Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ТРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В. М. Кочетков

(Ленинград)

Находится фундаментальное решение нестационарного уравнения переноса в трехмерной геометрии. Это решение может служить в качестве основы для получения искомых характеристик поля в отсутствии симметрии у функции источника (решение задачи при произвольном источнике может быть определено сверткой функции источника и указанного фундаментального решения).

Заметим, что рассмотрению уравнения переноса уделяется значительное внимание в связи с задачами теоретической атмосферной оптики и гидрооптики, а также задачами диффузии нейтронов и гамма-излучения; однако подавляющая часть исследований в этом направлении ограничена изучением задач, где искомое поле (или плотность распределения частиц) обладает плоской, цилиндрической или сферической симметрией (см., например, [1-3]).

Поставленную задачу исследуем в терминах диффузии частиц в рассеивающей среде. Введем обозначения: t — время, $\boldsymbol{\omega}_0$ ($|\boldsymbol{\omega}_0| = 1$) — единичный вектор направления излученных частиц; $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\omega}$ ($|\boldsymbol{\omega}| = 1$) — пространственные и угловые аргументы искомой плотности распределения частиц $I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$; v — скорость частиц; h — сечение рассеяния; β — полное сечение взаимодействия частиц с веществом; $\gamma(\cos\alpha)$ — индикатриса рассеяния в функции косинуса угла отклонения α; Ω — поверхность единичной сферы; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; функция «скачка» $\theta(x)$ определяется условием

$$\theta(x) = 1, \quad x > 0; \quad \theta(x) = 0, \quad x < 0$$

При решении задачи примем следующие ограничения: исключается из рассмотрения зависимость всех физических параметров (величин h, β и индикатрисы рассеяния) от скорости частиц;

рассеивающая среда считается однородной, изотропной и бесконечной (отсутствие границ);

предполагается, что индикатриса рассеяния $\gamma(\cos\alpha)$ разложима в конечный ряд по полиномам Лежандра

$$\gamma(\cos\alpha) = \sum_{l=0}^{N} b_l P_l(\cos\alpha), \qquad b_0 = 1 \tag{1}$$

При этих ограничениях для определения фундаментального решения нестационарного уравнения переноса в трехмерной геометрии следует решить уравнение

$$\frac{1}{v}\frac{\partial I}{\partial t} + \omega\cdot\operatorname{grad} I + \beta I = \frac{h}{4\pi}\int_{\Omega}\gamma(\omega\cdot\omega')\, I(t,\ \mathbf{x},\ \omega')\, d\omega' + \frac{1}{v}\,\delta(t)\,\delta(\mathbf{x})\,\delta(\omega-\omega_0) \qquad (2)$$

относительно плотности распределения частиц I $(t, \mathbf{x}, \omega)$.

Учитывая простую связь между фундаментальным решением уравнения и фундаментальным решением задачи Коши для него (фундаментальное решение уравнения соответствует фундаментальному решению задачи Коши для $t > 0$, см. [4]), можем представить задачу, определенную уравнением (2), в виде однородного уравнения переноса

$$\frac{1}{v}\frac{\partial I}{\partial t} + \omega\cdot\operatorname{grad} I + \beta I = \frac{h}{4\pi}\int_{\Omega}\gamma(\omega\cdot\omega')\, I(t,\ \mathbf{x},\ \omega')\, d\omega' \qquad (3)$$

с начальным условием

$$I\,|_{t=0} = \delta(\mathbf{x})\,\delta(\omega-\omega_0) \qquad (4)$$

Для решения уравнения (3) при начальном условии (4) используем метод разложения функции δ $(\mathbf{x})$ в выражении (4) на плоские волны, позволяющий свести задачу к одномерной по пространственной координате. Как известно (см. [4]), в трехмерном пространстве

$$\delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\Omega}\delta^{(2)}(\mathbf{x}\cdot\omega')\, d\omega' \qquad (5)$$

где символ $\delta^{(2)}$ означает вторую производную одномерной δ-функции по аргументу.

Введем систему координат с центром $\mathbf{x} = 0$ и осью x, перпендикулярной плоскости $(\mathbf{x}, \omega') = 0$. Пусть направление визирования ω в этой системе координат задано полярным углом θ, отсчитываемым от положительного направления оси x, и азимутальным углом φ в плоскости $(\mathbf{x}, \omega') = 0$. Введем обозначение $\mu = \cos\theta$.

Учитывая линейность уравнения (3) и соотношение (5), рассмотрим предварительно формальный плоский источник, функция распределения частиц ψ (t, x, ω) для которого удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta\psi = \frac{h}{4\pi}\int_{\Omega}\gamma(\omega\cdot\omega')\,\psi(t,\ x,\ \omega')\, d\omega' \qquad (6)$$

с начальным условием

$$\psi\,|_{t=0} = \delta^{(2)}(x)\delta(\omega-\omega_0) = \delta^{(2)}(x)\,\delta(\mu-\mu_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0) \qquad (7)$$

Очевидно, что искомая величина I $(t, \mathbf{x}, \omega)$ при этом связана с функцией ψ $(t, x, \omega) \equiv \psi$ $(t, x, \mu, \mu_0, \varphi, \varphi_0)$ соотношением

$$I(t,\ \mathbf{x},\ \omega) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\Omega}\psi(t,\ x=\mathbf{x}\cdot\omega',\ \mu=\omega\cdot\omega',\ \mu_0=\omega_0\cdot\omega',\ \varphi,\ \varphi_0)\, d\omega' \qquad (8)$$

описывающим в соответствии с формулой (5) суперпозицию полей различным образом ориентированных плоских источников, излучающих частицы в направлении ω_0.

Вследствие сингулярного характера начального условия (7) будем искать решение уравнения (6) в классе обобщенных функций. Для краткости записи не будем вводить специальные обозначения, отличающие обобщенные функции (непрерывные линейные функционалы в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций) от обычных функций. Кроме того, для сокращения математических обозначений будем применительно к аргументам обобщенных функций использовать термин «точка» и соответствующую форму записи аргументов вместо термина «окрестность» и связанной с ним усложненной записи аргументов.

Для решения уравнения (6) используем метод разложения плотности распределения частиц по кратности рассеяния, изложенный в [5] применительно к случаю плоского изотропного источника. В соответствии с этим методом положим (9)

$$\psi(t, x, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t, x, \omega), \quad \psi_n(t, x, \omega) = \frac{e^{-\beta vt}}{(vt)^3} \frac{(hvt)^n}{n!} F_n(\eta, \omega), \quad \eta = \frac{x}{vt}$$

Функции ψ_n физически означают члены в плотности распределения частиц ψ, соответствующие частицам, испытавшим на интервале времени $[0, t]$ ровно n столкновений.

Подставляя (9) в (6), получим для неизвестных функций F_n систему рекуррентных уравнений

$$(\mu - \eta) \frac{\partial F_0}{\partial \eta} = 3F_0$$

$$(n-3) F_n + (\mu - \eta) \frac{\partial F_n}{\partial \eta} = \frac{n}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \gamma(\omega \cdot \omega') F_{n-1}(\eta, \omega') d\omega' \qquad (n \geqslant 1) \tag{10}$$

Для определения начальных условий, которым должны удовлетворять функции F_n, найдем величину F_0 и рекуррентное соотношение, связывающее F_n и F_{n-1}. Для этого используем функцию Грина $G(t, t', x, x')$ уравнения (6), где правая часть будет известной функцией источника

$$G(t, t', x, x') = e^{-\beta v(t-t')} \theta(t - t') \delta(x - x' - v(t - t')\mu) \tag{11}$$

Задавая в качестве источника начальное распределение частиц, из уравнения

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \beta \psi_0 = \frac{1}{v} \delta^{(2)}(x) \delta(t) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

получим плотность распределения частиц, прошедших без столкновений

$$\psi_0 = \delta^{(2)}(x - \mu vt) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\beta vt} \tag{12}$$

Отсюда на основании соотношения (9) получаем

$$F_0 = \delta^{(2)}(\mu - \eta) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \tag{13}$$

Задавая для $n \geqslant 1$ функцию источника в виде

$$f_n(t, x, \omega) = \frac{hv\theta(t)}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \gamma(\omega \cdot \omega') \psi_{n-1}(t, x, \omega') d\omega'$$

при помощи функции Грина (12) находим связь между ψ_n и ψ_{n-1}:

$$\psi_n(t, x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(t, t', x, x') f_n(t', x' \omega) = \tag{14}$$

$$= \frac{hv}{4\pi} e^{-\beta vt} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t')\theta(t-t') e^{\beta vt'} dt' \int_{\Omega} \gamma(\omega\cdot\omega')\psi_{n-1}(t', x - v(t-t')\mu, \omega') d\omega'$$
$$(n \geqslant 1)$$

Из формулы (14) на основании соотношения (9) получаем

$$F_n(\eta, \omega) = \frac{n}{4\pi t^{n-3}} \int_{-\infty}^{\infty}{}' t'^{n-4} \theta(t')\theta(t-t') dt' \int_{\Omega} \gamma(\omega\cdot\omega') \times$$
$$F_{n-1} \times \left(\frac{x - v(t-t')\mu}{vt'}, \omega'\right) d\omega', \quad (n \geqslant 1) \tag{15}$$

Теперь из формул (12) и (14) можно найти, что при $t \to 0$ для $n \geqslant 1$ имеем $\psi_n \to 0$. Таким образом, начальному условию (7) должна удовлетворять в соответствии с соотношением (9) величина ψ_0.

Обратимся к решению уравнений (10). Ввиду сингулярности этих уравнений их решения F_n должны находиться как линейные комбинации частных решений $F_n^{\pm}$, соответствующих обходу сингулярности при $\eta = \mu$ в верхней и нижней полуплоскости комплексной переменной η (см. [5]). Первое уравнение (10) имеет два частных линейно независимых решения

$$F_0^{\pm} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\delta(\mu - \mu_0)\delta(\varphi - \varphi_0)}{(\mu - \eta \mp i\varepsilon)^3} \tag{16}$$

Оба решения позволяют составить единственную комбинацию, удовлетворяющую условию (13)

$$F_0 = \frac{1}{\pi i}(F_0^+ - F_0^-) \tag{17}$$

Найдем вид комбинации величин $F_n^{\pm}$, определяющей функцию F_n для $n \geqslant 1$. Дальнейшее рассмотрение оказывается удобным проводить для случаев $\eta > \mu$ и $\eta < \mu$ порознь [1]. Введем обозначение $\sigma = \operatorname{sign}(\eta - \mu)$. Совершая обход сингулярности в уравнении (10), находим его два линейно независимых решения

$$F_n^{\pm}(\eta, \omega) = \frac{n}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} (\mu - \eta \mp i\varepsilon)^{n-3} \times$$
$$\times \left[\int_{a_\sigma}^{\eta} \frac{d\eta'}{(\mu - \eta' \mp i\varepsilon)^{n-2}} \int_{\Omega} \gamma(\omega\cdot\omega') F_{n-1}^{\pm}(\eta', \omega') d\omega' + c_n^{\pm}\right] \quad (n \geqslant 1) \tag{18}$$

где $c_n^{\pm}$ — постоянная интегрирования и a_σ — определенным образом выбираемый нижний предел интегрирования.

Из формулы (16) следует, что при $|\eta| \to \infty$ имеем $F_0^{\pm} = O(|\eta|^{-3})$ равномерно по $\omega \in \Omega$ и функция $F_0^{\pm}$ аналитическая по η всюду для $\eta \neq \mu$;

[1] Случай $\eta = \mu$ далее исключается из рассмотрения, так как обобщенная функция не имеет «значений» в отдельных точках (см. [4]).

таким образом, при $n=1$ в формуле (18) можно положить $a_\sigma = \sigma\cdot\infty$. Далее из формулы (18) получаем, что равномерно по $\omega \in \Omega$ при $\sigma\eta \to \infty$ имеем $F_1^\pm = O(|\eta|^{-3})$; отсюда вытекает, что допустимо принять $a_\sigma = \sigma\cdot\infty$ при $n = 2$. Используя формулу (18) необходимое число раз, находим, что для любого $n \geqslant 1$ можно принять $a_\sigma = \sigma\cdot\infty$, так как в случае $\sigma\eta \to \infty$ имеем равномерно по $\omega \in \Omega$

$$F_n^\pm = O(|\eta|^{-3}) \tag{19}$$

Заменим в (18) переменную интегрирования по формуле

$$t' = t(\mu - \eta)/(\mu - \eta')$$

получим

$$F_n^\pm(\eta, \omega) = \frac{n}{4\pi t^{n-3}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t'^{n-4}\theta(t')\,\theta(t-t')\,dt' \int\limits_{\Omega} \gamma(\omega'\cdot\omega) \times$$
$$\times F_{n-1}^\pm\left(\frac{x - v(t-t')\mu}{vt'}, \omega'\right) d\omega' + \frac{n}{4\pi} c_n^\pm \lim_{\varepsilon\to+0} (\mu - \eta \mp i\varepsilon)^{n-3} \quad (n \geqslant 1) \tag{20}$$

Сравнение формул (15) и (20) и учет соотношения (17) показывают, что в случае $c_n^\pm = 0$ функции F_n для $n \geqslant 1$ выражаются через величины $F_n^\pm$ при помощи соотношения, аналогичного (17)

$$F_n = \frac{1}{\pi i}(F_n^+ - F_n^-) \tag{21}$$

Далее будем использовать соотношения (21), предполагая, что в формулах (18) и (20) принято $c_n^\pm = 0$.

После нахождения необходимых вспомогательных соотношений возвратимся к основной задаче — определению величин $F_n^\pm$ из уравнения (10). Введем оператор дифференцирования $D = \partial(\cdots)/\partial\eta$, определяя неотрицательные степени оператора D условиями $D^0 = I$ (единичный оператор), $D^k = \partial^k(\cdots)/\partial\eta^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Кроме того, будем считать определенными операторы D^{-1} и D^{-2}, означающие, соответственно, операцию однократного и двукратного интегрирования по η в пределах от $\sigma\cdot\infty$ до η.

Совершая в уравнении (10) обход сингулярности принятым способом и действуя на обе части этого уравнения оператором D^{n-3}, находим

$$(\mu - \eta \mp i\varepsilon) D^{n-2} F_n^\pm = \frac{n}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \gamma(\omega\cdot\omega') D^{n-3} F_{n-1}^\pm(\eta, \omega')\,d\omega' \quad (n \geqslant 1) \tag{22}$$

Деля обе части равенства (22) на $(\mu - \eta \mp i\varepsilon)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, а также используя соотношение (1) и теорему сложения для полиномов Лежандра, получаем

$$D^{n-2} F_n^\pm = n \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\mu - \eta \mp i\varepsilon} \sum_{l=0}^{N} \frac{b_l}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\omega) \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega} \overline{Y}_{lm}(\omega') D^{n-3} F_{n-1}^\pm(\eta, \omega')\,d\omega' \quad (n \geqslant 1) \tag{23}$$

где функции $\overline{Y}_{lm}(\omega) = Y_{lm}(\mu, \varphi)$ представляют сферические гармоники и $\overline{Y}_{lm}(\omega)$ — комплексно-сопряженную к ним величину.

Далее будем использовать векторно-матричную запись. Через $\|\mathbf{X}\|_l$ будем обозначать l-компоненту вектора $\mathbf{X}$ и через $\|A\|_{ik}$ — элемент матрицы A, причем индексы l, i, k будем нумеровать, начиная не с единицы, а числа $|m| \leqslant N$. Введем в рассмотрение $(N - |m| + 1)$ — компонентные векторы $\mathbf{\Phi}_{m,n}^{\pm}(\eta)$ и $\mathbf{Y}_m(\omega)$ и квадратные матрицы $R_m^{\pm}(\eta)$ и B_m порядка $(N - |m| + 1)$:

$$\|\mathbf{\Phi}_{m,n}^{\pm}(\eta)\|_l = \int_\Omega \overline{Y}(\omega') D^{n-2} F_n^{\pm}(\eta, \omega') d\omega', \quad |m| \leqslant l \leqslant N, \quad n \geqslant 0 \qquad (24)$$

$$\|\mathbf{Y}_m(\omega)\|_l = Y_{ml}(\omega), \qquad |m| \leqslant l \leqslant N \qquad (25)$$

$$\|R_m^{\pm}(\eta)\|_{ik} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\Omega \frac{\overline{Y}_{im}(\omega') Y_{km}(\omega') d\omega'}{\mu' - \eta \mp i\varepsilon}, \quad |m| \leqslant i, \ k \leqslant N \qquad (26)$$

$$\|B_m\|_{ik} = \frac{b_k}{2k+1} \delta_{ik}, \quad |m| \leqslant i, \ k \leqslant N; \quad \delta_{ik} = 0 \ (i \neq k), \quad \delta_{ik} = 1 \ (i = k) \qquad (27)$$

Помножим соотношение (23) на $Y_{lm}(\omega)$ и проинтегрируем по $\omega \in \Omega$. Тогда, используя принятые обозначения, получим векторное равенство

$$\mathbf{\Phi}_{m,n}^{\pm} = n B_m R_m^{\pm} \mathbf{\Phi}_{m,n-1}^{\pm}, \qquad n \geqslant 1 \qquad (28)$$

При помощи рекуррентной формулы (28) все векторы $\mathbf{\Phi}_{m,n}^{\pm}(\eta)$ при $n \geqslant 1$ могут быть выражены через вектор $\mathbf{\Phi}_{m,0}^{\pm}(\eta)$:

$$\mathbf{\Phi}_{m,n}^{\pm} = n! (B_m R_m^{\pm})^n \mathbf{\Phi}_{m,0}^{\pm}, \qquad n \geqslant 1 \qquad (29)$$

Перепишем формулу (23) в виде

$$D^{n-2} F_n^{\pm} = n \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\mu - \eta \mp i\varepsilon} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{l=|m|}^{N} \frac{b_l}{2l+1} Y_{lm}(\omega) \|\mathbf{\Phi}_{m,n-1}^{\pm}\|_l =$$

$$= n \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\mu - \eta \mp i\varepsilon} \sum_{m=-N}^{N} B_m \mathbf{Y}_m(\omega) \cdot \mathbf{\Phi}_{m,n-1}^{\pm}, \qquad n \geqslant 1$$

Используя (28), отсюда находим (30)

$$D^{n-2} F_n^{\pm} = n! \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\mu - \eta \mp i\varepsilon} \sum_{m=-N}^{N} B_m \mathbf{Y}_m(\omega) \cdot (B_m R_m^{\pm}(\eta))^{n-1} \mathbf{\Phi}_{m,0}^{\pm}(\eta), \quad n \geqslant 1$$

Для нахождения функций $F_n^{\pm}$ из уравнения (30) необходимо при $n \geqslant 3$ определить их граничные свойства. Из сотношения (19) следует, что

$$\lim_{\sigma\eta \to \infty} \int_\Omega \gamma(\omega \cdot \omega') F_n^{\pm}(\eta, \omega') d\omega' = 0, \qquad n \geqslant 1 \qquad (31)$$

Заменяя в (10) функции F_n на величины $F_n^{\pm}$, дифференцируя получившиеся соотношения s раз по η для каждого $n \geqslant 4$ ($s = 0, 1, \ldots, n-4$) и учитывая (19) и (31), последовательно получаем

$$\lim_{\sigma\eta \to \infty} \frac{\partial^s}{\partial \eta^s} F_n^{\pm} = 0, \qquad n \geqslant 3, \quad s = 0, 1, \ldots, n-3 \qquad (32)$$

Покажем, что функции $\| R_m^{\pm}(\eta) \|_{ik}$ и $\| \Phi_{m,0}^{\pm}(\eta) \|_l$, заданные в зависимости от знакового индекса, соответственно, как предельные значения сверху и снизу на вещественной оси комплексной переменной η, могут быть аналитически продолжены на всю комплексную плоскость η с разрезом $[-1, 1]$. Из определения (26) матрицы $R_m^{\pm}(\eta)$ следует, что

$$\| R_m^{\pm} \|_{ik} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1}^{1} \frac{P(\mu)\, d\mu}{\mu - \eta \mp i\varepsilon}, \qquad \operatorname{Im} \eta = 0$$

где $P(\mu)$ — некоторый полином. Отсюда на основании общих свойств интеграла типа Коши следует, что величина $\| R_m^{\pm}(\eta) \|_{ik}$ как функция комплексной переменной η аналитична при $\eta \,\bar{\in}\, [-1, 1]$. Можно показать, что для величины $\| R_m^{\pm}(\eta) \|_{ik}$ точки $\eta = \pm 1$ являются точками ветвления. Если для произвольного комплексного η на плоскости с разрезом $[-1, 1]$ ввести матрицу $R_m(\eta)$ по формуле

$$\| R_m(\eta) \|_{ik} = \int_{\Omega} \frac{\overline{Y}_{im}(\omega') \left(Y_{km}(\omega')\right)}{\mu' - \eta}\, d\omega', \qquad |m| \leqslant i,\ k \leqslant N$$

то она будет представлять униформизованное значение матриц $R_m^{\pm}(\eta)$, определенных как предельные значения сверху и снизу на вещественной оси переменной η. Используя формулы (16) и (24) определим компоненты вектора $\Phi_{m0}^{\pm}(\eta)$:

$$\| \Phi_{m,0}^{\pm}(\eta) \|_l = \frac{1}{2} \overline{Y}_{lm}(\omega_0) \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\mu_0 - \eta \mp i\varepsilon}, \qquad \operatorname{Im} \eta = 0$$

И в этом случае можно определить униформизованное значение векторов $\Phi_{m,0}^{\pm}(\eta)$ для произвольного комплексного $\eta \neq \mu_0$:

$$\| \Phi_{m,0}(\eta) \|_l = \frac{1}{2} \overline{Y}_{lm}(\omega_0) \frac{1}{\mu_0 - \eta}$$

Так как $\mu_0 \in [-1, 1]$, то $\| \Phi_{m,0}(\eta) \|_l$ аналитично для $\eta \,\bar{\in}\, [-1, 1]$.

С учетом доказанных свойств аналитичности для величин $\| R_m(\eta) \|_{ik}$ и $\| \Phi_{m,0}(\eta) \|_l$ уравнение (30) при граничных условиях (32) и при $\operatorname{Im} \eta = 0$ имеет решение (33)

$$F_n^{\pm} = n! \lim_{\lambda \to n-3} \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \int_{C_\sigma^{\pm}} \frac{(\eta - z)^{\lambda}\, dz}{\mu - z} \sum_{m=-N}^{N} B_m \mathbf{Y}_m(\omega) \cdot \left(B_m R_m(z)\right)^{n-1} \Phi_{m,0}(z), \quad n \geqslant 1$$

где контур интегрирования $C_\sigma^{\pm}$ имеет началом точку $z = \infty$ при $\sigma > 0$ или $z = -\infty$ при $\sigma < 0$ и в зависимости от знакового индекса функции $F_n^{\pm}$ проходит, соответственно, вдоль линии $\operatorname{Im} z = \pm i\varepsilon$ в точку $z = \eta \pm i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $|\varepsilon| \to 0$.

Справедливость формулы (33) для $n \geqslant 3$ вытекает из тождества Коши вычисления n-кратной первообразной, а для $n = 1, 2$ вытекает из того, что при $\lambda \to n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ обобщенная функция $x^{\lambda} \theta(x) / \Gamma(\lambda + 1)$ эквивалентна $\delta^{(n-1)}(x)$ и обобщенная функция $x^{\lambda} \theta(-x) / \Gamma(\lambda + 1)$ эквивалентна $(-1)^{(n-1)} \delta^{(n-1)}(x)$ (см., например, [4]).

На основании формул (9), (21), (33), находится плотность распределения частиц $\psi(t, x, \omega)$ для формального плоского источника (7)

$$\psi(t, x, \omega) = \psi(t, x, \mu, \mu_0, \varphi, \varphi_0) = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \tag{34}$$

$$+ \frac{h^3 e^{-\beta vt}}{\pi i} \int\limits_C \frac{dz}{\mu - z} \sum_{m=-N}^{N} B_m \mathbf{Y}_m(\omega) \cdot (B_m R_m(z))^2 e^{hvt(\eta - z) B_m R_m(z)} \Phi_{m,0}(z)$$

В формуле (34) контур интегрирования C имеет началом и концом точки $z = x / vt$, расположенные, соответственно, на нижнем и верхнем берегах разреза $[-1, 1]$ и обходит разрез справа при $\sigma > 0$ и слева при $\sigma < 0$ (в действительности, вследствие того, что подынтегральное выражение в (34) аналитично вне указанного разреза и убывает по модулю при $|z| \to \infty$ быстрее $|z|^{-1}$, разрез для любого σ может обходиться как справа, так и слева). Для величин ψ_0, ψ_1, ψ_2, формулы (34), справедливы соотношения

$$\psi_0 = e^{-\beta vt} \delta^{(2)}(x - \mu vt)\, \delta(\mu - \mu_0)\, \delta(\varphi - \varphi_0) \tag{35}$$

$$\psi_1 = \lim_{\lambda \to -2} \frac{h e^{-\beta vt}}{\pi i (vt)^2 \Gamma(\lambda + 1)} \int\limits_C \frac{dz (\eta - z)^\lambda}{\mu - z} \sum_{m=-N}^{N} B_m \mathbf{Y}_m(\omega) \cdot \Phi_{m,0}(z) \tag{36}$$

$$\psi_2 = \lim_{\lambda \to -1} \frac{h^2 e^{-\beta vt}}{\pi i vt \Gamma(\lambda + 1)} \int\limits_C \frac{dz (\eta - z)^\lambda}{\mu - z} \sum_{m=-N}^{N} B_m \mathbf{Y}_m(\omega) \cdot B_m R_m(z) \Phi_{m,0}(z) \tag{37}$$

Искомое фундаментальное решение $I(t, \mathbf{x}, \omega)$ нестационарного уравнения переноса в трехмерной геометрии теперь получается подстановкой величины $\psi(t, x, \omega)$, заданной формулой (34) и соотношениями (34) — (37), в формулу (8).

Отметим в заключение, что представленный способ определения фундаментального решения нестационарного уравнения переноса может быть применен с незначительными видоизменениями для задач с любой пространственной размерностью. Основанием к этому служит существование известного разложения δ-функции на плоские волны в пространстве любого числа измерений (см., например, [4]).

Поступила 3 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Case K. M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. Ann. Phys., 1960, vol. 9, No. 1.
2. Sahni D. C. An application of the theory of singular integral equations to neutron flux problems in cylindrical geometry. Energia Nucleare, 1965, vol. 12, No. 11.
3. Холин С. А. Простейшее нестационарное кинетическое уравнение. Атомная энергия, 1965, т. 18, № 1.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., вып. 1, Физматгиз, 1958.
5. Холин С. А. Несколько точных решений нестационарного кинетического уравнения без учета замедления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6.