Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПЕРЕХОДОМ ЧЕРЕЗ НУЛЬ ОДНОЙ ИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ

Ф. А. Слободкина

(Москва)

Предлагаемая работа посвящена задачам об оптимальном управлении одномерными течениями жидкости с непрерывным переходом через нуль одной из характеристических скоростей (скоростей распространения слабых разрывов). Известно [1], что изменение знака характеристической скорости происходит в особой точке системы дифференциальных уравнений, описывающих течение. Система уравнений для множителей Лагранжа, получающаяся при решении задачи об оптимизации такого течения, также имеет особенность в точке, где обращается в нуль характеристическая скорость, и поэтому встает вопрос об однозначном выборе множителей Лагранжа в особой точке.

Ниже показано, что в оптимальном решении множители Лагранжа должны быть непрерывны и ограничены при переходе через особенность. Полученные результаты иллюстрируются примером оптимизации магнитогазодинамического генератора электрической энергии, течение в котором происходит с непрерывным переходом через скорость звука.

1. Рассмотрим произвольное одномерное стационарное течение сплошной среды. Предположим, что в рассматриваемой области изменения параметров одна из характеристических скоростей, вычисленная по соответствующим уравнениям нестационарного течения, обращается в нуль в некоторой точке.

В этом случае уравнения стационарного течения сплошной среды в нормальной форме удобно записать в виде

$$y_1' = y_1^{-1} f(x, y_k, v_i), \qquad y_j' = g_j(x, y_k, v_i) \qquad (1.1)$$
$$(i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, n; \quad j = 2, \ldots, n)$$

Здесь x — координата, отсчитываемая в направлении скорости течения; y_j — параметры течения, как например, скорость, давление, плотность среды, напряженность индуцированного магнитного поля, концентрация компонент среды и т. п.; y_1 — параметр, пропорциональный характеристической скорости, которая по предположению меняет знак (для задач газовой динамики удобно выбрать $y_1 = M - 1$, где M — число Маха); v_i — различные управления, например, форма канала, напряженность приложенного магнитного поля, разность электрических потенциалов и т. п. Величины v_i считаются функциями x. Штрихом обозначены производные по x. Возможность представления уравнений стационарного течения в такой форме следует из [1], где показано, что выбором независимых переменных можно добиться того, чтобы правая часть лишь одного из уравнений содержала особенность, а все остальные были конечны в особой точке.

Особая точка системы уравнений (1.1) определяется условиями:

$$f(x, y_k, v_i) = 0, \qquad y_1 = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, m) \qquad (1.2)$$

и принадлежит (n — 1)-мерной поверхности в (n + 1)-мерном пространстве переменных x, y_1, . . ., y_n. Интегральные кривые в малой ее окрестности лежат в двумерной плоскости [1].

Характер особенности находится, как обычно, по коэффициентам линейного разложения правых частей (1.1) в окрестности особой точки.

Вековое уравнение для определения собственных чисел λ имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_{y_1} - \lambda & f_x + f_{y_j} g_j + f_{v_i} v_i' \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Здесь f_x, f_{y_1}, f_{y_j}, f_{vi} — соответствующие частные производные, по повторяющимся индексам (i, j) предполагается суммирование. Из (1.3) находим

$$\lambda_{1,2} = {}^1\!/_2\, [f_{y_1} \pm \sqrt{f^2_{y_1} + 4 (f_x + f_{y_j} g_j + f_{v_i} v_i')}] \tag{1.4}$$

Угловые коэффициенты собственных направлений в особой точке совпадают по величине с собственными значениями

$$y_1' = \lambda_{1,\,2} \tag{1.5}$$

Различный характер особенностей в зависимости от знаков λ_1 и λ_2 подробно рассмотрен в [1]. Будем в дальнейшем интересоваться лишь двумя типами особенностей: узлом с отрицательными собственными значениями ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и седлом ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$), так как в окрестности этих особых точек течение устойчиво [1].

Для интегрирования системы уравнений (1.1) на конечном отрезке [a, b] оси x необходимо задать граничные условия. Число граничных условий, как следует из работы [2], при $x = a$ равно числу положительных характеристических скоростей в этой точке, а при $x = b$ равно числу отрицательных характеристических скоростей.

Для течений, в которых характеристические скорости знакопостоянны в рассматриваемом интервале интегрирования, число граничных условий слева и справа в сумме равно n.

Для течений, в которых характеристическая скорость (в данном случае y_1) меняет знак при переходе в некоторой внутренней точке $x^* \in [a, b]$ через особенность типа узла, имеется еще одно граничное условие при $x = b$, так как $y_1 > 0$ при $x = a$ и $y_1 < 0$ при $x = b$.

Таким образом, при наличии особенности типа узла у уравнений (1.1) имеется (n + 1) граничных условий, которые могут быть записаны в виде

$$\varphi_i (a, y_{ka}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r), \qquad \psi_j (b, y_{kb}) = 0 \quad (j = r + 1, \ldots, n + 1)$$
$$(k = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Здесь r — число положительных характеристических скоростей при $x = a$, (n + 1 — r) — число отрицательных характеристических скоростей при $x = b$; φ_i и ψ_j — известные функции, y_{ka}, y_{kb} — значения в точках a и b соответственно.

Предполагается, что граничные условия (1.6) таковы, что обеспечивают вход интегральной кривой с отрицательным значением y_1' в узел. В противном случае условиям (1.6) соответствует течение с ударной волной.

Для решения, проходящего с положительным значением y_1' через особенность типа седла, имеется при $x = a$ и при $x = b$ в сумме $(n - 1)$ граничных условий, так как $y_1 < 0$ при $x = a$ и $y_1 > 0$ при $x = b$. Эти условия также могут быть записаны в виде (1.6), но для данного случая в формулах (1.6) индекс $j = r + 1, \ldots, n - 1$. Дополнительным соотношением для выбора решения в этом случае служит (1.2).

Для решения, проходящего с отрицательным значением y_1' через особенность типа седла, число граничных условий, так же как и в случае узла, равно $(n + 1)$. Такому числу граничных условий отвечает множество разрывных решений [1]. Для получения непрерывного решения, проходящего через седло с $y_1' < 0$ необходимо отбросить по одному условию слева и справа и потребовать выполнения (1.2). Таким образом, для решений, проходящих через седло, имеется $(n - 1)$ условий при $x = a$ и $x = b$ и условие (1.2).

2. Рассмотрим задачу об определении оптимальных управлений $v_i(x)$, т. е. таких управлений, что функционал

$$J = \int_a^b \Phi(x, y_k, v_i)\,dx \qquad (k = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, m) \tag{2.1}$$

принимает максимальное значение, причем величины x, y_k, v_i связаны дифференциальными уравнениями (1.1).

Функция $\Phi(x, y_k, v_i)$ предполагается заданной и непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка. Будем считать допустимыми управлениями произвольные кусочно-непрерывные функции, которые могут терпеть разрыв первого рода в конечном числе точек отрезка $[a, b]$. Будем также считать, что на управления v_i наложены ограничения, например, такого вида

$$|v_i| \leqslant V_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

связанные с границами применимости одномерных уравнений (1.1) либо с технической конструкцией самого управления. В (2.2) величины V_i — известные постоянные. Составим вспомогательный функционал

$$I = \int_a^b \left\{\Phi(x, y_k, v_i) + \mu_1\left[y_1' - \frac{f(x, y_k, v_i)}{y_1}\right] + \mu_j\left[y_j' - g_j(x, y_k, v_i)\right]\right\} dx$$

$$(k = 1, \ldots, n; \; j = 2, \ldots, n; \; i = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Здесь μ_1, μ_j — переменные множители Лагранжа. При допустимом варьировании вариации функционалов J и I совпадают, вследствие выполнения уравнений (1.1)

Включим в рассмотрение только два типа возможных решений системы уравнений (1.1): решение, в котором характеристическая скорость y_1 меняет знак при переходе соответствующей интегральной кривой через особенность типа узла или при переходе — через особенность типа седла. Предположим, что при допустимом варьировании характер особой точки не меняется.

[1] Иллюстрацией к этой части статьи может служить работа [3].

Разобьем интервал интегрирования $[a, b]$ на участки непрерывности управлений $v_i(x)$, а также на участки постоянства знака $y_1(x)$.

Для получения всех необходимых условий достаточно рассмотреть одну точку разрыва управлений v_i и одну точку смены знака y_1. Концы отрезка $[a, b]$ будем считать подвижными. Найдем первую вариацию I, учитывая при этом, что μ_1, μ_j непрерывны в точках $x = d$— разрыва управлений, а в особой точке $x = x^*$ непрерывны $y'_k(x^*)$ $(k = 1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned}\delta I = \int_a^b \Big[\Big(\Phi_{v_i} - \frac{\mu_1 f_{v_i}}{y_1} - \mu_j g_{jv_i}\Big)\delta v_i + \Big(\Phi_{y_1} - \mu_1 \frac{(y_1 f_{y_1} - f)}{y_1^2} - \mu_j g_{jy_1} - \mu_1'\Big)\delta y_1 + \\ + (\Phi_{y_k} - \mu_1 f_{y_k}/y_1 - \mu_j g_{jy_k} - \mu_k')\,\delta y_k\Big]dx + \{\Phi(x_-^*) - \Phi(x_+^*) + \\ + y_s'(x^*)[\mu_s(x_+^*) - \mu_s(x_-^*)]\}\,\delta x^* + \mu_1(x_-^*)\,\delta y_{1-}^* - \mu_1(x_+^*)\delta y_{1+}^* + [\mu_k(x_-^*) - \\ - \mu_k(x_+^*)]\,\delta y_k^* + \{\Phi(x_{d-}) - \Phi(x_{d+}) - \mu_s(x_d)[y_s'(x_{d-}) - y_s'(x_{d+})]\}\,\delta x_d + \\ + \mu_s(b)\,\delta y_{sb} - \mu_s(a)\,\delta y_{sa} + [\Phi(b) - y_s'(b)\mu_s(b)]\,\delta x_b - [\Phi(a) - y_s'(a)\mu_s(a)]\,\delta x_a \\ (i = 1, \ldots, m;\ j, k = 2, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, n)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь Φ_{v_i}, Φ_{y_1}, Φ_{y_k}, $f_{v_i} f_{y_1}$, f_{y_k}, g_{jv_i}, g_{jy_1}, g_{jy_k} — соответствующие частные производные функций Φ, f и g_j, нижние индексы a, b и d приписываются вариациям при $x = a$, $x = b$ и $x = d$, звездочкой отмечены величины в особой точке. Обозначения $\Phi(x_-)$, $\mu_s(x_-)$, $y_s'(x_-)$ $[\Phi(x_+)$, $\mu_s(x_+)$, $y_s'(x_+)]$ показывают, что эти величины вычислены левее [правее] соответствующего x.

Множители Лагранжа выберем таким образом, чтобы в выражении (2.4) остались лишь вариации управлений. Покажем, что это можно сделать для любого рассматриваемого здесь решения системы уравнений (1.1).

Определим μ_1, μ_k так, чтобы на участках, где величина y_1 знакопостоянна, выполнялось (2.5)

$$\mu_1' = \Phi_{y_1} - \mu_1 \frac{y_1 f_{y_1} - f}{y_1^2} - \mu_j g_{jy_1}, \quad \mu_k' = \Phi_{y_k} - \mu_1 \frac{f_{y_k}}{y_1} - \mu_j g_{jy_k} \qquad (j, k = 2, \ldots, n)$$

Для интегрирования системы уравнений (2.5) необходимо выбрать граничные условия. Их вид зависит от характера решения системы (1.1).

3. Как следует из (2.5) уравнения для множителей Лагранжа имеют особенность в точке, где обращается в нуль величина y_1. Ввиду этого встает вопрос об однозначном выборе величин μ_1, μ_j в особой точке. Возможность построения единственного решения для множителей Лагранжа следует из рассмотрения граничных условий (1.6) для системы (1.1), внеинтегральных членов в точках a, b и x^* в выражении (2.4) и характера особой точки системы уравнений (1.1) и (2.5).

Рассмотрим решение системы (1.1), проходящее через особую точку типа узла. При этом в концах отрезка a и b выполняются условия (1.6). Варьируя правые части равенств (1.6), получим систему $(n + 1)$ линейных алгебраических уравнений относительно δy_{ka}, δx_a, δy_{kb}, δx_b $(k = 1, \ldots, n)$:

$$\varphi_{ix}\delta x_a + \varphi_{iy_k}\delta y_{ka} = 0 \qquad (x = a,\ i = 1, \ldots r)$$

$$\psi_{jx}\delta x_b + \psi_{jy_k}\delta y_{kb} = 0 \qquad (x = b,\ j = r + 1, \ldots, n + 1)$$

Разрешая эту систему относительно r значений δy_{ka} и $(n-r+1)$ значений δy_{lb} и подставляя полученные решения в (2.4), после приведения подобных членов будем иметь $(n-r)$ произвольных вариаций δy_{ka} при $x=a$ и $(r-1)$ произвольных вариаций δy_{lb} при $x=b$. Приравнивая к нулю коэффициенты перед ними, получим $(n-1)$ граничных условий для интегрирования системы уравнений (2.5), из них $(n-r)$ — условий при $x=a$ и $(r-1)$ — условий при $x=b$. Приравнивая к нулю коэффициенты перед δx_a и δx_b, получим условия, определяющие положение концов интервала интегрирования. Видно, что условий для интегрирования системы (2.5) недостаточно.

Рассмотрим теперь решение системы (1.1), проходящее через особенность типа седла. В этом случае в концах отрезка a и b выполняются условия (1.6), но $j=r+1,\ldots,n-1$. Используя их описанным выше образом для получения граничных условий для системы (2.5), будем иметь $(n-r)$ условий при $x=a$ и $(r+1)$ условий при $x=b$, т. е. всего $(n+1)$ условий.

Введем новую переменную $\mu=\mu_1/y_1$. Тогда система (2.5) примет вид:

$$\mu'=y_1^{-1}(\Phi_{y_1}-\mu f_{y_1}-\mu_j g_{jy_1}),\quad \mu_k'=\Phi_{y_k}-\mu f_{y_k}-\mu_j g_{jy_k}\qquad (j,k=2,\ldots,n)\tag{3.1}$$

Особая точка системы уравнений (1.1) и (3.1), как легко видеть, определяется равенствами

$$f(x,y_k,v_i)=0,\qquad y_1=0,\qquad \Phi_{y_1}-\mu f_{y_1}-\mu_j g_{jy_1}=0\tag{3.2}$$

В старых переменных вместо последнего равенства в (3.2) получим $\mu_1=0$.

Ввиду того, что правые части уравнений для производных y'_j, μ'_j $(j=2,\ldots,n)$ конечны в окрестности особой точки, при исследовании характера особенности существенны только первые уравнения в (1.1) и (3.1). Вводя дифференцирование по параметру t, запишем эти уравнения в виде автономной системы и, линеаризуя в окрестности особой точки их правые части, получим

$$y_{1t}=f_{y_1}\Delta y_1+(f_x+f_{v_i}v_i'+f_{y_j}g_j)\,\Delta x$$

$$x_t=\Delta y_1,\qquad \mu_t=\alpha\Delta y_1+\beta\Delta x-f_{y_1}\Delta\mu$$

Здесь Δy_1, Δx, $\Delta\mu$ — приращения соответствующих величин в окрестности особенности, α и β — коэффициенты линейного разложения числителя правой части уравнения для μ', численное значение которых не существенно.

Собственные числа особой точки в этом случае определяются уравнением

$$[-\lambda(f_{y_1}-\lambda)-(f_x+f_{v_i}v_i'+f_{y_j}g_j)](-f_{y_1}-\lambda)=0\tag{3.3}$$

Отсюда находим, что λ_1 и λ_2 определяются формулой (1.4), а величина третьего корня — выражением

$$\lambda_3=-f_{y_1}\tag{3.4}$$

В окрестности особой точки решение для Δy_1, Δx, $\Delta\mu$ имеет вид:

$$\Delta y_1=+c_1\lambda_1\exp\lambda_1 t+c_2\lambda_2\exp\lambda_2 t,\qquad \Delta x=c_1\exp\lambda_1 t+c_2\exp\lambda_2 t$$

$$\Delta\mu=c_1(\beta-\lambda_1\alpha)(\lambda_1+f_{y_1})^{-1}\exp\lambda_1 t+c_2(\beta-\lambda_2\alpha)(\lambda_2+f_{y_1})^{-1}\exp\lambda_2 t+c_3\exp\lambda_3 t$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Если система (1.1) имеет особенностью узел, то $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, причем $\lambda_1>\lambda_2$. Тогда из (3.4) получим $\lambda_3>0$.

При приближении к особой точке $(t\to\infty)$

$$\Delta y_1\sim\exp\lambda_1 t,\qquad \Delta x\sim\exp\lambda_1 t,\qquad \Delta\mu\sim\exp\lambda_3 t$$

Поведение $\mu_1 = \mu y_1$ определяется членом $\exp(\lambda_1 + \lambda_3) t$. В силу того, что $\lambda_1 + \lambda_3 > 0$, имеем $\mu_1 \to \infty$ при $t \to \infty$.

Это значит, что особая точка, определяемая равенствами (3.2), представляет собой обобщенное седло и непрерывным решениям, проходящим через нее, соответствует $\mu_1 = 0$.

Если система (1.1) имеет особенностью седло, то $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Пусть при этом $f_{y_1} < 0$. Тогда из (3.4) получим $\lambda_3 > 0$. В этом случае при приближении к особой точке при $t \to \infty$ имеем

$$\Delta y_1 \sim \exp \lambda_2 t, \qquad \Delta x \sim \exp \lambda_2 t, \qquad \Delta\mu \sim \exp \lambda_3 t \qquad (c_1 = 0)$$

Поведение μ_1 определяется членом $\exp(\lambda_2 + \lambda_3) t$ и, вследствие того, что $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$, получим $\mu_1 \to 0$ при $t \to \infty$. При приближении к особой точке при $t \to -\infty$ имеем

$$\Delta y_1 \sim \exp \lambda_1 t, \qquad \Delta x \sim \exp \lambda_1 t, \qquad \Delta\mu \sim \exp \lambda_1 t \quad \text{или} \quad \exp \lambda_3 t \qquad (c_2 = 0)$$

Тогда $\mu_1 \sim \exp 2\lambda_1 t$ или $\exp(\lambda_1 + \lambda_3) t$, что дает $\mu_1 \to 0$ при $t \to -\infty$.

Таким образом, если особая точка системы (1.1) — узел, то $\mu_1 \to \infty$ при приближении к особенности, а если особая точка системы (1.1) седло, то $\mu_1 \to 0$.

Рассмотрим внеинтегральный член в (2.4) при $x = x^*$.

Так как особая точка системы уравнений (1.1) принадлежит поверхности $(n - 1)$ измерений, то δy_j^* $(j = 2, \ldots, n)$ произвольны и, следовательно, $\mu_j(x^*_-) = \mu_j(x^*_+)$ $(j = 2, \ldots, n)$.

Выделим малую окрестность особой точки системы (1.1) и проведем в этой окрестности прямую перпендикулярно оси x в плоскости, в которой лежат все интегральные кривые системы (1.1). Тогда в случае узла эту прямую пересекает множество интегральных кривых, входящих в особую точку, и величина y_1 может меняться в пределах $0 < |y_{1\pm}| \leqslant |\lambda_2| \varepsilon$, где ε — радиус окрестности, а λ_2 определяется по (1.4), причем перед корнем надо взять знак минус. Следовательно, если в ε-окрестности особой точки $0 < |y_{1\pm}| < |\lambda_2| \varepsilon$, то $\delta y_{1\pm}^*$ произвольно и

$$\mu_1(x_-^*) = \mu_1(x_+^*) = 0 \tag{3.5}$$

т. е. множители Лагранжа должны быть непрерывны при переходе через особенность. Условие (3.5) является дополнительным условием для интегрирования системы (2.5) в случае особенности типа узла у уравнений (1.1).

Если величина y_1 в ε-окрестности особой точки достигает своего предельного значения, то дополнительным условием для интегрирования (2.5) будет

$$y_1(x^* \pm \varepsilon) = \mp |\lambda_2| \varepsilon \tag{3.6}$$

В этом случае величины $\mu_1(x_\pm^*)$ произвольны. При выполнении (3.6) целесообразно включить в рассмотрение течения с ударными волнами или знакопостоянным y_1, так как экстремум может осуществляться в этом классе течений.

Если особая точка, определяемая (1.2), седло, то имеется одна интегральная кривая с $y_1'(x^*) > 0$ и одна с $y_1'(x^*) < 0$, входящая в особую точку, и в этом случае $\delta y_{1\pm}{}^* = 0$. Следовательно, величины $\mu_1(x_-{}^*)$, $\mu_1(x_+{}^*)$ произвольны. Однако из качественного исследования известно, что $\mu_1 \to 0$ при $x \to x^*$, если особенность системы (1.1) — седло. Таким образом, условие непрерывности множителей Лагранжа в данном случае выполняется автоматически.

Пусть теперь оптимальные управления терпят разрыв в точке, где y_1 обращается в нуль. Тогда граничные условия для интегрирования системы (2.5) выбираются аналогично тому, как это делалось для особенности типа седла, так как через точку $x = x^*$, где $y_1 = 0$, проходят две интегральные кривые системы уравнений (1.1), у которых $y_1' \to \pm\infty$ при $y_1 \to 0$. Из (2.5) следует, что при $y_1 \to 0$ $(x \to x^*)$

$$\mu_1 = c\,(x - x^*)^{1/2} \tag{3.7}$$

где c — произвольная постоянная. Выражение (3.7) получено с учетом, что $x \to x^*$

$$(y_1)^2 = 2f(x_\pm{}^*)(x - x^*)$$

Итак $\mu_1 \to 0$ при $x \to x^*$, т. е. и в этом случае множители Лагранжа непрерывны.

4. В соответствии с выбором множителей Лагранжа первая вариация

$$\delta I = \delta I = \int_a^b \left\{\left(\Phi_{v_i} - \frac{\mu_1 f_{v_i}}{y_1} - \mu_j g_{jv_i}\right)\delta v_i\right\} dx + \{\Phi(x_{d-}) - \Phi(x_{d+}) - \tag{4.1}$$
$$- \mu_s(x_d)[y_s'(x_{d-}) - y_s'(x_{d+})]\}\,\delta x_d \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 2, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, n)$$

Необходимые условия экстремума при учете (2.2) находятся обычным путем.

Если управления оптимальны, то любое их допустимое варьирование может вести лишь к уменьшению J, т. е. $\delta J \leqslant 0$. Учитывая, что на участках $|v_i| < V_i$ допустимые вариации δv_i любого знака, на участках $v_i = +V_i$ вариации δv_i отрицательны, а на участках $v_i = -V_i$ вариации δv_i положительны, получим необходимые условия максимума J, определяющие оптимальные управления

$$\begin{aligned} &F_i \equiv \Phi_{v_i} - \mu_1 f_{v_i}/y_1 - \mu_j g_{jv_i} = 0 \qquad (|v_i| < V_i) \\ &F_i \geqslant 0 \quad (v_i = V_i), \qquad F_i \leqslant 0 \quad (v_i = -V_i) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Положение точки разрыва управлений d определяется условием

$$\Phi(x_{d-}) - \Phi(x_{d+}) - \mu_s(x_d)[y'_s(x_{d-}) - y'_s(x_{d+})] = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

В выражении (4.1) могут иметься и другие внеинтегральные члены, связанные с тем, что управлениями могут служить некоторые из величины $y_{l,a}$, $y_{l,b}$, а также длина отрезка интегрирования. Условия оптимума величин $y_{l,a}$, $y_{l,b}$ служат граничными условиями для системы уравнений (1.1) взамен некоторых из условий (1.6). Условия оптимума по a и b определяют положение концов интервала интегрирования.

5. В качестве примера рассмотрим задачу об оптимизации течения в канале магнитогазодинамического генератора электрической энергии. Постановка и решение этой задачи для течений дозвуковых, сверхзвуковых и течений с ударными волнами приводятся в работах [4,5]. Здесь эта же задача решается при тех же предположениях, что и в [4], но рассматриваются течения с переходом через скорость звука в особенности типа узла. Как показало качественное исследование [3] и расчеты, такое течение возможно в расширяющемся канале при параметре взаимодействия $\Delta \geqslant 1.5$, где $\Delta = \sigma_s{}^\circ B_m{}^\circ l^\circ / (\rho_s{}^\circ \sqrt{2h_s{}^\circ})$ посчитано по плотности $\rho_s{}^\circ$, энтальпии $h_s{}^\circ$, проводимости $\sigma_s{}^\circ$ газа в ресивере, а Bm°, l° — характерные величины напряженности магнитного поля и длины.

Одномерное стационарное течение невязкого, нетеплопроводного совершенного газа электропроводности σ° в плоском канале высотой $2y^\circ$ при внешнем магнитном поле B° (магнитные числа Рейнольдса предполагаются малыми) описывается системой

$$L_1 \equiv \rho u u' + p' + \Delta\sigma B\left(uB - \frac{\varphi}{y}\right) = 0$$
$$L_2 \equiv \left[uy\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}p + \frac{\rho u^2}{2}\right)\right]' + \Delta\sigma\varphi\left(uB - \frac{\varphi}{y}\right) = 0 \qquad (5.1)$$
$$L_3 \equiv (\rho u y)' = 0$$

Здесь обозначения те же, что и в [4]. Положим $\sigma \equiv 1$. Система уравнений (5.1) может быть приведена к виду

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M}{2}\,\frac{2+(\varkappa-1)M^2}{1-M^2}\times \qquad (5.2)$$
$$\times\left[\frac{\varkappa M^2 y}{cu^2}\Delta\left(uB - \frac{\varphi}{y}\right)\left(uB - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{1+\varkappa M^2}{2+(\varkappa-1)M^2}\,\frac{\varphi}{y}\right) - \frac{y'}{y}\right]$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{uM'}{M\,[1+{}^1/_2(\varkappa-1)M^2]} - \frac{(\varkappa-1)\Delta\varphi M^2(uB-\varphi/y)}{cu\,[2+(\varkappa-1)M^2]} \qquad (c = \rho u y)$$

который удобен при численном решении задачи. Здесь M — число Маха

Особые точки системы уравнений (5.2) в пространстве xuM лежат в плоскости $M = 1$ на линии, определяемой уравнениями

$$\varkappa y\Delta\left(uB - \frac{\varphi}{y}\right)\left(uB - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{\varphi}{y}\right) - \frac{cu^2y'}{y} = 0, \qquad M = 1$$

и при $\Delta \geqslant 1.5$ одна из ветвей этой линии состоит из узлов с отрицательными собственными направлениями [3].

Полагая, что течение на входе сверхзвуковое и что входное сечение канала $y_a{}^\circ$ фиксировано, параметры u_a и M_a при $x = 0$ найдем из рассмотрения течения при $x < 0$, которое можно считать известным. Причем величиной u_a (или M_a) можно распоряжаться произвольно в некоторых пределах за счет изменения формы канала при $x < 0$. При открытом цикле работы генератора в выходном сечении задается давление p_∞ среды, в которую происходит истечение. Таким образом, для системы уравнений (5.2) имеем

$$u = u_a, \quad M = M_a \quad (x = 0), \qquad p = cu\,/\,\varkappa M^2 y = p_\infty \quad (x = x_b) \qquad (5.3)$$

Управлениями в задаче являются $y(x)$, $\varphi(x)$, $B(x)$, u_a, p_∞ и длина канала x_b.

В качестве оптимизируемого функционала рассмотрим снимаемую с единицы ширины генератора мощность

$$N = \int_0^{x_b} \Delta\varphi\left(uB - \frac{\varphi}{y}\right)dx$$

Оптимальные управления должны удовлетворять ограничениям, сформулированным в [4] (см. формулы (1.3), (1.6), (1.8)).

Для решения задачи вспомогательный функционал запишем, как и в [4], в виде

$$I = \int_0^{x_b}\left[\Delta\varphi\left(uB - \frac{\varphi}{y}\right) + \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3\right]dx$$

Необходимые условия максимума функционала I, полученные в [4] при $\sigma \equiv 1$, справедливы и для данной задачи, которая отличается от ранее рассмотренных лишь формулировкой граничных условий для системы уравнений (5.2) и уравнений, служащих для нахождения множителей Лагранжа.

Так как особая точка системы (5.2) узел, то для интегрирования системы

$$\frac{d\mu_2}{dx} = \frac{[\Delta B(\mu_1 B + \mu_2\varphi + \varphi) + \mu_1 cy'/y^2](\varkappa-1)M^2}{(1-M^2)cu}, \qquad \frac{d\mu_1}{dx} = -\frac{\varkappa}{\varkappa-1}uy\frac{d\mu_2}{dx} \qquad (5.4)$$

одно граничное условие получаем из требования непрерывности множителей Лагранжа в особой точке

$$\Delta B\,(\mu_1 B + \mu_2\varphi + \varphi) + \mu_1 c y' / y^2 = 0 \qquad (x = x^*) \tag{5.5}$$

а второе, как и в [4], из рассмотрения внеинтегральных членов при $x = x_b$ в выражении для δI

$$\mu_1 = -(\varkappa / \varkappa - 1)\, u y \mu_2 \qquad (x = x_b) \tag{5.6}$$

Множитель μ_3 в данной постановке несуществен.

Численно решалась задача об определении оптимальных $B(x)$, $y(x)$, $\varphi = \mathrm{const}$, p_∞ и x_b для $\sigma \equiv 1$, $\varkappa = 5/3$, $1.5 \leqslant \Delta \leqslant 2$. Максимально допустимый угол наклона стенки канала к оси x был выбран равным 20°, отношение $l^\circ / y_a^\circ = 10$ и максимальная высота канала $Y = 4.64$. Ограничения на φ не налагались. Скорость газа на входе считалась равной скорости звука.

Оптимальное значение $\varphi = \mathrm{const}$ определяется формулой (3.12) работы [4] или эквивалентным дифференциальным уравнением

$$d\chi / dx = \Delta\,[(1 + \mu_2)(uB - \varphi / y) - (\mu_1 B + \mu_2\varphi + \varphi)\, y^{-1}] \tag{5.7}$$

при граничных условиях

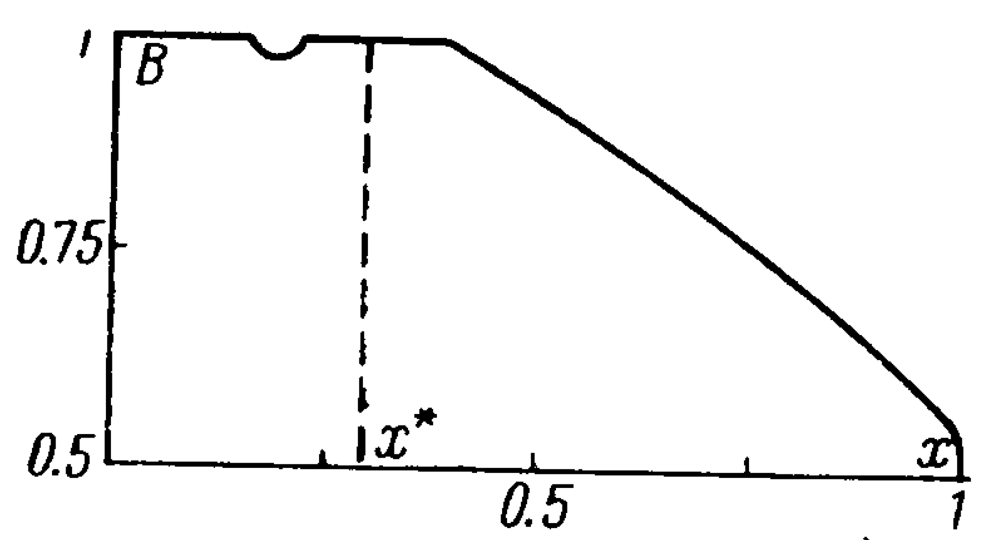
$$\chi(0) = \chi(x_b) = 0 \tag{5.8}$$

Одно из этих условий удовлетворяется за счет выбора φ. Таким образом, необходимо решить краевую задачу для пяти дифференциальных уравнений (5.2), (5.4), (5.7) при граничных условиях (5.3), (5.5), (5.6), (5.8).

Уравнения интегрировались методом Рунге — Кутта от $x = 0$ до $x = x^*$ и от $x = x_b$ до $x = x^*$, причем x бралось за независимую переменную лишь при условии $|M'| < 1$, при $|M'| \geqslant 1$ — за независимую переменную выбиралось M.

Недостающие граничные условия $\mu_1(0)$, $\mu_2(0)$ при интегрировании от 0 до x^* и $u(x_b)$, $\mu_2(x_b)$ при интегрировании от x_b до x^*, а также значение φ подбирались путем пристрелки по пяти параметрам с использованием метода Ньютона.

В малой окрестности особой точки уравнения (5.4) линеаризировались. Выбор такого способа интегрирования диктовался необходимостью получения устойчивого решения в окрестности узла.



Результаты расчета показали, что оптимальными будут $y(x) = kx + 1$, ($k = \mathrm{tg}\, 20° l^\circ / y_a^\circ$), $x_b = 1$, а оптимальное $B(x)$ состоит из участков краевого экстремума $B = 1$ и участков двустороннего экстремума. На фигуре представлено оптимальное $B(x)$ для $\Delta = 2$.

Для сравнения рассчитывалась мощность генератора при $B = 1$ и всех остальных оптимальных параметрах. Оказалось, что при оптимальном $B(x)$ мощность генератора на 8.3% больше, чем при $B = 1$ ($\Delta = 2$).

Автор благодарит А. Г. Куликовского за ценные советы.

Поступила 4 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорости звука. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Hersch R. Boundary Conditions for equations of evolution. Archive for Rat. Mech. and Anal., 1964, vol. 16, № 4, pp. 243.
3. Слободкина Ф. А. Качественное исследование уравнений квазиодномерного магнитогидродинамического течения в каналах. ПМТФ, 1966, № 3.
4. Крайко А. Н., Слободкина Ф. А. К решению вариационных задач одномерной магнитной гидродинамики. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
5. Крайко А. Н., Слободкина Ф. А. К вариационным задачам магнитной гидродинамики. Сб. статей под редакцией В. А. Кириллина и А. Е. Шейндлина «Магнитогидродинамический метод получения электроэнергии». «Энергия», 1968.