Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА, ПРИМЫКАЮЩИХ К ОБЛАСТИ ПОКОЯ

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Исследуются некоторые пространственные течения в окрестности характеристической поверхности, распространяющейся по однородному покоящемуся политропному газу.

Течения, возникающие в окрестности характеристической поверхности произвольной формы, распространяющейся по покоящемуся газу, изучались для плоских задач в [1]. При этом рассматривался случай, когда характеристическая поверхностью отделяющая область возмущенного течения от области покоя, является поверхностью слабого разрыва основных газодинамических величин.

Ниже, кроме случая слабого разрыва, рассматривается и случай, когда характеристическая поверхность будет поверхностью сильного разрыва, соответствующий распространению нормальных детонационных волн (на фронте волны выполняется условие Чепмена — Жуге).

Для построения решений используется класс пространственных потенциальных двойных волн, уравнения которых были впервые получены в [2]. Использование двойных волн приводит к' тому, что удается рассмотреть лишь случай, когда характеристическая поверхность будет развертывающейся поверхностью (S) в любой момент времени t в физическом пространстве x_1, x_2, x_3 (ясно, что плоский случай получается при этом полностью, без каких-либо ограничений на форму поверхности).

Для заданной характеристической поверхности можно, вообще говоря, построить бесчисленное множество течений в ее окрестности. Выясняется вопрос, как течения типа двойной волны вкладываются в класс произвольных достаточно гладких решений, соответствующих данной характеристической поверхности. Для этого выводится и решается уравнение переноса для скачков нормальных производных основных функций, справедливое вдоль любой бихарактеристики, лежащей на характеристической поверхности. Показано, что для достаточно больших моментов времени течение в окрестности произвольной характеристической поверхности (S) можно приближенно считать двойной волной.

Этот результат справедлив как для поверхности слабого разрыва (S), так и в случае течения за нормальными детонационными волнами.

1. Уравнения пространственных двойных волн запишем в плоскости годографа скоростей u_1, u_2 в виде [2,3]

$$R_{11}\Psi_{22} - 2R_{12}\Psi_{12} + R_{22}\Psi_{11} = 0 \tag{1.1}$$

$$R_{11}(\Gamma_{22} + 1 + \Psi_2^2) - 2R_{12}(\Gamma_{12} + \Psi_1\Psi_2) + R_{22}(\Gamma_{11} + 1 + \Psi_1^2) = 0$$

$$R_{11}\mathrm{X}_{22} - 2R_{12}\mathrm{X}_{12} + R_{22}\mathrm{X}_{11} = 0$$

$$u_3 = \Psi(u_1, u_2), \quad \Gamma(u_1, u_2) = \varkappa c^2, \qquad \varkappa = 1/(\gamma - 1)$$

Здесь γ — показатель адиабаты, c — скорость звука, $\mathrm{X}(u_1, u_2)$ — функция размещения,

$$R_{ik} = -\Gamma_i\Gamma_k + \Gamma/\varkappa\,(\delta_{ik} + \Psi_i\Psi_k) \qquad (i, k = 1, 2) \tag{1.2}$$

нижние индексы у функций Ψ, Γ и X обозначают дифференцирование по u_1, u_2, δ_{ik} — символ Кронекера.

Если функции Ψ, Γ и X найдены, течение в физическом пространстве x_1, x_2, x_3 находится из соотношений

$$(\Gamma_i + u_i + \Psi\Psi_i)\, t + X_i = x_i + \Psi_i x_3 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.3}$$

Для исследования примыкания течений, описываемых системой уравнений (1.1) к области покоя ($u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) удобно в (1.1) перейти к полярным координатам r, φ ($u_1 = r\cos\varphi$, $u_2 = r\sin\varphi$). Окончательно получим

$$\Psi_{rr}\left(-\frac{\Gamma_\varphi^2}{r^2} + \frac{\Gamma}{\varkappa} + \frac{\Gamma}{\varkappa}\frac{\Psi_\varphi^2}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2}\left(\Psi_{r\varphi} - \frac{\Psi_\varphi}{r}\right)\left(\Gamma_r\Gamma_\varphi - \frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r\Psi_\varphi\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^2}(\Psi_{\varphi\varphi} + r\Psi_r)\left(-\Gamma_r^2 + \frac{\Gamma}{\varkappa} + \frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r^2\right) = 0$$

$$\Gamma_{rr}\left(-\frac{\Gamma_\varphi^2}{r^2} + \frac{\Gamma}{\varkappa} + \frac{\Gamma}{\varkappa}\frac{\Psi_\varphi^2}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2}\left(\Gamma_{r\varphi} - \frac{\Gamma_\varphi}{r}\right)\left(\Gamma_r\Gamma_\varphi - \frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r\Psi_\varphi\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^2}(\Gamma_{\varphi\varphi} + r\Gamma_r)\left(-\Gamma_r^2 + \frac{\Gamma}{\varkappa} + \frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r^2\right) - \Gamma_r^2 - \frac{\Gamma_\varphi^2}{r^2} +$$
$$+ 2\frac{\Gamma}{\varkappa}\left(1 + \Psi_r^2 + \frac{\Psi_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}(\Gamma_r\Psi_\varphi - \Gamma_\varphi\Psi_r)^2 = 0 \tag{1.4}$$

$$X_{rr}\left(-\frac{\Gamma_\varphi^2}{r^2} + \frac{\Gamma}{\varkappa} + \frac{\Gamma}{\varkappa}\frac{\Psi_\varphi^2}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2}\left(X_{r\varphi} - \frac{X_\varphi}{r}\right)\left(\Gamma_r\Gamma_\varphi - \frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r\Psi_\varphi\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^2}(X_{\varphi\varphi} + rX_r)\left(-\Gamma_r^2 + \frac{\Gamma}{\varkappa} + \frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r^2\right) = 0$$

Положим скорость звука в невозмущенном газе равной единице. В работе [4] пространственные двойные волны были использованы для построения течений за нормальными детонационными волнами и ударными волнами, имеющими постоянную интенсивность. Были поставлены краевые задачи и рассмотрены отдельные решения. Кроме результатов этой работы, при исследовании условий на линии $r = 0$ для системы (1.4), возникающих в задаче о примыкании двойной волны к области покоя, существенна следующая теорема.

Теорема. Мгновенные линии тока возмущенного течения в любой момент времени ортогональны к поверхности слабого разрыва, распространяющейся по покоящемуся газу.

В плоском случае это утверждение было доказано в [1]. Оно легко обобщается на пространственный случай с помощью кинематических условий совместности на слабом разрыве.

Воспользовавшись этой теоремой и произведя в координатах r, φ выкладки, аналогичные проведенным в [1,4] при исследовании течений за ударной волной, получим, что на линии $r = 0$ должны быть выполнены условия

$$\begin{array}{lll} \Psi = 0, & \Psi_\varphi = 0, & \Psi_r = \mu(\varphi) \\ \Gamma = \varkappa, & \Gamma_\varphi = 0, & \Gamma_r = \nu(\varphi) \\ X = 0, & X_\varphi = 0, & X_r = \lambda(\varphi) \end{array} \tag{1.5}$$

$$\nu^2(\varphi) = 1 + \mu^2(\varphi) \tag{1.6}$$

Условие (1.6) получается после перехода к пределу при $r \to 0$ в соотношении

$$\frac{|u_1(\Gamma_1 + u_1 + \Psi\Psi_1) + u_2(\Gamma_2 + u_2 + \Psi\Psi_2)|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \Psi^2}} = 1$$

полученном в [4] и соответствующем постоянству нормальной скорости распространения слабого разрыва. Уравнения движения слабого разрыва, получающиеся из (1.3) при $r = 0$, имеют вид (1.7)

$$x_1 = \lambda \cos\varphi - \lambda' \sin\varphi - (\mu\cos\varphi - \mu'\sin\varphi)\, x_3 + (\nu\cos\varphi - \nu'\sin\varphi)t$$

$$x_2 = \lambda\sin\varphi + \lambda'\cos\varphi - (\mu\sin\varphi + \mu'\cos\varphi)\, x_3 + (\nu\sin\varphi + \nu'\cos\varphi)\, t$$

Составляя условия развертываемости в пространстве $x_1,\ x_2,\ x_3$ для любого момента времени t_0 линейчатой поверхности, заданной уравнениями (1.7), при $t = t_0$ будем иметь

$$\begin{vmatrix} -\mu\cos\varphi + \mu'\sin\varphi & -(\mu\sin\varphi + \mu'\cos\varphi) & 1 \\ \sin\varphi\,(\mu'' + \mu) & -\cos\varphi\,(\mu'' + \mu) & 0 \\ -\sin\varphi\,[\lambda'' + \lambda + (\nu'' + \nu)\, t_0] & \cos\varphi\,[\lambda'' + \lambda + (\nu'' + \nu)\, t_0] & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, поверхностью слабого разрыва, за которой течение является двойной волной, может быть только развертывающаяся поверхность. Функции $\lambda(\varphi)$ и $\mu(\varphi)$ произвольны. С их помощью можно задать в какой-либо момент времени в качестве поверхности слабого разрыва любую развертывающуюся поверхность. Плоскому случаю, исследованному в [1], соответствует $\mu = 0$ и $\nu = \pm 1$.

Для дальнейшего исследования поставленных для системы (1.4) задач с начальными данными (1.5) на линии $r = 0$ будем предполагать, что функции Ψ и Γ имеют непрерывные четвертые производные, содержащие дифференцирование дважды по r и φ (независимо от порядка дифференцирования). Это предположение естественно. Такое свойство функции Ψ и Γ осуществляется в ряде конкретных течений, например (см. также [1]), в автомодельном течении, возникающем за конической нормальной детонационной волной, вызванной движением с постоянной скоростью точечного инициирующего источника. В этом течении, исследованном впервые в [5], автомодельная двойная волна через слабый разрыв примыкает к области движущегося с постоянной скоростью однородного газа.

Замечание. Ясно, что все результаты, которые формулируются для случая примыкания через слабый разрыв к области покоя, сохраняются, если рассматривать примыкание и к области постоянного движения.

Пользуясь сделанными предположениями, для Ψ и Γ можно написать представления

$$\Psi = r\mu + {}^1/_2\, r^2 \Psi_{rr}(r_\Psi,\ \varphi) \qquad (0 \leqslant r_\Psi \leqslant r)$$

$$\Gamma = \varkappa + r\nu + {}^1/_2\, r^2 \Gamma_{rr}(r_\Gamma,\ \varphi) \qquad (0 \leqslant r_\Gamma \leqslant r) \qquad (1.8)$$

Аналогичные выражения можно написать и для Ψ_r, Ψ_φ, Γ_r, Γ_φ. Используя эти представления, а также формулу (1.6), для коэффициентов системы (1.4) получим

$$-\frac{\Gamma_\varphi^2}{r^2}+\frac{\Gamma}{\varkappa}+\frac{\Gamma}{\varkappa}\frac{\Psi_\varphi^2}{r^2}=-\nu'^2+1+\mu'^2+O(r)$$

$$\Gamma_r\Gamma_\varphi-\frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r\Psi_\varphi=O(r^2) \qquad (1.9)$$

$$-\Gamma_r^2+\frac{\Gamma}{\varkappa}+\frac{\Gamma}{\varkappa}\Psi_r^2=r\left(-2\nu\Gamma_{rr}(r_\Gamma^*,\varphi)+2\mu\Psi_{rr}(r_\psi^*,\varphi)+\frac{\nu^3}{\varkappa}\right)+O(r^2)$$

$$(0\leqslant r_\Gamma^*\leqslant r,\ 0\leqslant r_\psi^*\leqslant r)$$

$$\Gamma_r\Psi_\varphi-\Gamma_\varphi\Psi_r=r(\nu\mu'-\mu\nu')+O(r^2)$$

После умножения всех уравнений системы (1.4) на r, при помощи (1.9) легко видеть, что все коэффициенты при вторых производных во вновь полученной системе непрерывны при $r=0$ и коэффициенты при вторых производных по φ порядка $O(1)$. Линия $r=0$ будет для полученной системы линией параболического вырождения, одновременно являясь характеристикой.

Система уравнений (1.4) нелинейна, а теоремы существования и единственности решения задачи с начальными данными на линии параболичности, являющейся характеристикой, известны только для некоторых линейных систем как в гиперболическом, так и в эллиптическом случаях. Целью дальнейшего являются получение в рамках сделанных предположений приближенных представлений для функций Ψ и Γ, получение упрощенного уравнения для X и исследование задач с начальными данными для этого уравнения. При помощи полученного уравнения прежде всего можно, решив его, найти приближенно функцию X. Кроме того, оно будет модельным при решении рассматриваемых задач для системы (1.4). В гиперболическом случае для него удается доказать существование решения. Тип системы (1.4) в окрестности $r=0$ совпадает с типом уравнения для X, так как коэффициенты при вторых производных во всех уравнениях (1.4) одинаковы.

Найдем приближенно Ψ и Γ. Для этого, воспользовавшись соотношениями (1.9), вытекающими из непрерывности $\Psi_{rr\varphi\varphi}$, $\Gamma_{rr\varphi\varphi}$, оценками

$$\Psi_{r\varphi}-\frac{\Psi_\varphi}{r}=O(r),\quad \Gamma_{r\varphi}-\frac{\Gamma_\varphi}{r}=O(r),\quad \frac{\Psi_{\varphi\varphi}}{r}=\mu''=O(r),\quad \frac{\Gamma_{\varphi\varphi}}{r}=\nu''+O(r)$$

из первых двух уравнений (1.4), оставляя в них слагаемые порядка $O(1)$, для $\Psi_{rr}(0,\varphi)$ и $\Gamma_{rr}(0,\varphi)$, получим систему уравнений

$$\Psi_{rr}(0,\varphi)(-\nu'^2+\mu'^2+1)+(\mu''+\mu)(-2\nu\Gamma_{rr}(0,\varphi)+2\mu\Psi_{rr}(0,\varphi)+\nu^3/\varkappa)=0$$

$$\Gamma_{rr}(0,\varphi)(-\nu'^2+\mu'^2+1)+(\nu''+\nu)(-2\nu\Gamma_{rr}(0,\varphi)+2\mu\Psi_{rr}(0,\varphi)+\nu^3/\varkappa)-$$
$$-\nu^2-\nu'^2+2(\nu^2+\mu'^2)-(\nu\mu'-\mu\nu')^2=0 \qquad (1.10)$$

Находя $\Psi_{rr}(0,\varphi)$ и $\Gamma_{rr}(0,\varphi)$ из (1.10) для Ψ и Γ при малых r, получим следующие приближенные формулы: (1.11)

$$\Psi\approx r\mu+\frac{\gamma+1}{2}\frac{\nu^3\mu^2}{\nu'^2+\mu^2}(\mu''+\mu)r^2,\quad \Gamma\approx\varkappa+r\nu+\frac{1}{2}\left[\frac{(\gamma+1)\nu^3\mu^2(\nu''+\nu)}{\nu'^2+\mu^2}-\nu^2\right]r^2$$

(отметим, что третьи производные по r, если они существуют, уже не могут быть, вообще говоря, определены единственным образом [1]).

Предполагая, что χ дважды непрерывно дифференцируема по r и φ при малых r, воспользовавшись (1.9), (1.5) и выражениями для $\Psi_{rr}(0, \varphi)$ и $\Gamma_{rr}(0, \varphi)$, получим для X следующее приближенное линейное уравнение:

$$r\chi_{rr} - \frac{(\gamma+1)\,\nu^3\mu^2}{\nu'^2+\mu^2}(\chi_{\varphi\varphi}+r\chi_r) = 0 \tag{1.12}$$

Тип этого уравнения определяется знаком $\nu(\varphi)$. Таким образом, если в возмущенном течении плотность при удалении от слабого разрыва возрастает, уравнение (1.12) для $r > 0$ гиперболического типа (такой режим осуществляется, например, в окрестности слабого разрыва, распространяющегося за нормальной детонационной волной). Если же плотность убывает — случай обычной волны разрежения — уравнение (1.12) при $r > 0$ эллиптического типа. В плоском сучае ($\mu = 0$, $\nu = \pm 1$) уравнение (1.12) принимает вид

$$r\,\mathrm{X}_{rr} \pm (\gamma+1)\,(\mathrm{X}_{\varphi\varphi} + r\,\mathrm{X}_r) = 0 \tag{1.13}$$

В [1] для уравнения (1.13) при помощи теорем работ [6,7] были рассмотрены задачи с начальными данными из (1.5). После приведения (1.12) к каноническому виду совершенно аналогичное рассмотрение можно проделать и для полученного уравнения. Именно, пусть в гиперболическом случае вдоль некоторого отрезка MN, лежащего на оси $r = 0$:

$$\frac{\nu^3\mu^2}{\nu'^2+\mu^2} \neq 0$$

Тогда в области, ограниченной характеристиками двух семейств

$$2\sqrt{(\gamma+1)\,r} + \int\frac{\nu'^2+\mu^2}{\nu^3\mu^2}\,d\varphi = C_1; \qquad 2\sqrt{(\gamma+1)\,r} - \int\frac{\nu'^2+\mu^2}{\nu^3\mu^2}\,d\varphi = C_1 \tag{1.14}$$

проходящими через точки M и N, существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое по r и φ решение поставленной задачи в предположении, что $\lambda(\varphi)$ имеет четыре непрерывные производные. В эллиптическом случае поставленная задача некорректна в классическом смысле и при ее решении можно применять различные методы регуляризации [1].

В случае, когда Ψ и Γ зависят только от r (ν и μ — константы — случай установившегося движения), при решении (1.12) эффективен метод Фурье. В общем случае при малых r можно указать приближенное выражение

$$\mathrm{X} \approx r\lambda + \frac{\gamma+1}{2}\,\frac{\nu^3\mu^2}{\nu'^2+\mu^2}(\lambda''+\lambda)\,r^2 \tag{1.15}$$

(Выражение для $\chi_{rr}(0, \varphi)$ получается так же, как и соответствующие выражения для $\Psi_{rr}(0, \varphi)$, $\Gamma_{rr}(0, \varphi)$). Найдя X в малой окрестности $r = 0$, $\Delta r = h \ll 1$, в области гиперболичности можно решать далее (1.12) методом характеристик.

Таким образом, класс пространственных двойных волн дает возможность построить некоторые решения уравнений газовой динамики в окрестности слабого разрыва, имеющего для любого t форму развертывающейся поверхности.

2. Для дальнейшего существенным будет уравнение переноса скачков выводящих производных функций u_i, c — $[u_{i\Phi}]$, $[c_\Phi]$ — вдоль произвольной бихарактеристики, лежащей на характеристической поверхности

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = t \tag{2.1}$$

В плоском случае, если поверхность $\Phi(x_1, x_2) = t$ будет поверхностью слабого разрыва, распространяющегося со скоростью звука по невозмущенному газу, уравнение переноса было получено и исследовано в [1] (на возможность получения такого уравнения указано в [9], для случая двумерного течения уравнение переноса скачков производных вдоль характеристик было подробно исследовано в [10]).

В дальнейшем будем считать, что характеристическая поверхность (2.1) распространяется с постоянной нормальной скоростью D относительно неподвижной системы координат (скорость распространения относительно газа равна скорости звука c; если на (2.1) $|\mathbf{u}| = 0$ — случай движения по области покоя слабого разрыва,— то $D = c$). Кроме того, будем предполагать, что на характеристической поверхности скорость звука, а следовательно, и плотность постоянны, а вектор скорости $\mathbf{u}$ всегда ортогонален к поверхности и модуль его постоянен. Эти предположения позволяют включить в рассмотрение движения за нормальными детонационными волнами, когда на фронте их выполняется условие Чепмена — Жуте

$$|\mathbf{u}| + c = D \tag{2.2}$$

и, следовательно, детонационная волна движется относительно продуктов сгорания со скоростью звука. Функция Φ удовлетворяет обычному характеристическому уравнению

$$(\Phi_1 u_1 + \Phi_2 u_2 + \Phi_3 u_3 - 1)^2 - c^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2) = 0 \tag{2.3}$$

При помощи (2.2) и предположений (2.3) можно записать в виде

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = \frac{1}{D^2}, \qquad \Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{2.4}$$

Уравнения бихарактеристик запишем в виде

$$\begin{aligned} x_i^{\cdot} &= c^2\Phi_i - u_i(u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 - 1) \\ t^{\cdot} &= -(u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 - 1) \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Правый нуль-вектор характеристической матрицы уравнений газовой динамики, записанных для функций u_i, c, имеет вид

$$\mathbf{r} = (\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \gamma - 1\,/\,2\sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2})$$

Поэтому для скачков выводящих производных функций u_i, c ([9]) имеет место соотношение

$$([u_{1\Phi}],\ [u_{2\Phi}],\ [u_{3\Phi}],\ [c_\Phi]) = \sigma \mathbf{r} \tag{2.6}$$

Здесь σ — некоторая скалярная функция, символ $[f_\Phi]$ соответствует в случае слабого разрыва разности выводящих производных функции f, взятых с двух сторон разрыва (в случае примыкания к покою $[f_\Phi] = f_\Phi$ в возмущенном течении). В случае же нормальной детонационной волны будем различать две возможности. Вначале рассмотрим случай, когда производные функций u_i и c на фронте волны конечны (этот случай не основной — течения такого рода могут осуществляться лишь за плоскими детонационными волнами). Положим $[f_\Phi] = f_{1\Phi} - f_{2\Phi}$, где $f_{1\Phi}$ и $f_{2\Phi}$ — выводящие производные, соответствующие двум произвольным течениям за детонационной волной при заданной ее форме. Скачки $[f_\Phi]$ для основных функций удовлетворяют (2.6), и рассмотрение нормальной детонации в случае конечности производных производится аналогично случаю слабого разрыва.

Произведем в уравнениях газовой динамики замену независимых переменных

$$\xi_i = x_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \xi_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3) - t \tag{2.7}$$

Пользуясь тем, что дифференцирование по ξ_1, ξ_2, ξ_3 будет внутренним на характеристической поверхности, можно провести выкладки, аналогичные использованным в [1] (п. 3); уравнение для определения функции σ в окончательной форме можно представить так:

$$\sigma' + \frac{\gamma+1}{2D^2}\sigma^2 + D\sigma(\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33})\left(\frac{c}{2} + \frac{\gamma-1}{4}|\mathbf{u}|\right) = 0 \tag{2.8}$$

При этом за параметр на бихарактеристике выбрано t (σ'— производная σ по t) $c = \text{const}$, $|\mathbf{u}| = \text{const}$ — соответственно значения скорости звука и модуля вектора скорости на поверхности $\Phi = t$. Уравнение (2.8) является уравнением Бернулли. Оно может быть всегда проинтегрировано в квадратурах, если известно явное выражение для $\Delta\Phi$ как функции t вдоль данной бихарактеристики.

В случае слабого разрыва ($|\mathbf{u}| = 0$, $c = D$) уравнение (2.8) принимает вид

$$\sigma' + (\gamma + 1)/(2c^2)\,\sigma^2 + c^2/2\;\sigma\;\Delta\Phi = 0 \tag{2.9}$$

Рассмотрим случай, когда на фронте детонационной волны нормальные производные функции u_i и c обращаются в бесконечность. Представим в первом приближении следуя [8] (гл. 6) функции u_i, c в виде

$$u_i = S(\varphi) g_i(x_1, x_2, x_3, t) + q_i(x_1, x_2, x_3, t)$$
$$c = S(\varphi)\, g(x_1, x_2, x_3, t) + q(x_1, x_2, x_3, t)$$

Здесь $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ — уравнение характеристической поверхности; $S(\varphi)$ — некоторая обобщенная функция, такая, что $S(0) = 0$, а производная ее $S_{-1}(\varphi)$ обращается при $\varphi = 0$ в бесконечность, функции g_i и g не обращаются в нуль и достаточно гладкие на характеристической поверхности, а в функции q_i и q могут быть включены более слабые особенности, причем предельные их значения на $\varphi = 0$ совпадают со значениями u_i и c на фронте волны. Будем интересоваться поведением функций g_i и g вдоль бихарактеристик на поверхности $\varphi = 0$. Ясно, что функции g_i, g и q_i, q вне поверхности $\varphi = 0$ ($\Phi = t$) можно определить не единственным образом.

Предполагая, что представления для u_i и c справедливы в некоторой окрестности $\varphi = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при $S_{-1}(\varphi)$ в системе уравнений газовой динамики (так же как и в [8] для линейной системы), получим

$$(g_1, g_2, g_3, g) = \sigma_D \mathbf{r} \qquad (2.10)$$

Здесь $\sigma_D(x_1, x_2, x_3, t)$ — некоторая скалярная функция.

Пусть два различных течения за детонационной волной данной формы характеризуются функциями g_i^*, g^* и g_i, g и им соответствуют σ_D^* и σ_D. Тогда, произведя обычную процедуру умножения всех уравнений на компоненты левого нуль-вектора характеристической матрицы, просуммировав их и взяв потом разность полученных соотношений для двух решений с σ_D^* и σ_D для $\sigma_R = \sigma_D^* - \sigma_D$, получим следующее уравнение переноса вдоль бихарактеристики:

$$\sigma_R' + cD\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\Delta\Phi\sigma_R = 0 \qquad (2.11)$$

Выясним геометрический смысл $\Delta\Phi$. Как известно, для поверхности, заданной уравнением $x_3 = F(x_1, x_2)$, радиусы кривизны R_1, R_2 главных нормальных сечений определяются из уравнения

$$(rt - s^2)R^2 - h[2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r]R + h^4 = 0 \qquad (2.12)$$

$$\left(r = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2},\ t = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2},\ s = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2},\ p = \frac{\partial F}{\partial x_1},\ q = \frac{\partial F}{\partial x_2},\qquad h = \sqrt{1+p^2+q^2}\right)$$

Находя r, t, s, p и q из (2.1), определяющего неявно x_3 как функцию x_1, x_2, и пользуясь вытекающим из (2.4) соотношением

$$2(\Phi_1\Phi_2\Phi_{12} + \Phi_2\Phi_3\Phi_{23} + \Phi_1\Phi_3\Phi_{13}) + \Phi_1^2\Phi_{11} + \Phi_2^2\Phi_{22} + \Phi_3^2\Phi_{33} = 0$$

получим

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r}{h^3} = D\Delta\Phi \qquad (2.13)$$

Таким образом, $\Delta\Phi = 2H / D$, где H — средняя кривизна поверхности (2.1).

Найдем выражение $\Delta\Phi$ как функции t вдоль бихарактеристики для случая слабого разрыва. Не умаляя общности, можно считать, что $c = 1$ и уравнения бихарактеристик записать в виде

$$x_i^{\cdot} = \Phi_i, \qquad t^{\cdot} = 1 \qquad (2.14)$$

Так как $\Sigma\,\Phi_k\Phi_{ik} = 0$, то ясно, что вдоль любой фиксированной бихарактеристики Φ_i постоянны и, следовательно, бихарактеристики являются прямыми линиями в пространстве x_1, x_2, x_3, t. Пользуясь постоянством Φ_i и дифференцируя $\Delta\Phi$ вдоль бихарактеристики, при помощи (2.1) получим соотношение

$$-(\Delta\Phi^{\cdot}) = (\Delta\Phi)^2 - \frac{2}{\Phi_1\Phi_2\Phi_3}(\Phi_1\Phi_{12}\Phi_{13} + \Phi_2\Phi_{21}\Phi_{23} + \Phi_3\Phi_{31}\Phi_{23}) \qquad (2.15)$$

Для гауссовой кривизны $K = 1 / R_1R_2 = rt - s^2 / h^4$ при помощи (2.1) можно получить представление

$$K = \frac{1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_3}(\Phi_1\Phi_{12}\Phi_{13} + \Phi_2\Phi_{21}\Phi_{23} + \Phi_3\Phi_{31}\Phi_{23}) \qquad (2.16)$$

Наконец, используя тождества, полученные дифференцированием (2.1) дважды по всем x_i, x_k и дифференцируя K вдоль бихарактеристики (2.14), получим следующее соотношение:

$$(K^{\cdot}) = -\Delta\Phi\, K \tag{2.17}$$

Окончательно, из (2.15) и (2.17) при помощи (2.16) будем иметь для $R_1(t)$ и $R_2(t)$ следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль фиксированной бихарактеристики:

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{\cdot} = -\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}, \qquad \left(\frac{1}{R_1R_2}\right)^{\cdot} = -\frac{1}{R_1R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{2.18}$$

Общее решение системы (2.18) запишем в виде

$$R_1 = t + C_1, \qquad R_2 = t + C_2 \tag{2.19}$$

где C_i — произвольные постоянные. Подставляя в (2.9)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{t+C_1}+\frac{1}{t+C_2}$$

и интегрируя полученное уравнение, получим общее решение в виде

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{t+C_1}\sqrt{t+C_2}\,[(\gamma+1)\ln(\sqrt{t+C_1}+\sqrt{t+C_2})+C]} \tag{2.20}$$

(C — произвольная постоянная). Формула (2.20) дает закон затухания с ростом времени частных производных решения на поверхности слабого разрыва, двигающегося по области покоя, в пространственном случае.

Для нормальной детонации при помощи условия Чепмена — Жуге уравнения бихарактеристик (2.5) приведем к виду

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = cD\Phi_i, \qquad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{c}{D} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.21}$$

Положим в (2.21)

$$\lambda = \frac{D}{c}\mu, \qquad x_i = Dx_i^*$$

Тогда вместо уравнений (2.21) и (2.4) будем, соответственно, иметь

$$\frac{dx_i^*}{d\mu} = \Phi_{x_i^*}, \qquad \frac{dt}{d\mu} = 1, \qquad \Phi^2_{x_1^*}+\Phi^2_{x_2^*}+\Phi^2_{x_3^*} = 1$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{3}\Phi_{x_i^*x_i^*} = \frac{1}{t+C_1}+\frac{1}{t+C_2}, \qquad \Delta\Phi = \frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{t+C_1}+\frac{1}{t+C_2}\right) \tag{2.22}$$

Подставляя найденное $\Delta\Phi$ в (2.11) и интегрируя, получим

$$\sigma_R = C\,[(t+C_1)(t+C_2)]^{-\frac{c}{D}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tag{2.23}$$

Интегрировать уравнение (2.8) при $\Delta\Phi \neq 0$, как будет показано в п. 3, не имеет смысла, а при $\Delta\Phi \equiv 0$ решение (2.8) имеет вид

$$\sigma_D = D^2\left(C+\frac{\gamma+1}{2}t\right)^{-1} \tag{2.24}$$

3. Рассмотрим как ведут себя на характеристической поверхности с ростом времени частные производные от основных функций, когда течение за слабым разрывом или нормальной детонационной волной принадлежит к классу двойных волн. Вначале исследуем случай поверхности слабого разрыва, двигающегося по области покоя. Правый нуль-вектор $\mathbf{r}$ характеристической матрицы при помощи (1.5) запишем в виде

$$\mathbf{r} = \left(\frac{\cos\varphi}{\nu}, \frac{\sin\varphi}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}, \frac{\gamma-1}{2}\right) \tag{3.1}$$

Вектор скачков выводящих производных в данном случае представим так:

$$([u_{1\Phi}], [u_{2\Phi}], [u_{3\Phi}], [c_\Phi]) = -\left(\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial u_2}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial u_3}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial c}{\partial t}\right]\right)$$

Находя $\partial u_1/\partial t$ и $\partial u_2/\partial t$ из (1.3) (после дифференцирования их по t и перехода к полярным координатам) при $r = 0$, для скаляра σ_d, соответствующего течению типа двойной волны, при помощи (3.1) и (2.6) получим представление

$$\sigma_d = \frac{1}{(\gamma+1)(t+B_d(\varphi))} \tag{3.2}$$

Заметим, что $B_d(\varphi) = \mathrm{const}$ вдоль фиксированной бихарактеристики. Так как поверхность слабого разрыва в данном случае является развертывающейся поверхностью, то вдоль произвольной бихарактеристики один из радиусов кривизны главных нормальных сечений обращается в бесконечность. Вместо (2.20) для σ тогда получим представление

$$\sigma = \frac{1}{(\gamma+1)(t+B)} + \frac{1}{A(t+B)^{3/2} - (\gamma+1)(t+B)} \qquad (A,\ B = \mathrm{const}) \tag{3.3}$$

Ясно, что для больших t

$$|\sigma - \sigma_d| = O\ (t^{-3/2}) \tag{3.4}$$

Рассмотрим в пространстве $x_1\ x_2\ x_3\ t$ окрестность Δ_k слабого разрыва $\Phi\ (x_1, x_2, x_3) = t$, характеризуемую тем, что расстояние ρ произвольной точки M этой окрестности до поверхности $\Phi = t$ будет меньше или равно k, т. е. $\rho\ (M, \Phi) \leqslant k$. Пусть возмущения в течении за слабым разрывом не догоняют разрыв (течение в окрестности разрыва достаточно гладкое) и форма разрыва также достаточно гладкая. Тогда для $t \sim O\ (k^{-2/3})$ разность одинаковых первых частных производных для двух любых решений, соответствующих данной форме разрыва, будет отличаться на величину $O\ (k)$ (см. (3.4)). Тогда из формул тейлоровских разложений для функций u_i, c, так как предельные значения этих функций для всех различных течений на $\Phi = t$ совпадают, для $t \sim O\ (k^{-2/3})$ следует, что с точностью $O\ (k^2)$ основные газо-динамические величины в Δ_k совпадают.

Таким образом, для достаточно больших моментов времени можно произвольное течение за слабым разрывом приблизить течением типа двойной волны.

Замечание. При помощи формулы (2.20) можно сопоставить произвольное сферическое течение в окрестности слабого разрыва, распространяющегося по области покоя, с автомодельным течением типа тройной волны [3] и получить аналогичные результаты.

Рассмотрим случай нормальной детонации. Постановка краевых задач для системы (1.1), когда течение за нормальной детонационной волной принадлежит классу пространственных двойных волн, была осуществлена в [4]. Было показано, что для построения течений необходимо решать систему (1.1) с начальными данными на линии $u_2 = f(u_1)$, которая является линией параболичности, но не является характеристикой, а сама система (1.1) в окрестности линии $u_2 = f(u_1)$ гиперболического типа. Задача эта, вообще говоря, является корректной и в классе двойных волн можно найти единственное решение, соответствующее движению нормальной детонационной волны, которая является развертывающейся поверхностью для любого t.

Начальные данные на линии $u_2 = f(u_1)$ имеют вид [4]

$$\begin{aligned} &u_1^2 + u_2^2 + \Psi^2 = A^2 = \text{const}, \qquad \Psi = u_1\Psi_1 + u_2\Psi_2 \quad &\text{для } \Psi \\ &\Gamma = c^2/(\gamma - 1) = \text{const}, \qquad \Gamma_1 u_1 + \Gamma_2 u_2 = -Ac \quad &\text{для } \Gamma \\ &\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{X}_2 = F(\mathrm{X}_2) \quad &\text{для } \chi \end{aligned} \tag{3.5}$$

где c — скорость звука, функции f и F произвольны и служат для задания формы волны в какой-либо момент времени. Используя (3.5) и вытекающие из них и (1.1) формулы

$$u_1\Psi_{1i} + u_2\Psi_{2i} = u_1\Lambda_{1i} + u_2\Lambda_{2i} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$
$$(\Lambda = \Gamma + {}^1\!/_2\,(u_1^2 + u_2^2 + \Psi^2))$$

из соотношений (1.3) получим, что все частные производные функций u_1 и u_2, а следовательно, и функций u_3, c обращаются на фронте волны в бесконечность, если форма волны не плоская.

Если рассмотреть полные уравнения газовой динамики, считая что на поверхности детонационной волны $\Phi(x_1, x_2, x_3) = t$, являющейся характеристической поверхностью, заданы

$$u_i = AD\Phi_i, \qquad c = \text{const}$$

то все внутренние производные функции u_i, c на поверхности $\Phi = t$ можно вычислить и получить неоднородную систему четырех линейных уравнений для определения выводящих производных $u_{i\Phi}$, c_Φ.

Определитель из коэффициентов при $u_{i\Phi}$, c_Φ обращается в нуль, ранг же матрицы расширенной системы, как легко видеть путем непосредственного подсчета, равен четырем, если детонационная волна неплоская. Таким образом, основным случаем при исследовании распространения нормальной детонационной волны является случай обращения в бесконечность частных производных основных функций на фронте волны.

Чтобы сопоставить случай общего течения за детонационной волной с течением типа двойной волны, используем уравнение переноса (2.11), считая, что в выражениях g_i^+, g^+ для u_i, c относятся к течению типа двойной волны, а g_i^-, g^- — к общему течению (если существует течение отличное от двойной волны). Так как (2.23)

$$\sigma_R = \sigma_D^+ - \sigma_D^- = O\left(t^{-2\frac{c}{D}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right)$$

ясно, что с ростом t функции g_i^+, g^+ и g_i^-, g^- стремятся к общему пределу.

Таким образом, и в случае нормальной детонации можно утверждать, что для больших t произвольное течение в окрестности детонационной волны приближенно будет двойной волной, в том смысле, что закон убывания производных основных функций при удалении от фронта волны в главной части совпадает с соответствующим законом для двойной волны.

Если детонационная волна плоская, то из (2.24) следует, что течение в окрестности такой волны для больших t можно приближенно считать автомодельной волной Римана, так как в ней

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2D}{(\gamma+1)t}$$

Замечание. Решение (2.23) для σ_k можно использовать для сопоставления произвольных течений за расходящейся сферической нормальной детонационной волной с автомодельным решением Я. Б. Зельдовича [10] задачи о распространении инициированной в точке детонационной волны. И в этом случае для больших t можно считать, что произвольное течение стремится к автомодельному в указанном выше смысле.

Поступила 22 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф. О нестационарных течениях газа, примыкающих к области покоя. ППМ, 1966, т. 30, вып. 1.
2. Рыжов О. С. О течениях с вырожденным годографом. ППМ, 1957, т. 21, вып. 4.
3. Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
4. Сидоров А. Ф. О скачках уплотнения в пространственных течениях с вырожденным годографом. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5.Квашнина С. С., Черный Г. Г. Установившееся обтекание конуса потоком детонирующего газа. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
6. Терсенов С. А. О задаче с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2.
7. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 2.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными, гл. 6, М., «Мир», 1964.
9. Nitsche J. Über Unstetigkeiten in den Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungssysteme. J. Rational Mech. and Analysis., 1953, vol. 2, No. 2.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2, гл. 14, М., Гостехиздат, 1954.