.018	0.697
	(4.1), (4.2), (2.2), (2.5)	0.936	1.025	0.668

Судя по приведенным данным, решение, полученное в предлагаемой работе, дает хорошие результаты при $\lambda = 2$, причем из метода решения вытекает, что полученное решение тем точнее, чем меньше λ. Следовательно, можно сделать вывод, что решение, полученное в этой работе и работе [1], позволяет полностью исследовать изучаемый класс интегральных уравнений для всего диапазона изменения параметра λ.

Поступила 4.I 1968 Ростовский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1962.
3. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
4. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Koiter W. T. Approximate solution of Winer. Hopf type integral equations with applications, part 1—3, Proc. Koninkl. Ned Akad. Wet, 1954, Bd. 57, No. 5.
6. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1963.
8. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
9. Беленький М. Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
10. Попов Г. Я. К решению контактных (смешанных) задач теории упругости для бесконечно длинного кругового цилиндра. Изв. АН АрмССР, 1964, т. 17, № 4.
11. Коган Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную обойму. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
12. Валов Г. М. Контактная задача об упругой и термоупругой осесимметричной деформации бесконечного сплошного цилиндра. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.
13. Воронин Т. А. Контактные напряжения, возникающие при тугой посадке жесткой втулки на бесконечный цилиндр. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8.