Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

НЕНЬЮТОНОВСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Строится статистическая теория системы жидкость — взвешенные частицы в предположении, что на среднее движение налагаются хаотические локальные пульсации скоростей фаз и концентрации системы. Найден критерий нарушения однородности течения такой системы, получены выражения для коэффициентов переноса, связанных с пульсационным движением, и записаны соответствующие динамические уравнения.

Известные трудности, возникающие при попытке описать движение дисперсной системы при помощи уравнений Навье — Стокса для однородной жидкости с некими эффективными коэффициентами вязкости, связаны с тем, что эти коэффициенты определяются уровнем развития локальных пульсационных движений фаз, налагающихся на среднее движение системы. Поэтому построение удовлетворительной механической модели дисперсных систем и формулировка соответствующих динамических уравнений невозможны без детального статистического анализа этих хаотических движений.

Частицы, взвешенные в вязкой среде, представляют сложную неконсервативную систему, которая одновременно обладает как свойствами плотного газа с потенциальным взаимодействием, так и особенностями системы взаимодействующих броуновских частиц. Известны два метода построения их статистической теории. Первый из них основан на представлениях о наличии в системе мелкомасштабных движений частиц, приводящих к появлению флуктуаций пористости, и крупномасштабных пульсаций групп частиц, обусловленных взаимодействием этих флуктуаций с несущим потоком [1,2]. Второй метод связан с исследованием кинетического уравнения для взвешенных частиц в предположении, что их движение, вызванное взаимодействием с дисперсионной средой, может быть моделировано случайным процессом с независимыми приращениями [3,4]. Как показано в [2], последнее предположение неверно, ибо процесс изменения случайных скоростей частиц не обладает свойством марковости. Допущение о пакетном движении частиц тоже в значительной мере условно, так как пространственный масштаб флуктуаций имеет порядок среднего расстояния между частицами в системе. Однако этот масштаб не настолько мал, чтобы была правомерна гипотеза о статистической независимости отдельных частиц, которая, аналогично известной гипотезе о молекулярном хаосе в кинетической теории газов, весьма важна для второго из указанных методов.

Ниже статистическая теория дисперсных систем рассмотрена, как и в [2], на основе корреляционной теории случайных процессов, но без какого-либо разделения пульсационного движения на крупно- и мелкомасштабную составляющие.

§ 1. Стохастические уравнения. Рассматриваем монодисперсную систему частиц радиуса a и плотности d_2, взвешенных в среде с плотностью d_1 и вязкостью μ_0. Используем двухскоростную модель, в которой фазы рассматриваются как взаимопроникающие взаимодействующие сплошные среды [5]. Уравнения сохранения массы фаз в предположении о несжимаемости частиц и дисперсионной среды имеют вид

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla[(1-\rho)\mathbf{v}] = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{w}) = 0, \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — средняя объемная концентрация диспергированной фазы, связанная со средней пористостью (порозностью) ε системы соотношением $\rho = 1 - \varepsilon$. Уравнения сохранения импульса фаз запишем в форме

$$d_1 \frac{\partial [(1-\rho)\mathbf{v}]}{\partial t} = -\nabla \Pi^{(1)} + d_1 (1-\rho)\mathbf{g} - \mathbf{F}$$

$$d_2 \frac{\partial (\rho \mathbf{w})}{\partial t} = -\nabla \Pi^{(2)} + d_2 \rho \mathbf{g} + \mathbf{F} \qquad (1.2)$$

$$\Pi^{(l)} = \Pi_0^{(l)} + \Pi^{(l)'} \quad (l = 1, 2), \qquad \Pi_0^{(1)} = p\mathbf{E} + d_1(1-\rho)(\mathbf{v} * \mathbf{v})$$

$$\Pi_0^{(2)} = d_2 \rho (\mathbf{w} * \mathbf{w})$$

Здесь p — давление в жидкой фазе, F — сила межфазового взаимодействия, отнесенная к единице объема дисперсной системы, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести, $\mathbf{E}$ — единичный тензор. Тензоры плотности потока импульса фаз $\Pi^{(l)}$ представлены в виде сумм «регулярных» и «нерегулярных» составляющих, причем последние описывают перенос импульса за счет пульсационных движений фаз и вязких взаимодействий в дисперсионной среде. Символ $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ означает диаду, образованную векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

В уравнения (1.1) и (1.2) входят «гидродинамические» параметры, получаемые путем усреднения по объемам, содержащим весьма большое число частиц. Например, если скорость j-й частицы есть $\mathbf{w}^{(j)}$, ее удельный объем в системе σ_j, а средняя скорость жидкой фазы в пределах этого объема $\mathbf{v}^{(j)}$, то для средних параметров имеем определения (1.3)

$$\rho = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_0}{\sigma_j}, \qquad \mathbf{v} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(1-\rho)V} \sum_{j=1}^{N} (\sigma_j - \sigma_0)\mathbf{v}^{(j)}, \qquad \mathbf{w} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\rho V} \sum_{j=1}^{N} \sigma_0 \mathbf{w}^{(j)}$$

где σ_0 — объем частицы.

Пренебрегая силой Бассе, для $\mathbf{F}$ примем выражение[1]

$$\mathbf{F} = -\rho \nabla p + d_1 \rho \xi \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \beta \rho K \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \qquad \beta = \frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} \qquad (1.4)$$

Здесь $\xi = \xi(\rho)$ — коэффициент присоединенной массы, $K = K(\rho)$ — функция, учитывающая отклонение силы вязкого сопротивления от стоксовой в условиях стесненного обтекания частиц. Рассматриваем величины ξ и K как некие экспериментально определяемые функции от ρ.

Считаем поля $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{w}(t, \mathbf{r})$, $\rho(t, \mathbf{r})$ и $p(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющие уравнениям (1.1), (1.2), известными. Соответствующие величины, определяемые по реальным объемам, содержащим ограниченное, хотя, возможно, и большое число частиц, отличаются от этих средних на малые флуктуации $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$, ρ' и p'. Уравнения для флуктуаций получаются после линеаризации уравнений (1.1) и (1.2). При этом нужно учитывать, что «гидродинамические» выражения для $\Pi^{(l)'}$ $(l = 1, 2)$, определяемые ниже в § 4, могут быть линеаризованы лишь в случаях, когда масштабы возмущений намного превосходят масштабы флуктуаций. При линеаризации динамических уравнений (1.2) относительно самих этих флуктуаций нужно, очевидно, явно учитывать флуктуационные силы $f^{(l)}$, действующие со стороны окружающей среды на фазы в единице объема. Предполагая,

[1] Выражение для $\mathbf{F}$ в иной форме было предложено автором в [6]; однако там не были учтены инерционные силы, возникающие при использовании ускоренных координатных систем, в связи с чем результат [6] ошибочен.

что усилия, воспринимаемые фазами, пропорциональны занятым ими долям площади поверхности этого объема, получим $\mathbf{f}^{(1)} = (1 - \rho)\mathbf{f}$, $\mathbf{f}^{(2)} = \rho\mathbf{f}$, где $\mathbf{f}$ — некоторый случайный вектор с нулевым средним.

В системе координат, где $\mathbf{w} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, из уравнений (1.1) получим уравнения для флуктуаций

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\right)\rho' + (1-\rho)\nabla\mathbf{v}' - (\nabla\rho)\mathbf{v}' - (\nabla\mathbf{v})\rho' = 0$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho\nabla\mathbf{w}' + (\nabla\rho)\mathbf{w}' + (\nabla\mathbf{w})\rho' = 0 \qquad (1.5)$$

Учитывая (1.1) и (1.4), из динамических уравнений (1.2) после линеаризации имеем уравнения (1.6)

$$d_1(1-\rho)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\right)\mathbf{v}' + (\mathbf{v}'\nabla)\mathbf{v}\right] + \rho\left(d_1\xi\frac{\partial}{\partial t} + \beta K\right)(\mathbf{v}' - \mathbf{w}') = (1-\rho)\mathbf{f}' + \mathbf{A}_1\rho'$$

$$d_2\rho\left[\frac{\partial\mathbf{w}'}{\partial t} + (\mathbf{w}'\nabla)\mathbf{w}\right] - \rho\left(d_1\xi\frac{\partial}{\partial t} + \beta K\right)(\mathbf{v}' - \mathbf{w}') = \rho\mathbf{f}' + \frac{\rho}{1-\rho}\mathbf{A}_2\rho'$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \nabla p' \qquad \mathbf{A}_1 = d_1\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\right)\mathbf{v} - d_1\frac{d(\rho\xi)}{d\rho}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - d_1\mathbf{g} - \beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u}$$

$$\frac{\rho}{1-\rho}\mathbf{A}_2 = -d_2\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + d_1\frac{d(\rho\xi)}{d\rho}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \nabla p + d_2\mathbf{g} + \beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}\mathbf{u}$$

Отметим, что в отличие от метода в [2], здесь в качестве невозмущенного решения используется не фиктивное движение, отвечающее упорядоченной решеточной модели дисперсной системы, а истинное среднее движение. В этом отношении используемый метод подобен методу Энскога в кинетической теории.

Представляя, как и в [2], все флуктуации в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса со случайными интегрирующими функциями Z с независимыми приращениями [7], из (1.5) и (1.6) получим уравнения для дифференциалов этих функций

$$[i(1-\rho)\mathbf{k} - \nabla\rho]\,d\mathbf{Z}_v = [i(\omega + \mathbf{uk}) + \nabla\mathbf{v}]\,dZ_\rho$$

$$(i\rho\mathbf{k} + \nabla\rho)\,d\mathbf{Z}_w = -(i\omega + \nabla\mathbf{w})\,dZ_\rho$$

$$d_1(1-\rho)[i(\omega + \mathbf{uk})d\mathbf{Z}_v + (d\mathbf{Z}_v\nabla)\mathbf{v}] +$$
$$+\rho(id_1\xi\omega + \beta K)(d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w) = (1-\rho)\,d\mathbf{Z}_f + \mathbf{A}_1 dZ_\rho \qquad (1.7)$$

$$d_2\rho\,[i\omega d\mathbf{Z}_w + (d\mathbf{Z}_w\nabla)\mathbf{w}] - \rho(id_1\xi\omega + \beta K)(d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w) =$$
$$= \rho\,d\mathbf{Z}_f + \rho(1-\rho)^{-1}\mathbf{A}_2 dZ_\rho$$

Здесь ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор.

§ 2. Выражения для случайных процессов. Ниже считаем, что векторные флуктуации в течении могут быть представлены в виде суперпозиций изотропных и анизотропных волн, т. е. для любого вектора $\boldsymbol{\varphi}'$ имеем

$$d\mathbf{Z}_\varphi = \mathbf{k}dZ_\varphi{}^\circ + d\mathbf{Z}_\varphi{}', \qquad \varphi = \mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{f} \qquad (2.1)$$

Флуктуации скорости жидкой фазы вторичны в том смысле, что их появление всецело обусловлено необходимостью сохранения массы при хаотических движениях частиц. Естественно полагать, что изменение числа частиц в фиксированном неподвижном объеме вызывает только изотропные флуктуации $\mathbf{v}$, а появление анизотропных движений дисперсионной среды вызвано лишь конвективным переносом флуктуаций пористости, т. е. $d\mathbf{Z}_v{}'$ обращается в нуль при $\mathbf{u} \to 0$.

Заметим, что аналогичное по существу допущение использовалось и в [1,2,4]. Тогда из первого уравнения (1.7) получим соотношения

$$dZ_v{}^\circ = U^\circ dZ_\rho, \qquad d\mathbf{Z}_v{}' = \mathbf{U}dZ_\rho$$

$$U^\circ = \frac{i\omega + \nabla \mathbf{v}}{i(1-\rho)k^2 - \mathbf{k}\nabla\rho}, \qquad U_m = \frac{iu_m k_m}{i(1-\rho)k_m - \nabla_m \rho}, \qquad \nabla_m = \frac{\partial}{\partial x_m} \tag{2.2}$$

Видно, что при $\rho \approx \text{const}$ вектор $\mathbf{U}$ совпадает с $\mathbf{u}$.

Подставляя (2.1) и (2.2) в третье уравнение (1.7), получим

$$dZ_f{}^\circ = -\rho(1-\rho)^{-1}(i\omega d_1\xi + \beta K)\, dZ_w{}^\circ + (1-\rho)^{-1}B_1 dZ_\rho$$

$$d\mathbf{Z}_f{}' = -\rho(1-\rho)^{-1}(i\omega d_1\xi + \beta K)\, d\mathbf{Z}_w{}' + (1-\rho)^{-1}\,\mathbf{C}_1 dZ_\rho$$

$$B_1 = U^\circ[i\omega d_1(1-\rho+\rho\xi) + id_1(1-\rho)\,\mathbf{uk} + \beta\rho K]$$

$$\mathbf{C}_1 = -\mathbf{A}_1 + U^\circ d_1(1-\rho)(\mathbf{k}\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{U}\,[i\omega d_1(1-\rho+\rho\xi) + {}$$
$$+\, id_1(1-\rho)\,\mathbf{uk} + \beta\rho K] + d_1(1-\rho)(\mathbf{U}\nabla)\,\mathbf{v}$$

Используя эти соотношения в четвертом уравнении (1.7), получим после вычислений выражения для $dZ_w{}^\circ$ и $d\mathbf{Z}_w{}'$ (2.3)

$$dZ_w{}^\circ = B\,[i\omega(d_2(1-\rho) + d_1\xi) + \beta K]^{-1}dZ_\rho, \qquad B = B_1 + B_2$$

$$d\mathbf{Z}_w{}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}dZ_\rho, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2, \qquad B_2 = (1-\rho)(i\omega d_1\xi + \beta K)\,U^\circ$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{A}_2 + (1-\rho)(i\omega d_1\xi + \beta K)\,\mathbf{U} - d_2(1-\rho)B\,[i\omega(d_2(1-\rho) + d_1\xi) + {}$$
$$+\,\beta K]^{-1}(\mathbf{k}\nabla)\,\mathbf{w}$$

$$\mathbf{H} = [i\omega(d_2(1-\rho) + d_1\xi) + \beta K]\,\mathbf{E} + d_2(1-\rho)\,\mathbf{W}, \qquad W_{ij} = \nabla_i w_j$$

Уравнения (2.1) — (2.3) полностью определяют искомые случайные процессы как функции случайной величины dZ_ρ и средних параметров.

Концепции сплошной среды применимы к дисперсной системе при условии, что пространственный и временной масштабы изменения средних параметров намного выше соответствующих внутренних масштабов дисперсной системы, т. е. масштабов флуктуаций. Следовательно, можно принять

$$\frac{\partial \ln\varphi}{\partial t} \sim \delta\omega, \qquad \frac{\partial \ln\varphi}{\partial r} \sim \delta k, \qquad \delta \ll 1$$

где φ — любой средний параметр течения (кроме p). Нетрудно получить уравнения системы последовательных приближений по малой δ. Легко видеть, что первое приближение, когда в уравнениях остаются члены наинизшего порядка по δ, аналогично по смыслу гидродинамическому приближению, приводящему к уравнениям Навье — Стокса, в кинетической теории, следующее второе приближение — приближению Барнетта и т. д. В этих приближениях все уравнения значительно упрощаются.

Вообще пренебрегая производными средних параметров, получим

$$dZ_v{}^\circ = \frac{\omega\xi}{(1-\rho)k^2}dZ_\rho, \quad d\mathbf{Z}_v{}' = \frac{\mathbf{u}}{1-\rho}dZ_\rho$$

$$dZ_w{}^\circ = \frac{BdZ_\rho}{i\omega(d_2(1-\rho) + d_1\xi) + \beta K}, \quad d\mathbf{Z}_w{}' = \frac{\mathbf{C}dZ_\rho}{i\omega(d_2(1-\rho) + d_1\xi) + \beta K} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\rho}\left[-\nabla p + (d_1\rho + d_2(1-\rho))\,\mathbf{g} + \beta\frac{d(\rho K)}{d\rho}\,\mathbf{u}\right] + {}$$
$$+\,\frac{\mathbf{u}}{1-\rho}[id_1(1-\rho)(\omega + \mathbf{uk}) + i\omega d_1\xi + \beta K] = \frac{\mathbf{R}}{\rho} + \frac{\mathbf{u}S}{1-\rho}, \quad B = \frac{\omega S}{(1-\rho)k^2}$$

Для вычисления различных корреляций необходимо найти спектральную плотность $\Psi_{\rho\rho}$ (ω, k) случайного процесса ρ'. Выражение для спектральной плотности этого процесса только в волновом пространстве, описывающее одновременные корреляции, получено в [2] из допущения о статистической независимости положений различных частиц в пространстве и имеет вид

$$\Phi_{\rho\rho}(k) = \frac{3\sigma_0}{8\pi^3} \frac{\rho(\rho_* - \rho)}{\rho_*} \frac{\sin kb - kb\cos kb}{(kb)^3}, \qquad b = b(N) = a\left(\frac{N}{\rho}\right)^{1/3} \quad (2.5)$$

где ρ_* — концентрация системы в состоянии плотной упаковки, а b — радиус объема, содержащего в среднем N частиц, по которому производится усреднение при определении флуктуаций. Выбор числа частиц N, т. е. характер обрыва коротковолновой части спектра флуктуаций диктуется в рассматриваемой теории малостью флуктуаций, требуемой для линеаризации в § 1. Наиболее детальное «мелкозернистое» описание структуры дисперсной системы отвечает выбору в качестве элементарного объема удельного объема одной частицы (см. обсуждение в [2]).

Введение последнего сомножителя в (2.5), зависящего от k, соответствует процедуре сглаживания коротковолновых деталей спектра, предложенной Массиньоном [8]. Вместо нее можно использовать также известную процедуру Дебая, которой отвечает спектральная плотность

$$\Phi_{\rho\rho}(k) = \frac{3\sigma_0}{8\pi^3} \frac{\rho(\rho_* - \rho)}{\rho_*} Y(k_\infty - k), \qquad k_\infty = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3} \frac{1}{b} \quad (2.6)$$

где $Y(x)$ — функция Хевисайда. Плотность типа (2.6) ранее использована в [1].

Заметим, что из-за наличия в системе жидкой фазы положения близлежащих частиц нельзя, вообще говоря, считать статистически независимыми. Однако это совершенно не существенно, если ограничиться рассмотрением флуктуаций в достаточно больших объемах ($N \gg 1$).

Динамика вырождения флуктуаций пористости, а следовательно, и спектральная плотность $\Psi_{\rho\rho}(\omega, \mathbf{k})$, зависит, конечно, от степени неравновесности системы, и именно с этим обстоятельством связаны основные трудности определения $\Psi_{\rho\rho}(\omega, \mathbf{k})$. Для их преодоления в [2] полные пульсационные движения были разложены на крупно- и мелкомасштабные составляющие, причем допускалось, что изменение флуктуаций пористости со временем управляется диффузией, обусловленной только мелкомасштабными движениями. В действительности же темпы вырождения определяются полными локальными флуктуациями всех средних параметров и должны описываться теми же уравнениями (1.5), (1.6) как решение некоторой задачи с начальными данными.

Подставляя (2.2) и (2.3) во второе уравнение (1.7), получим (2.7)

$$M(i\omega)\, dZ_\rho = 0, \qquad M(i\omega) = (i\omega + \nabla w)\, [i\omega\, (d_2\, (1 - \rho) + d_1\xi) +$$
$$+ \beta K] + (i\rho\mathbf{k} + \nabla\rho)\, \{\mathbf{k}\, B\, (i\omega) + [i\omega\, (d_2\, (1 - \rho) + d_1\xi) + \beta K]\, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}\, (i\omega)$$

Равенство $M(\lambda) = 0$ представляет собой характеристическое уравнение линейной системы (1.5), (1.6), корни которого определяют режим затухания флуктуаций в задаче с начальными данными.

На самом деле вырождение флуктуаций за счет регулярных причин, учитываемых в уравнениях, компенсируется случайным накоплением флуктуаций, которое этими уравнениями, конечно, не учитывается. Аналогичный факт хорошо известен и в кинетической теории: уравнение Больцмана, например, или следующие из него уравнения переноса описывают приближение к равновесному состоянию с максимальной энтропией в пренебрежении так называемой «областью шума», возникающей в результате локальных нарушений гипотезы о молекулярном хаосе [9]. В рассматриваемой системе такая область шума может появиться, например, за счет действия мелких возмущений внутри удельных объемов, которые в принципе не могут быть описаны регуляризованными уравнениями (1.5), (1.6). С учетом накопления флуктуаций соотношению (2.7) соответствует, таким образом, линейное стохастическое уравнение

$$M_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)dY_\rho = \Delta(t, \mathbf{k}), \qquad dY_\rho(t, \mathbf{k}) = \int e^{i\omega t}dZ_\rho(\omega, \mathbf{k}) \tag{2.8}$$

Здесь $M_0(\lambda)$ представляет полином, получаемый умножением $M(\lambda)$ на общий знаменатель величин в фигурных скобках в (2.7), $\Delta(t,\mathbf{k})$ — случайная функция от t, зависящая от $\mathbf{k}$ как от параметра, с постоянной спектральной плотностью, а интегрирование в (2.8) производится по всей области частот. Из (2.8) получим окончательно формулу

$$\Psi_{\rho\rho}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\Phi_{\rho\rho}(k)}{|M_0(i\omega)|^2}\left(\int\frac{d\omega}{|M_0(i\varphi)|^2}\right)^{-1} \tag{2.9}$$

В приближении, соответствующем (2.4), полином $M_0(i\omega)$ имеет вид

$$M_0(i\omega) = -(\omega^2 + 2a_1\omega + a_2^2) + i(2b_1\omega + b_2^2) \tag{2.10}$$

$$2a_1 = \frac{d_1}{d_0}\left(2 + \frac{\xi}{1-\rho}\right)\rho\mathbf{uk}, \qquad 2b_1 = \frac{\beta K}{(1-\rho)d_0}, \qquad a_2^2 = \frac{d_1}{d_0}\rho(\mathbf{uk})^2$$

$$b_2^2 = \frac{1}{d_0}\left(\mathbf{R} + \frac{\rho\beta K}{1-\rho}\mathbf{u}\right)\mathbf{k}, \qquad d_0 = d_2(1-\rho) + d_1\left(\rho + \frac{\xi}{1-\rho}\right)$$

$$|M_0(i\omega)|^2 = (\omega^2 + 2a_1\omega + a_2^2)^2 + (2b_1\omega + b_2^2)^2$$

Ввиду (2.4) соотношения (2.9) и (2.10) определяют также спектральные плотности всех других рассмотренных случайных процессов.

§ 3. Структура стационарных безградиентных потоков и критические флуктуации. Корреляционные функции могут быть вычислены по известным спектральным плотностям при помощи формулы [7] (3.1)

$$r_{\alpha\gamma}(t, \mathbf{r}; \tau, \xi) = \langle\alpha(t+\tau, \mathbf{r}+\xi)\gamma^*(t, \mathbf{r})\rangle = \iint e^{i(\omega\tau+\mathbf{k}\xi)}\Psi_{\alpha\gamma}(\omega, \mathbf{k})\,d\omega\,d\mathbf{k}$$

где α и γ — произвольные случайные процессы.

Рассмотрим сначала флуктуации в больших объемах ($N \gg 1$), так что при интегрировании по частотам величину $k \lesssim b^{-1}$ можно считать малым параметром. В этом случае

$$\frac{a_1}{b_1} \sim \frac{a_2}{b_1} \sim \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \ll 1 \tag{3.2}$$

и полином $|M_0(i\omega)|^2$ из (2.10) приближенно представляется в форме

$$|M_0(i\omega)|^2 \approx (\omega^2 + 4b_1^2)\left[\left(\omega + \frac{b_2^2}{2b_1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{b_2^4}{4b_1^3} + \frac{a_2^2}{b_1} - \frac{a_1b_2^2}{b_1^2}\right)^2\right]$$

Рассмотрим безградиентные стационарные течения. Ориентируем оси координат так, чтобы $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$.

Из уравнений (1.2) получим для таких течений соотношения

$$\nabla_x p = -[d_1(1-\rho) + d_2\rho]\,g, \qquad \beta K \mathbf{u} = -(1-\rho)(d_2 - d_1)\,\mathbf{g} \quad (3.3)$$

Из (2.10) после вычислений имеем выражение для $|M_0(i\omega)|^2$

$$|M_0(i\omega)|^2 \approx (\omega^2 + c_1^2)\,[(\omega + c_2k_1)^2 + c_3^2k_1^4]$$

$$c_1 = \frac{\beta K}{(1-\rho)\,d_0}, \qquad c_2 = \rho(1-\rho)\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right)u$$

$$c_3 = \frac{1-\rho}{\beta K}\left|d_0c_2^2 + \rho d_1u\left[u - \left(2 + \frac{\xi}{1-\rho}\right)c_2\right]\right|$$

Используя при интегрировании выражения (2.9) приближенное равенство $\omega^2 + c_1^2 \approx c_1^2$, получим соотношение

$$\Psi_{\rho\rho}(\omega,\ \mathbf{k}) = \frac{c_1^2c_3k_1^2\Phi_{\rho\rho}(k)}{\pi(\omega^2 + c_1^2)\,[(\omega + c_2k_1)^2 + c_3^2k_1^4]} \quad (3.4)$$

Интегрируя тензор спектральной плотности процесса $\mathbf{v}'$, вычисляемый из (2.4), и используя любое из выражений (2.5), (2.6), а также (3.4), получим приближенное выражение для корреляционного тензора $\langle v_i'v_j'\rangle$

$$\theta_{ij}^{(1)} = r_{vi,\,j}(t,\ \mathbf{r};\ 0,\ 0) = \langle v_i'v_j'\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2\frac{\rho_* - \rho}{\rho_*}\,[\Phi_1(\rho,\ \varkappa)\,\delta_{ij} + (1 + 2\Phi_1(\rho,\ \varkappa))\,\delta_{i1}\delta_{j1}]\,u^2$$

$$\Phi_1(\rho,\ \varkappa) = \frac{\rho}{15}\left|\rho(1-\rho)^2\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right)^2 + \frac{\varkappa}{1-\rho+\varkappa(\rho + (1-\rho)^{-1}\xi)}\,\times\right.$$
$$\left.\times\left[1 - \left(2 + \frac{\xi}{1-\rho}\right)\rho(1-\rho)\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right)\right]\right|, \qquad \varkappa = \frac{d_1}{d_2} \quad (3.5)$$

Совершенно аналогично для тензора $\langle w_i'w_j'\rangle$ в прежнем приближении получим представление

$$\theta_{ij}^{(2)} = r_{wi,\,j}(t,\ \mathbf{r};\ 0,\ 0) = \langle w_i'w_j'\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2\frac{\rho_* - \rho}{\rho_*}\,[\Phi_2(\rho,\ \varkappa)\,\delta_{ij} + (\Phi_0(\rho) + 2\Phi_2(\rho,\ \varkappa))\,\delta_{i1}\delta_{j1}]\,u^2$$

$$\Phi_0(\rho) = (1-\rho)^2\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right)^2, \qquad \Phi_2(\rho,\ \varkappa) = \left\{(1-\rho)^2 + \right.$$
$$\left. + \varkappa[\rho(1-\rho) + \xi] + \varkappa^2\frac{(1-\rho+\xi)^2}{1-\rho+\varkappa\xi}\right\}\frac{\Phi_1(\rho,\ \varkappa)}{(1-\rho)(2-\rho) + \varkappa[\rho(1-\rho) + 2\xi]} \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) видно, что продольные пульсации обеих фаз значительно интенсивнее поперечных. При больших N вычисленные квадратичные флуктуации пропорциональны N^{-1}, так что положения отдельных частиц на самом деле можно считать статистически независимыми и использовать формулы (2.5) и (2.6). Кроме того, отмеченная зависимость квадратичных флуктуаций от N позволяет обосновать определения средних параметров (1.3). Например, при больших N для потоков фаз имеем

$$Q_1 = (1-\rho)\,\mathbf{v} - \langle\rho'\mathbf{v}'\rangle \approx (1-\rho)\,\mathbf{v}, \qquad Q_2 = \rho\mathbf{w} + \langle\rho'\mathbf{w}'\rangle \approx \rho\mathbf{w}$$

Будем теперь уменьшать N, т. е. интересоваться все более детальными локальными свойствами дисперсной системы. Рассмотрим два предельных случая, когда, во-первых, неравенства (3.2) сохраняются при увеличении

k вплоть до $k_m = \max\{k\} \sim a^{-1}\rho^{1/3}$, что соответствует наиболее мелкозернистому описанию флуктуаций, а во-вторых, неравенства (3.2) нарушаются при некотором $k - k_0$ причем при $k = k_m$ имеет место обратное неравенство, когда $b_2 \gg b_1$, a_1, a_2. Из (2.10) легко видеть, что первый случай характерен для взвесей сравнительно мелких и легких частиц в капельных жидкостях с высокими плотностью и вязкостью, а второй — для взвесей крупных тяжелых частиц в газе. В первом случае в выражениях для тензоров $\theta^{(l)}$ $(l = 1, 2)$ появляются дополнительные слагаемые, пропорциональные высшим отрицательным степеням N, что свидетельствует о наличии в системе отрицательных корреляционных связей. Во втором случае имеем приближенно при $k \gg k_0$ соотношения, заменяющие (3.4),

$$|M_0(i\omega)|^2 \approx \omega^4 + b_2{}^4, \qquad \Psi_{\rho\rho}(\omega, \mathbf{k}) \approx \frac{\sqrt{2}b_2{}^3}{\pi}\frac{\Phi_{\rho\rho}(k)}{\omega^4 + b_2{}^4} \tag{3.7}$$

В этом случае имеем, например, для $\theta_{ji}^{(1)}$, используя для простоты функцию $\Phi_{\rho\rho}(k)$ в форме (2.6),

$$\theta_{ij}{}^{(1)} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2 \frac{\rho_* - \rho}{\rho_*}\left[\frac{1}{N}u^2\delta_{i1}\delta_{j1} + \left(\frac{3\pi}{2N}\right)^{2/3}\Psi_0(\rho, \varkappa)\, ag\,(\delta_{ij} + \delta_{i1}\delta_{j1})\right] \tag{3.8}$$

$$\Psi_0(\rho, \varkappa) = \frac{1}{8\pi}\frac{\rho^{2/3}(1-\rho)(1-\varkappa)}{1-\rho+\varkappa[\rho+(1-\rho)^{-1}\xi]}\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right)$$

Как и в (3.8), в выражениях для других корреляционных функций в этом случае появляются слагаемые, пропорциональные $N^{-2/3}$, что указывает на наличие в системе положительных корреляционных связей. В обоих случаях, таким образом, отдельные частицы и элементы жидкости в их удельных объемах оказываются статистически зависимыми, а формулы (2.5) и (2.6) — несправедливыми. В этом отношении рассматриваемая система подобна классическим системам с дальнодействием (газ заряженных частиц с кулоновским взаимодействием, обычный газ в критической области и т. п.). Характеристики случайных движений фаз, относимых к сравнительно небольшим элементарным объемам (например, к удельному объему), в рамках теории, основанной на соотношениях (2.5), (2.6), могут быть вычислены лишь приближенно, из аппроксимации выражений типа (3.5), (3.6) на малые N.

Метод статистического анализа дисперсных систем, основанный на исследовании кинетического уравнения для одночастичной (унарной) функции распределения, при наличии статистической связи между соседними частицами в принципе ставится под сомнение. Действительно, случайные силы взаимодействия частиц с жидкой фазой, которые должны входить в такое уравнение, представляют собой функционалы не только от унарной, но и от бинарной и следующих многочастичных функций распределения. Несколько неожиданно, что это особенно существенно в применении к газовзвесям крупных частиц, к которым указанный метод в основном и применялся ранее [4].

Ясно, что в системах с отрицательными корреляционными связями масштабы флуктуаций малы («однородные» системы). Наоборот, в системах с положительными корреляционными связями («неоднородные» системы) флуктуации отличаются большими масштабами и могут, в принципе, повести к реализации пакетного движения частиц и образованию крупных агрегатов и пузырей, заполненных дисперсионной средой и практически не содержащих частиц. Возможно, что именно такие критические флуктуации ответственны за наблюдаемую смену однородного режима псевдоожижения неоднородным [10] подобно тому, как критические флуктуации в газах ответственны за возникновение макроскопических объемов конденсированной фазы и связанных с этим явлений — критической опалесценции и т. п. [11,12]. Сравнивая b_2 и $2b_1$ и используя соотношения (2.10) и (3.3) при $k_1 \sim \rho^{1/3} a^{-1}$, получим условие реализации неоднородного режима в форме

$$
\begin{gathered}
(AL(\rho,\ \varkappa))^{1/2} \gtrsim 1, \qquad A = \frac{8a^3 g}{\nu_0^2}\left(\frac{1}{\varkappa} - 1\right), \qquad \nu_0 = \frac{\mu_0}{d_1} \\
L(\rho,\ \varkappa) = \frac{1}{160}\left(\frac{1-\rho}{\varkappa} + \rho + \frac{\xi}{1-\rho}\right)\frac{\rho^{4/3}(1-\rho)^3}{K^2(\rho)}\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d \ln K}{d\rho}\right)
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

Здесь A — критерий Архимеда. Определяющая роль значения A для установления однородного или неоднородного режима псевдоожижения неоднократно подчеркивалась ранее из эмпирических соображений. Например, в [13] возникновение пузырей во взвешенном слое ставится в соответствие параметру, имеющему тот же смысл, что и A. В целом условие (3.9) находится в хорошем соответствии с многочисленными экспериментами по нарушению однородного режима и замене его неоднородным (см. обзор в [10]). Если (3.9) выполняется, то те же соображения позволяют оценить «равновесный» линейный размер l неоднородностей в системе. Имеем

$$
l \sim AL\ (\rho,\ \varkappa)\ a \tag{3.10}
$$

Исследование критических флуктуаций в неоднородном режиме может быть, по-видимому, проведено при помощи введения некоторой функции, описывающей коэффициент корреляции между пористостями в неперекрывающихся объемах и отличной от δ-функции, что приведет к видоизменению выражений (2.5) и (2.6) для $\Phi_{\rho\rho}(k)$. Такого типа подход был успешно использован Орнштейном и Цернике при анализе флуктуаций газов в критической области [11].

Подчеркнем, что формулы (3.5) — (3.10) относятся к стационарным безградиентным потокам. Соответствующие соотношения для общего случая получаются тем же путем, но чисто вычислительные трудности оказываются весьма значительными. Удобнее, по-видимому, отдельно проводить вычисления для дисперсных потоков различных типов.

§ 4. **Динамические уравнения**. Для окончательной формулировки механической модели нужно получить явные выражения для тензоров плотности потока импульса в (1.2), а также для коэффициентов переноса в обеих фазах. Строгие выражения для этих величин могут быть получены лишь из рассмотрения цепочки уравнений для частичных функций распределения, в настоящее время неизвестной. Здесь ограничимся феноменологическим подходом к проблеме. В частности, полагаем, что при малых градиентах тензоры $\Pi^{(i)\prime}$ из (1.2) могут быть записаны в виде, обычном для однородной анизотропной жидкости. Имеем тогда

$$
\begin{gathered}
\Pi^{(1)\prime} = \mathbf{P}^{(1)} - (\eta^{(1)} + \mu\mathbf{E})\,[2\Gamma^{(1)} - {}^2/_3(\nabla \mathbf{v})\,\mathbf{E}] - \zeta^{(1)}(\nabla \mathbf{v}) \\
\Pi^{(2)\prime} = \mathbf{P}^{(2)} - \eta^{(2)}\,[2\Gamma^{(2)} - {}^2/_3(\nabla \mathbf{w})\,\mathbf{E}] - \zeta^{(2)}(\nabla \mathbf{w})
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

Здесь $\mathbf{P}^{(l)}$, $\eta^{(l)}$, $\zeta^{(l)}$ $(l = 1,2)$ — тензоры давления (плотности потока обратимого переноса импульса), сдвиговой и объемной вязкости жидкой и диспергированной фаз, обусловленные их пульсационными движениями, $\mu = \mu(\rho)$ — эффективная вязкость жидкости, фильтрующейся через упорядоченную решетку неподвижных частиц. Вязкость μ пропорциональна μ_0, возрастает с увеличением ρ, причем при малых ρ имеем приближенно $\mu \approx \mu_0 (1 + {}^5/_2\, \rho)$ (см., например, [14]).

Для жидкой фазы по аналогии с турбулентностью в однородной жидкости имеем приближенные соотношения [7]

$$\mathbf{P}^{(1)} \approx (1-\rho) d_1 \Theta^{(1)}, \qquad \eta^{(1)} \approx (1-\rho) d_1 \mathbf{D}^{(1)}, \qquad \zeta^{(1)} \approx 0 \tag{4.2}$$

$$\mathbf{D}^{(1)} \approx \frac{1}{2} \int_0^\infty \{\mathbf{R}_v(t,\ \mathbf{r};\ \tau,\ \tau\mathbf{u}) + \mathbf{R}_v^*(t,\ \mathbf{r};\ \tau,\ \tau\mathbf{u})\} d\tau$$

$$\Theta^{(1)} = \mathbf{R}_v(t,\ \mathbf{r};\ 0,\ 0) = \lim_{N \to 1} \theta^{(1)} = \lim_{N \to 1} \mathbf{r}_v(t,\ \mathbf{r};\ 0,\ 0)$$

Входящие сюда тензоры $\Theta^{(1)}$, $\mathbf{R}_v$ относятся к жидкости в удельном объеме единственной частицы и получаются из величин, определяемых для элемента объема, содержащего N частиц ($N \gg 1$), как указано в § 3. Молекулярная диффузия, а также смешение молей жидкости в результате ее движения по искривленным каналам между частицами в решетке не учитываются в (4.2).

В зависимости от соотношения между средним временем T пробега частицей средней длины свободного пробега λ и временем T_0 релаксации частицы к условиям взвешивающего потока можно различать два предельных режима течения [1]. В первом, «псевдотурбулентном», режиме имеем $T \sim \lambda \langle |w^{(j)}|^2 \rangle^{-1/2} \gg T_0 = nm\, (\beta K)^{-1}$, $m = \sigma_0 d_2$, $n = \rho / \sigma_0$, так что столкновения между частицами не играют ощутимой роли в процессах локального обмена массой и импульсом. Во втором, «псевдогазовом», режиме $T \ll T_0$ и перенос в диспергированной фазе осуществляется преимущественно в результате столкновений. При $\rho \ll 1$ длина $\lambda \approx \lambda_0$, где λ_0 — классическая длина свободного пробега; при $\rho \lesssim \rho_*$ величину λ можно оценить как разность между радиусами удельных объемов в исследуемом состоянии и в состоянии плотной упаковки. Имеем

$$\lambda \approx a\, (\rho\rho_*)^{-1/3} (\rho_*^{1/3} - \rho^{1/3}) \sim \rho_* - \rho$$

Величина $\langle |w^{(j)}|^2 \rangle$, как следует из § 3, пропорциональна $\rho_* - \rho$, а T_0 при $\rho \to \rho_*$ стремится к отличной от нуля величине. Поэтому псевдогазовый режим имеет место для произвольной дисперсной системы, если только она достаточно концентрирована. При $\rho \to 0$ время $T \to \infty$, так что и псевдотурбулентный режим может быть осуществлен в любой достаточно разбавленной системе.

Для псевдотурбулентного режима тоже очевидна аналогия между переносом в системе взвешенных частиц и переносом, осуществляемым турбулентными пульсациями в однородной среде.

Как и для жидкой фазы, имеем приближенные соотношения [7]

$$\mathbf{P}^{(2)} \approx \rho d_2 \Theta^{(2)}, \quad \eta^{(2)} \approx \rho d_2 \mathbf{D}^{(2)}, \quad \zeta^{(2)} \approx 0$$

$$\mathbf{D}^{(2)} \approx \frac{1}{2} \int_0^\infty \{\mathbf{R}_w(t, \mathbf{r}; \tau, 0) + \mathbf{R}_w{}^*(t, \mathbf{r}; \tau, 0)\} d\tau \tag{4.3}$$

В псевдогазовом режиме течения имеется определенная аналогия между взвешенными частицами и газом жестких сфер, использованная в [1,4]. В этом случае тензор $\mathbf{P}^{(2)}$ и коэффициенты переноса можно приближенно оценить из известных результатов кинетической теории плотных газов, домножая величины, следующие из элементарной теории, на некоторые функции от ρ. Используя, как и в [1], результаты теории Энскога для плотных газов, получим приближенные соотношения

$$\mathbf{P}^{(2)} \approx \rho d_2 (1 + Y(\rho)) \Theta^{(2)}, \quad \eta^{(2)} \approx 4\rho\eta^\circ [Y^{-1}(\rho) + 0.8 + 0.76 Y(\rho)]$$

$$\zeta^{(2)} \approx 4\rho\eta^\circ Y(\rho), \qquad \mathbf{D}^{(2)} \approx 4\rho \mathbf{D}^\circ Y^{-1}(\rho), \qquad Y(\rho) = 4\rho\chi(\rho) \tag{4.4}$$

$$\eta^\circ = \rho d_2 \mathbf{D}^\circ, \qquad D_{ij}{}^\circ = 2\lambda_0 (\Theta_{ij}{}^{(2)})^{1/2}, \qquad \lambda_0 = (4\sqrt{2}\pi a^2 n)^{-1}, \qquad n = \rho\sigma_0{}^{-1}$$

Функция $\chi(\rho)$ показывает, во сколько раз возрастает частота бинарных столкновений (заметим, что в системе сфер с δ-образным взаимодействием все столкновения бинарные) в концентрированной системе по сравнению с бесконечно разбавленной. Как известно, частота столкновений с ростом ρ увеличивается за счет уменьшения свободного объема, в котором могут перемещаться центры сфер, и уменьшается в результате экранирования каждой частицы соседними. При $\rho \ll 1$ справедливо выражение для $\chi(\rho)$, подсчитанное Энскогом и использованное в теории дисперсных систем в [4],

$$\chi(\rho) \approx (1 - {}^{11}/_2\, \rho)(1 - 8\rho)^{-1}, \quad \rho \ll 1$$

В работе [1] использовалось представление для $\chi(\rho)$, получаемое из приближенной «геометрической» теории плотных газов и приводящее к удовлетворительным результатам при $\rho > 0.10 - 0.15$

$$\chi(\rho) \approx \frac{1}{4\rho} \frac{(\rho/\rho_*)^{1/3}}{1 - (\rho/\rho_*)^{1/3}} = \frac{1}{4\rho^{2/3}(\rho_*^{1/3} - \rho^{1/3})} \sim \frac{1}{\rho_* - \rho}$$

Появление функции $\chi(\rho)$ в выражении для $\mathbf{P}^{(2)}$ в (4.4) связано с мгновенностью передачи импульса в материале частиц.

Таким образом, в общем случае реологические характеристики дисперсных систем сильно зависят от типа ее движения и представляют весьма сложные функции средних параметров течения и их производных по координатам и времени. При $\rho \to 0$ все величины в (4.2) и (4.3) убывают как ρ^α, где $\alpha > 0$. При $\rho \to \rho_*$ компоненты тензора $\mathbf{P}^{(2)}$ стремятся к значениям, отличным от нуля и бесконечности, ибо $\Theta^{(2)} \sim \rho_* - \rho$, но $\chi(\rho) \sim (\rho_* - \rho)^{-1}$, компоненты $\mathbf{D}^{(2)}$ обращаются в нуль как $(\rho_* - \rho)^{3/2}$, а $\eta^{(2)}$ и $\zeta^{(2)}$ — в бесконечность как $(\rho_* - \rho)^{-1/2}$. Различные компоненты двух последних тензоров, рассматриваемые как функции от ρ, могут иметь и, как правило, имеют максимум и минимум при значениях ρ, близких к ρ_*. Такого типа зависимости вязкости от ρ неоднократно наблюдались экспериментально для плотных дисперсных систем (см., например, [15]).

Интерес представляет вопрос о возможности формулировки единственного уравнения сохранения импульса для дисперсоида в целом.

Из (1.2) видно, что это можно сделать в двух случаях: 1) для частиц, взвешенных в газе, когда можно пренебречь инерцией и пульсациями газа, выразив $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$ из первого уравнения (1.2) через ρ, ∇p и $\mathbf{w}$ и подставив их в (1.1) и второе уравнение (1.2); 2) для почти равноплотных суспензий, когда можно принять $\mathbf{u} \approx 0$ и просуммировать уравнения (1.2). В обоих случаях имеем три уравнения — одно сохранения импульса дисперсоида и два сохранения массы фаз — для трех неизвестных — $\mathbf{w}$, ρ и p. Заметим, что граничные условия в этих случаях приобретают несколько нетрадиционный вид; в частности, в них входит градиент давления жидкой фазы.

Из изложенного ясно, что дисперсные системы представляют собой существенно неньютоновские среды. Их реологические характеристики представляют весьма сложные функции от средних параметров течения, что приводит к появлению дополнительных нелинейностей в динамических уравнениях (1.2). Более того, реологические характеристики одной и той же дисперсной системы могут быть существенно различными в зависимости от типа движения, совершаемого этой системой.

Поступила 4 I 1968

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А. Приближенная статистическая теория взвешенного слоя. ПМТФ, 1966, № 6.
2. Буевич Ю. А. К статистической механике частиц, взвешенных в потоке газа. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
3. Houghton G. Particle and Fluid Diffusion in Homogeneous Fluidization. Ind. Engng. Fundamentals, 1966, vol. 5, No. 2.
4. Мясников В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
5. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.
6. Буевич Ю. А. О сопротивлении движению частицы, взвешенной в турбулизованной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, часть 2. М., «Наука», 1967.
8. Massignon D. Méchanique statistique des fluides. Paris, Dunod, 1957.
9. Huang Kerson Statistical Mechanics. N.— Y.— London, John Wiley, 1963. (Рус. пер.: Хуанг Керзон. Статистическая механика. М., «Мир», 1966).
10. Davidson J. F., Harrison D. Fluidised Particles. Cambridge Univ. Press. 1963. (Рус. пер.: Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдоожижение твердых частиц. М., «Химия», 1965).
11. Леонтович М. А. Статистическая физика. М.— Л., Гостехиздат, 1944.
12. Einstein A. Theorie der Opaleszenz von homogenen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Zustandes. Ann. d. Physik., 1910, Bd. 33, S. 1275—1298.
13. Jackson R. The Mechanics of Fluidised Beds. Part 1. The Stability of the State of Uniform Fluidization. Part 2. The Motion of Fully Developed Bubbles. Trans. Inst. Chem. Engrs., 1963, vol. 41, No. 1.
14. Буевич Ю. А., Сафрай В. М. Вязкость жидкой фазы в дисперсных системах. ПМТФ, 1967, № 2.
15. Shuster W. W., Haas F. C. Point Viscosity Measurements in a Fluidized Bed. J. Chem. Engng. Data, 1960, vol. 5, No. 4.