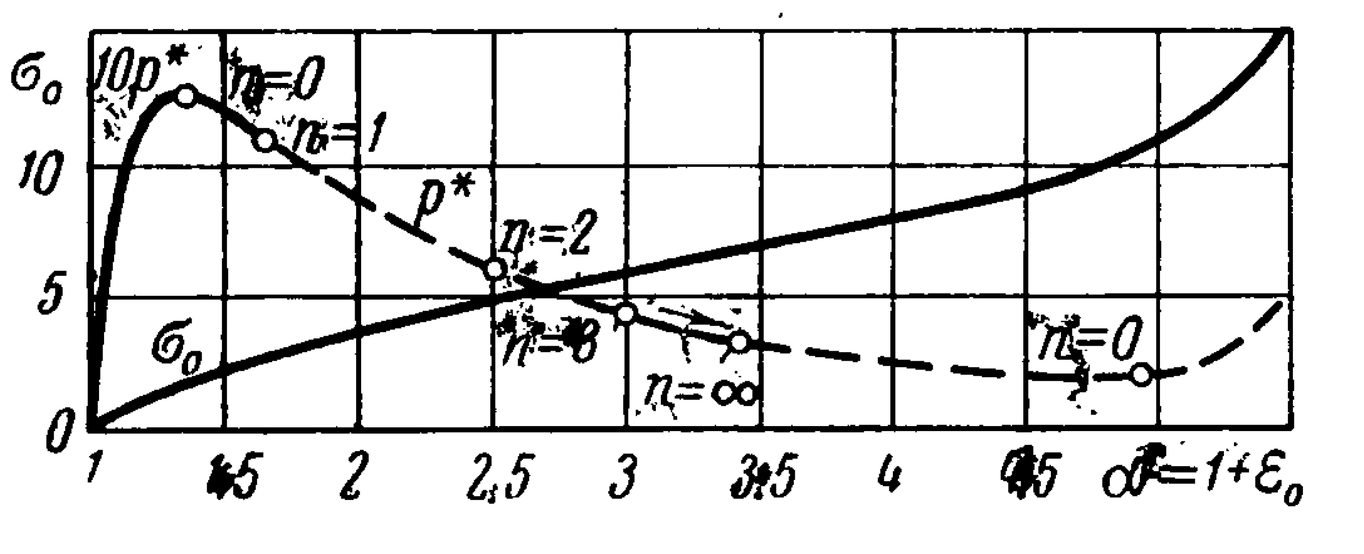
Может случиться, что на нисходящей части кривой $p = f(\alpha)$ располагаются все критические точки, характеризуемые числом n от нуля до бесконечности. На фиг. 5 показаны соответствующие кривые при

$$\frac{C_2}{C_1} = 0.02, \qquad \frac{C_3}{C_1} = 0.04, \qquad \frac{C_4}{C_1} = 0.0005$$



Фиг. 5

Кривая $p = f(\alpha)$ за точкой $n = 1$ показана пунктиром, поскольку здесь закритическое поведение системы неизвестно.

Дальнейшее рассмотрение примеров нецелесообразно, поскольку упругие константы меняются довольно сильно и известны только для некоторых типов резин.

Поступила 20 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
2. Григорьев А. С. Об устойчивости безмоментных оболочек вращения в условиях растяжения. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1, с. 170.
3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1964.
4. Грин А. и Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды, М., «Мир», 1965.
5. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении, т. II, М., Машгиз, 1958.
6. Трелоар Л. Физика упругости каучука. М., Изд-во иностр. лит., 1953.

ПОЛИМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ ТОЛСТЫХ ПЛИТ

Ю. А. Груздев, В. К. Прокопов

(Ленинград)

В статье одного из авторов [1] был дан метод получения дифференциальных уравнений и краевых условий в задачах растяжения и изгиба плит постоянной толщины, основанный на использовании принципа минимума потенциальной энергии в сочетании с символической записью решений уравнений теории упругости, предложенной А. И. Лурье [2–4]. В статье были получены естественным образом дифференциальные уравнения и геометрические краевые условия в общем виде; однако получение силовых краевых условий потребовало производства большого числа громоздких выкладок, резко возрастающих при каждом последующем приближении; вопрос же о получении таких условий в общем виде остался открытым.

Ниже эти затруднения преодолены; интегрирование вариации потенциальной энергии деформации плиты по толщине плиты и введение полимоментных характеристик напряженного состояния существенно упростило анализ и позволило получить в общем виде как геометрические, так и статические краевые условия.

Перемещения точек плиты можно выразить через шесть функций координат x, y, представляющих собой перемещения точек срединной плоскости плиты u_0, v_0, w_0 и «повороты» u_0', v_0', w_0'. А. И. Лурье дал эти выражения в символической форме при помощи операторов дифференцирования

$$\frac{\sin zD}{D}, \qquad \cos zD, \qquad D^2 = \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \qquad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \tag{0.1}$$

Разворачивая символические операторы в ряды по степеням, получим

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}\Delta^n}{(2n)!}u_0-\frac{m}{2(m-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2}\Delta^n}{(2n+1)!}\partial_1\vartheta_0+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}\Delta^n}{(2n+1)!}u_0'-\frac{m}{4(m-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+3}\Delta^n}{(2n+1)!\,(2n+3)}\partial_1\vartheta_0' \tag{0.2}$$

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}\Delta^n}{(2n+1)!}w_0'+\frac{m}{2(m-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+3}\Delta^{n+1}}{(2n+1)!\,(2n+3)}\vartheta_0+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}\Delta^n}{(2n)!}w_0-\frac{m}{4(m-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2}\Delta^n}{(2n+1)!}\vartheta_0'$$

$$\vartheta_0=\partial_1 u_0+\partial_2 v_0+w_0',\qquad \vartheta_0'=\partial_1 u_0'+\partial_2 v_0'-\Delta w_0$$

Здесь m — число Пуассона. Выражение для v получается из u заменой u_0, u_0', ∂_1 на v_0, v_0', ∂_2.

Представляется удобным, следуя А. И. Лурье, разделить задачу о деформации толстой плиты на две независимые задачи: растяжение плиты, определяемое неизвестными функциями u_0, v_0, w_0', и изгиб плиты, который описывается функциями u_0', v_0', w_0.

Обозначим векторы внешних сил, приходящиеся на единицу площади торцовых плоскостей $z=h$, $z=-h$ через $\mathbf{p}^+$ и $\mathbf{p}^-$ соответственно. Проекции этих сил на оси координат x, y, z, вызывающие растяжение плиты, представляются формулами

$$\eta_x=p_x^+ + p_x^-,\qquad \eta_y=p_y^+ + p_y^-,\qquad \zeta=p_z^+ - p_z^-$$

а изгибающие плиту формулами

$$t_x=p_x^+ - p_x^-,\qquad t_y=p_y^+ - p_y^-,\qquad p=p_z^+ + p_z^-$$

Элементарная работа всех внешних сил, приложенных к торцам плиты, определяется выражением

$$\delta A'=\iint\limits_{(\Omega)}(\mathbf{p}^+\cdot\delta\mathbf{u}^+ + \mathbf{p}^-\cdot\delta\mathbf{u}^-)dxdy \tag{0.3}$$

Здесь Ω — площадь плиты в плане, а $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}^-$ — векторы перемещений точек торцовых плоскостей плиты, проекции которых вычисляются по формулам (0.2) с заменой в них переменной z на h или $-h$ соответственно.

§ 1. **Задача о растяжении плиты.** Вариация удельной потенциальной энергии деформации плиты определяется формулой

$$\delta\pi=\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx} \tag{1.1}$$

Выражаем деформации через искомые функции u_0, v_0, w_0', для чего используем известные соотношения между деформациями и производными от перемещений, а также формулы (0.2); тогда имеем

$$\varepsilon_x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}\Delta^n}{(2n)!}\partial_1 u_0-\frac{m}{2(m-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2}\Delta^n}{(2n+1)!}\partial_1^2\vartheta_0$$

$$\varepsilon_z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}\Delta^n}{(2n)!}w_0'+\frac{m}{2(m-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2}\Delta^{n+1}}{(2n+1)!}\vartheta_0 \tag{1.2}$$

$$\gamma_{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}\Delta^n}{(2n)!}(\partial_2 u_0+\partial_1 v_0)-\frac{m}{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2}\Delta^n}{(2n+1)!}\partial_1\partial_2\vartheta_0$$

$$\gamma_{zx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}\Delta^n}{(2n+1)!}(\partial_1 w_0'-\Delta u_0)-\frac{m}{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}\Delta^n}{(2n)!}\partial_1\vartheta_0$$

Деформации ε_y и γ_{zy} получаются из деформаций ε_x и γ_{zx} соответствующей заменой букв.

Для вывода вариации потенциальной энергии растяжения плиты проварьируем выражения (1.2) и подставим результат в формулу (1.1), после чего проинтегрируем полученное соотношение по толщине плиты. При этом удобно ввести следующие статические и сверхстатические характеристики напряжений

$$T_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_{-h}^{h} \sigma_x z^{2n} dz$$

$$T_y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_{-h}^{h} \sigma_y z^{2n} dz, \qquad S^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_{-h}^{h} \tau_{xy} z^{2n} dz \tag{1.3}$$

$$\Gamma_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{-h}^{h} \tau_{zx} z^{2n+1} dz, \qquad \Gamma_y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{-h}^{h} \tau_{yz} z^{2n+1} dz$$

Здесь $T_x^{(0)}$, $T_y^{(0)}$ — растягивающие, $S^{(0)}$ — срезывающие усилия, а $T_x^{(n)}$, $T_y^{(n)}$, $S^{(n)}$ (для $n \geqslant 1$) — их сверхстатические аналоги; $\Gamma_x^{(0)}$, $\Gamma_y^{(0)}$ — бисилы, $\Gamma_x^{(n)}$, $\Gamma_y^{(n)}$ (для $n \geqslant 1$) — бисилы высших порядков.

Введем также обозначения для интегралов

$$\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_{-h}^{h} \sigma_z z^{2n} dz = Z_t^{(n)} \tag{1.4}$$

характеризующих распределение напряжения σ_z по толщине плиты.

Таким образом, используя величины (1.3), (1.4) и формулы (1.2), получаем

$$\int_{-h}^{h} \sigma_x \delta\varepsilon_x dz = T_x^{(0)}\partial_1 \delta u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_x^{(n)}\partial_1 \delta\chi_x^{(n)}$$

$$\int_{-h}^{h} \sigma_z \delta\varepsilon_z dz = Z_t^{(0)}\delta w_0' + \sum_{n=1}^{\infty} Z_t^{(n)}\delta\varphi^{(n)} \tag{1.5}$$

$$\int_{-h}^{h} \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} dz = S^{(0)}\delta\,(\partial_1 v_0 + \partial_2 u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}\delta\,(\partial_1\chi_y^{(n)} + \partial_2\chi_x^{(n)})$$

$$\int_{-h}^{h} \tau_{xz}\delta\gamma_{zx} dz = \Gamma_x^{(0)}\partial_1\delta w_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma_x^{(n)}\partial_1\delta\varphi^{(n)} - \Gamma_x^{(n-1)}\partial_2\delta\chi_x^{(n)})$$

причем интегралы для σ_y и τ_{yz} получаются из интегралов для σ_x и τ_{zx} соответствующей заменой букв и индексов.

В соотношениях (1.5) введены обобщенные координаты

$$\chi_x^{(n)} = \Delta^n u_0 + \frac{nm}{m-2}\partial_1\Delta^{n-1}\vartheta_0, \qquad \chi_y^{(n)} = \Delta^n v_0 + \frac{nm}{m-2}\partial_2\Delta^{n-1}\vartheta_0 \tag{1.6}$$

$$\varphi^{(n)} = \Delta^n w_0' - \frac{nm}{m-2}\Delta^n\vartheta_0$$

соответствующие введенным выше обобщенным силам (1.3). Первые две величины (1.6) можно трактовать как проекции вектора $\chi^{(n)}$, расположенного в срединной плоскости плиты; отметим также, что $\chi_x^{(0)} = u_0$, $\chi_y^{(0)} = v_0$, $\varphi^{(0)} = w_0'$.

Суммируя все интегралы типа (1.5), интегрируя далее по площади плиты Ω и используя формулы перехода от двойных интегралов по области Ω к интегралам по контуру L, окружающему область Ω, получаем следующее выражение для вариации по тенциальной энергии растяжения плиты:

$$\delta\Pi_1 = \oint\limits_{(L)} \Big\{ (\nu_x T_x^{(0)} + \nu_y S^{(0)})\,\delta u_0 + (\nu_x S^{(0)} + \nu_y T_y^{(0)})\,\delta v_0 + (\nu_x \Gamma_x^{(0)} + \nu_y \Gamma_y^{(0)})\,\delta w_0' +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(\nu_x T_x^{(n)} + \nu_y S^{(n)})\,\delta\chi_x^{(n)} + (\nu_x S^{(n)} + \nu_y T_y^{(n)})\,\delta\chi_y^{(n)} +$$

$$+ (\nu_x \Gamma_x^{(n)} + \nu_y \Gamma_y^{(n)})\,\delta\varphi^{(n)}] \Big\}\, ds - \iint\limits_{(\Omega)} \Big\{ (\partial_1 T_x^{(0)} + \partial_2 S^{(0)})\,\delta u_0 +$$

$$+ (\partial_1 S^{(0)} + \partial_2 T_y^{(0)})\,\delta v_0 + (\partial_1 \Gamma_x^{(0)} + \partial_2 \Gamma_y^{(0)} - Z_t^{(0)})\,\delta w_0' +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(\partial_1 T_x^{(n)} + \partial_2 S^{(n)} + \Gamma_x^{(n-1)})\,\delta\chi_x^{(n)} + (\partial_1 S^{(n)} + \partial_2 T_y^{(n)} + \Gamma_y^{(n-1)})\,\delta\chi_y^{(n)} +$$

$$+ (\partial_1 \Gamma_x^{(n)} + \partial_2 \Gamma_y^{(n)} - Z_t^{(n)})\,\delta\varphi^{(n)}] \Big\}\, dx\, dy \qquad (1.7)$$

Перейдем к вычислению работы внешних сил, действующих на торцах плиты, определяемой формулой (0.3); при деформации растяжения плиты имеем $\delta u^+ = \delta u^-$, $\delta v^+ = \delta v^-$, $\delta w^+ = -\delta w^-$; тогда

$$\delta A_1 = \iint\limits_{(\Omega)} \Big\{ \eta_x \delta u_0 + \eta_y \delta v_0 + h\zeta \delta w_0' +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \left[(\eta_x \delta\chi_x^{(n)} + \eta_y \delta\chi_y^{(n)}) + \frac{h\zeta}{2n+1}\,\delta\varphi^{(n)} \right] \Big\}\, dx\, dy \qquad (1.8)$$

Для сил $\mathbf{q}_\nu$, действующих на боковой поверхности, элементарная работа равна

$$\delta A_3 = \int_{-h}^{h} dz \oint\limits_{(L)} \mathbf{q}_\nu \cdot \delta\mathbf{u}\, ds = \int_{-h}^{h} dz \oint\limits_{(L)} (q_{\nu x}\delta u + q_{\nu y}\delta v + q_{\nu z}\delta w)\, ds \qquad (1.9)$$

Изменим порядок интегрирования в формуле (1.9) и выразим вариации δu, δv, δw, применяя формулы (0.2). Произведя интегрирование по толщине плиты и употребляя обозначения статьи [1] для статических и сверхстатических характеристик боковой нагрузки $\mathbf{q}_\nu$, получим

$$\delta A_3 = \oint\limits_{(L)} \Big[R_x^{(0)}\delta u_0 + R_y^{(0)}\delta v_0 + W^{(0)}\delta w_0' +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (R_x^{(n)}\delta\chi_x^{(n)} + R_y^{(n)}\delta\chi_y^{(n)} + W^{(n)}\delta\varphi^{(n)}) \Big]\, ds \qquad (1.10)$$

$$R_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} q_{\nu x} z^{2n} dz, \qquad R_y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} q_{\nu y} z^{2n} dz;$$

$$W^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} q_{\nu z} z^{2n+1} dz \qquad (1.11)$$

Здесь $R_x^{(0)}$, $R_y^{(0)}$ — проекции главного вектора боковой нагрузки на оси x и y, а $W^{(0)}$ — бисила от боковой нагрузки.

Применяя принцип минимума потенциальной энергии, имеем

$$\delta\Pi_1 - \delta A_1 - \delta A_3 = 0 \qquad (1.12)$$

Подставляя величины (1.7), (1.8), (1.10) в соотношение (1.12), получим

$$
\begin{gathered}
\oint\limits_{(L)} \Big\{ (\nu_x T_x{}^{(0)} + \nu_y S^{(0)} - R_x{}^{(0)})\, \delta u_0 + (\nu_x S^{(0)} + \nu_y T_y{}^{(0)} - R_y{}^{(0)})\, \delta v_0 + \\
+ (\nu_x \Gamma_x{}^{(0)} + \nu_y \Gamma_y{}^{(0)} - W^{(0)})\, \delta w_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(\nu_x T_x{}^{(n)} + \nu_y S^{(n)} - R_x{}^{(n)})\, \delta \chi_x{}^{(n)} + \\
+ (\nu_x S^{(n)} + \nu_y T_y{}^{(n)} - R_y{}^{(n)})\, \delta \chi_y{}^{(n)} + (\nu_x \Gamma_x{}^{(n)} + \nu_y \Gamma_y{}^{(n)} - W^{(n)})\, \delta \varphi^{(n)} \Big] \Big\}\, ds - \\
- \iint\limits_{(\Omega)} \Big\{ (\partial_1 T_x{}^{(0)} + \partial_2 S^{(0)} + \eta_x)\, \delta u_0 + (\partial_1 S^{(0)} + \partial_2 T_y{}^{(0)} + \eta_y)\, \delta v_0 + \\
+ (\partial_1 \Gamma_x{}^{(0)} + \partial_2 \Gamma_y{}^{(0)} - Z_t{}^{(0)} + h\zeta)\, \delta w_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\Big(\partial_1 T_x{}^{(n)} + \partial_2 S^{(n)} + \\
+ \Gamma_x{}^{(n-1)} + \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \eta_x \Big) \delta \chi_x{}^{(n)} + \Big(\partial_1 S^{(n)} + \partial_2 T_y{}^{(n)} + \Gamma_y{}^{(n-1)} + \\
+ \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \eta_y \Big) \delta \chi_y{}^{(n)} + \Big(\partial_1 \Gamma_x{}^{(n)} + \partial_2 \Gamma_y{}^{(n)} - Z_t{}^{(n)} + \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \zeta \Big) \delta \varphi^{(n)} \Big] \Big\}\, dx\, dy
\end{gathered} \tag{1.13}
$$

Выражения, стоящие в двойном интеграле в скобках при вариациях δu_0, δv_0, $\delta w_0'$, обращаются в нуль, ибо представляют собой уравнения равновесия. Используя связь между напряжениями и перемещениями, а также формулы (0.2), после соответствующих преобразований получим

$$
\begin{gathered}
\partial_1 T_x{}^{(0)} + \partial_2 S^{(0)} + \eta_x = \int_{-h}^{h} \Big(\partial_1 \sigma_x + \partial_2 \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Big) dz = \\
= \eta_x - 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n \Big[\partial_1 w_0' - \Delta u_0 - (2n+1) \frac{m \partial_1 \vartheta_0}{m-2} \Big] = 0 \\
\partial_1 \Gamma_x{}^{(0)} + \partial_2 \Gamma_y{}^{(0)} - Z_t{}^{(0)} + \zeta h = \int_{-h}^{h} \Big(\partial_1 \tau_{zx} + \partial_2 \tau_{yz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Big) dz = \\
= 4\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \Delta^n \Big(\frac{2nm-1}{m-2} \vartheta_0 - w_0' \Big) + h\zeta = 0
\end{gathered} \tag{1.14}
$$

Коэффициент при вариации δv_0 получается из первой формулы (1.14) соответствующей заменой букв и индексов.

Покажем, что остальные скобки в двойном интеграле (1.13) при вариациях $\delta \chi_x{}^{(n)}$, $\delta \chi_y{}^{(n)}$, $\delta \varphi^{(n)}$ также обращаются в нуль. Действительно, производя аналогичные вычисления, имеем

$$
\begin{gathered}
\partial_1 T_x{}^{(n)} + \partial_2 S^{(n)} + \Gamma_x{}^{(n-1)} + \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \eta_x = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} \Big(\partial_1 \sigma_x + \partial_2 \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Big) z^{2n} dz = \\
= \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \Big\{ \eta_x - 2\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \Big[\partial_1 w_0' - \Delta u_0 - (2k+1) \frac{m \partial_1 \vartheta_0}{m-2} \Big] \Big\} = 0 \\
\partial_1 \Gamma_x{}^{(n)} + \partial_2 \Gamma_y{}^{(n)} - Z_t{}^{(n)} + \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \zeta = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} \Big(\partial_1 \tau_{zx} + \partial_2 \tau_{yz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Big) z^{2n+1} dz = \\
= \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big\{ 4\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \Big[\frac{2km-1}{m-2} \vartheta_0 - w_0' \Big] + \zeta \Big\} = 0
\end{gathered} \tag{1.15}
$$

т. е. опять получаем уравнения равновесия, умноженные на степени h.

Впервые уравнения равновесия для толстой плиты, выраженные через переменные, связанные со срединной плоскостью, были получены в 1942 г. А. И. Лурье [3]. В форме рядов по степеням толщины плиты эти уравнения для задачи о растяжении плиты, имеют следующий вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n \left[\partial_1 w_0' - \Delta u_0 - (2n+1)\frac{m\partial_1\vartheta_0}{m-2}\right] = \frac{\eta_x}{2\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n \left[\partial_2 w_0' - \Delta v_0 - (2n+1)\frac{m\partial_2\vartheta_0}{m-2}\right] = \frac{\eta_y}{2\mu} \tag{1.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \Delta^n \left[w_0' - \frac{2nm-1}{m-2}\vartheta_0\right] = \frac{\zeta}{4\mu}$$

Чтобы задача о растяжении плиты была сформулирована полностью, для трех дифференциальных уравнений бесконечного порядка (1.16), необходимо поставить три бесконечных набора граничных условий. Это оказывается возможным осуществить, так как контурный интеграл (1.13) содержит тройную бесконечность вариаций $\delta\chi_x^{(n)}$ $\delta\chi_y^{(n)}$, $\delta\varphi^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2. \ldots)$. Так, геометрические условия для заделанного края в декартовой системе координат имеют вид

$$\chi_x^{(n)} = 0, \quad \chi_y^{(n)} = 0, \quad \varphi^{(n)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.17}$$

где величины $\chi_x^{(n)}$, $\chi_y^{(n)}, \varphi^{(n)}$ — определены формулами (1.6).

Геометрические условия (1.17) в таком виде были указаны ранее в работе [1]. Из соотношения (1.13) следуют также и силовые граничные условия:

$$\nu_x T_x^{(n)} + \nu_y S^{(n)} = R_x^{(n)}, \quad \nu_x S^{(n)} + \nu_y T_y^{(n)} = R_y^{(n)}, \quad \nu_x \Gamma_x^{(n)} + \nu_y \Gamma_y^{(n)} = W^{(n)} \tag{1.18}$$

Условия (1.17) и (1.18) выражены в проекциях на декартовы оси координат. Нетрудно записать граничные условия в осях, связанных с контуром плиты. Для этого следует воспользоваться соотношениями

$$\chi_\nu^{(n)} = \nu_x \chi_x^{(n)} + \nu_y \chi_y^{(n)}, \quad T_\nu^{(n)} = \nu_x^2 T_x^{(n)} + 2\nu_x\nu_y S^{(n)} + \nu_y^2 T_y^{(n)} \tag{1.19}$$

$$\chi_s^{(n)} = \nu_x \chi_y^{(n)} - \nu_y \chi_x^{(n)}, \quad S_{\nu s}^{(n)} = \nu_x\nu_y (T_y^{(n)} - T_x^{(n)}) + (\nu_x^2 - \nu_y^2) S^{(n)}$$

$$\Gamma_\nu^{(n)} = \nu_x \Gamma_x^{(n)} + \nu_y \Gamma_y^{(n)}, \quad R_\nu^{(n)} = \nu_x R_x^{(n)} + \nu_y^{(n)} R_y^{(n)}, \quad R_s^{(n)} = \nu_x R_y^{(n)} - \nu_y R_x^{(n)}$$

представляющими собой обычные формулы преобразования компонент вектора и тензора при повороте системы координатных осей. При этом контурный интеграл вариационного соотношения (1.13) переписывается в виде

$$\oint_{(L)} \sum_{n=0}^{\infty} [(T_\nu^{(n)} - R_\nu^{(n)})\delta\chi_\nu^{(n)} + (S_{\nu s}^{(n)} - R_s^{(n)})\delta\chi_s^{(n)} + (\Gamma_\nu^{(n)} - W^{(n)})\delta\varphi^{(n)}]\, ds \tag{1.20}$$

из которого вытекают геометрические условия для заделанного края

$$\chi_\nu^{(n)} = 0, \quad \chi_s^{(n)} = 0, \quad \varphi^{(n)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.21}$$

и естественные силовые условия для свободного края

$$T_\nu^{(n)} = R_\nu^{(n)}, \quad S_{\nu s}^{(n)} = R_s^{(n)}, \quad \Gamma_\nu^{(n)} = W^{(n)} \tag{1.22}$$

§ 2. Задача об изгибе плиты. Искомыми функциями задачи изгиба плиты являются величины u_0', v_0' и w_0. Вычисляя по перемещениям (0.2) деформации, получим

$$\varepsilon_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1} \Delta^n}{(2n+1)!} \partial_1 u_0' - \frac{m}{4(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3} \Delta^n}{(2n+1)!\,(2n+3)} \partial_1^2 \vartheta_0'$$

$$\varepsilon_z = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1} \Delta^n}{(2n+1)!} w_0 - \frac{m}{4(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2)\, z^{2n+1} \Delta^n}{(2n+1)!} \vartheta_0'$$

$$\gamma_{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1} \Delta^n}{(2n+1)!} (\partial_1 v_0' + \partial_2 u_0') - \frac{m}{2(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3} \Delta^n}{(2n+1)!\,(2n+3)} \partial_1 \partial_2 \vartheta_0' \qquad (2.1)$$

$$\gamma_{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n} \Delta^n}{(2n)!} (u_0' + \partial_1 w_0) - \frac{m}{2(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3} \Delta^n}{(2n+1)!} \partial_1 \vartheta_0'$$

Формулы для ε_y и γ_{yz} получаются из таковых для ε_x и γ_{zx} соответствующей заменой букв и индексов.

Вводим статические и сверхстатические характеристики напряженного состояния плиты при ее изгибе

$$G_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} \sigma_x z^{2n+1}\, dz, \qquad G_y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} \sigma_y z^{2n+1}\, dz$$

$$H^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} \tau_{xy} z^{2n+1}\, dz \qquad (2.2)$$

$$N_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} \tau_{zx} z^{2n}\, dz, \qquad N_y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} \tau_{yz} z^{2n}\, dz$$

Здесь $G_x^{(0)}$, $G_y^{(0)}$, $H^{(0)}$ — изгибающие и крутящий моменты, $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$ — перерезывающие силы, а $G_x^{(n)}$, $G_y^{(n)}$, $H^{(n)}$, $N_x^{(n)}$ и $N_y^{(n)}$ — их сверхстатические аналоги. Введем также интегральные характеристики распределения напряжения σ_z по толщине плиты

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} \sigma_z z^{2n+1}\, dz = Z_f^{(n)} \qquad (2.3)$$

Вариация потенциальной энергии изгиба плиты после интегрирования по частям и приведения подобных членов при одинаковых вариациях может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_2 = \oint_{(L)} \sum_{n=0}^{\infty} [(\nu_x G_x^{(n)} + \nu_y H^{(n)})\, \delta\psi_x^{(n)} + (\nu_x H^{(n)} + \nu_y G_y^{(n)})\, \delta\psi_y^{(n)} + \\ + (\nu_x N_x^{(n)} + \nu_y N_y^{(n)})\, \delta\xi^{(n)}]\, ds - \iint_{(\Omega)} \{(\partial_1 G_x^{(0)} + \partial_2 H^{(0)} - N_x^{(0)})\, \delta u_0' + \\ + (\partial_1 H^{(0)} + \partial_2 G_y^{(0)} - N_y^{(0)})\, \delta v_0' + (\partial_1 N_x^{(0)} + \partial_2 N_y^{(0)})\, \delta w_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [(\partial_1 G_x^{(n)} + \partial_2 H^{(n)} - N_x^{(n)})\, \delta\psi_x^{(n)} + (\partial_1 H^{(n)} + \partial_2 G_y^{(n)} - N_y^{(n)})\, \delta\psi_y^{(n)} + \\ + (\partial_1 N_x^{(n)} + \partial_2 N_y^{(n)} - Z_f^{(n-1)})\, \delta\xi^{(n)}]\}\, dx\, dy \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Здесь введены сокращения (обобщенные координаты)

$$\psi_x^{(n)} = \Delta^n u_0' + \frac{nm}{2(m-1)} \partial_1 \Delta^{n-1} \vartheta_0'$$

$$\psi_y^{(n)} = \Delta^n v_0' + \frac{nm}{2(m-1)} \partial_2 \Delta^{n-1} \vartheta_0' \tag{2.5}$$

$$\xi^{(n)} = \Delta^n w_0 + \frac{nm}{2(m-1)} \Delta^{n-1} \vartheta_0'$$

Элементарная работа торцовых сил (0.3), при учете формул (0.2) для перемещений имеет следующий вид

$$\delta A_2 = \iint\limits_{(\Omega)} \Big\{ h t_x \delta u_0' + h t_y \delta v_0' + p \delta w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \times \\ \times \Big[p \delta \xi^{(n)} + \frac{h}{2n+1} (t_x \delta \psi_x^{(n)} + t_y \delta \psi_y^{(n)}) \Big] \Big\} dx\, dy \tag{2.6}$$

Для вычисления элементарной работы сил, приложенных к боковой поверхности, воспользуемся введенными в работе [1] статическими и сверхстатическими интегральными характеристиками боковой нагрузки

$$M_x^{(n)} = -\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} q_{\nu y} z^{2n+1} dz$$

$$M_y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{-h}^{h} q_{\nu x} z^{2n+1} dz, \quad Q^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} q_{\nu z} z^{2n} dz \tag{2.7}$$

Тогда

$$\delta A_4 = \oint\limits_{(L)} \sum_{n=0}^{\infty} (M_y^{(n)} \delta \psi_x^{(n)} - M_x^{(n)} \delta \psi_y^{(n)} + Q^{(n)} \delta \xi^{(n)})\, dS \tag{2.8}$$

Подстановка величин (2.4), (2.6) и (2.8) в принцип минимума потенциальной энергии системы

$$\delta \Pi_2 - \delta A_2 - \delta A_4 = 0$$

дает

$$\oint\limits_{(L)} \sum_{n=0}^{\infty} [(\nu_x G_x^{(n)} + \nu_y H^{(n)} - M_y^{(n)}) \delta \psi_x^{(n)} + (\nu_x H^{(n)} + \nu_y G_y^{(n)} + M_x^{(n)}) \delta \psi_y^{(n)} + \\ + (\nu_x N_x^{(n)} + \nu_y N_y^{(n)} - Q^{(n)}) \delta \xi^{(n)}]\, ds - \iint\limits_{(\Omega)} \Big\{ \Big(\partial_1 G_x^{(0)} + \partial_2 H^{(0)} - N_x^{(0)} + \\ + h t_x \Big) \delta u_0' + (\partial_1 H^{(0)} + \partial_2 G_y^{(0)} - N_y^{(0)} + h t_y) \delta v_0' + (\partial_1 N_x^{(0)} + \partial_2 N_y^{(n)} + p) \delta w_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\Big(\partial_1 G_x^{(n)} + \partial_2 H^{(n)} - N_x^{(n)} + \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} t_x \Big) \delta \psi_x^{(n)} + \\ + \Big(\partial_1 H^{(n)} + \partial_2 G_y^{(n)} - N_y^{(n)} + \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} t_y \Big) \delta \psi_y^{(n)} + \\ + \Big(\partial_1 N_x^{(n)} + \partial_2 N_y^{(n)} - Z_f^{(n)} + \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} p \Big) \delta \xi^{(n)} \Big] \Big\} dx\, dy = 0. \tag{2.9}$$

Анализ выражений, стоящих в скобках при вариациях под знаком двойного интеграла (2.9), как и в задаче растяжения, приводит к трем уравнениям равновесия, указанным в символической форме А. И. Лурье [3]; эти уравнения в рядах выражаются следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \Delta^n \left[\partial_1 w_0 + u_0' + \frac{nm\partial_1 \vartheta_0'}{(m-1)\Delta}\right] = \frac{t_x}{2\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \Delta^n \left[\partial_2 w_0 + v_0' + \frac{nm\partial_2 \vartheta_0'}{(m-1)\Delta}\right] = \frac{t_y}{2\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} h^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n \left[\Delta w_0 + \frac{nm+m-1}{2(m-1)} \vartheta_0'\right] = \frac{p}{4\mu} \tag{2.10}$$

Вариационное соотношение (2.9) дает как геометрические, так и естественные (силовые) граничные условия в задаче изгиба толстой плиты. Условия жесткой заделки края толстой плиты (геометрические условия) в декартовых координатах имеют следующий вид:

$$\psi_x^{(n)} = 0, \qquad \psi_y^{(n)} = 0, \qquad \xi^{(n)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

Естественные граничные условия для свободного края плиты (силовые условия) получаются из требования обращения в нуль коэффициентов при вариациях обобщенных координат ($\delta\psi_x^{(n)}$, $\delta\psi y^n$, $\delta\xi^{(n)}$) в контурном интеграле (2.9):

$$\nu_x G_x^{(n)} + \nu_y H^{(n)} = M_y^{(n)}, \quad \nu_x H^{(n)} + \nu_y G_y^{(n)} = -M_x^{(n)}, \quad \nu_x N_x^{(n)} + \nu_y N_y^{(n)} = Q^{(n)}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.12}$$

Условия (2.11) и (2.12) выражены в декартовой координатной системе. Переходя в контурном интеграле (2.9) к осям ν, s, связанным с контуром плиты L, следует применить соотношения

$$\psi_\nu^{(n)} = \nu_x \psi_x^{(n)} + \nu_y \psi_y^{(n)}, \qquad \psi_s^{(n)} = \nu_x \psi_y^{(n)} - \nu_y \psi_x^{(n)}$$
$$G_\nu^{(n)} = \nu_x^2 G_x^{(n)} + 2\nu_x \nu_y H^{(n)} + \nu_y^2 G_y^{(n)}$$
$$H_{\nu s}^{(n)} = \nu_x \nu_y (G_y^{(n)} - G_x^{(n)}) + (\nu_x^2 - \nu_y^2) H^{(n)} \tag{2.13}$$
$$N_\nu^{(n)} = \nu_x N_x^{(n)} + \nu_y N_y^{(n)}, \quad M_\nu^{(n)} = \nu_x M_y^{(n)} - \nu_y M_x^{(n)}, \quad M_s^{(n)} = \nu_x M_x^{(n)} + \nu_y M_y^{(n)}$$

При этом контурный интеграл (2.9) примет следующую форму:

$$\oint_{(L)} \sum_{n=0}^{\infty} [(G_\nu^{(n)} - M_\nu^{(n)}) \delta\psi_\nu^{(n)} + (H_{\nu s}^{(n)} + M_s^{(n)}) \delta\psi_s^{(n)} + (N_\nu^{(n)} - Q^{(n)}) \delta\xi^{(n)}]\, ds \tag{2.14}$$

а вытекающие из него граничные условия:

для жестко заделанного края

$$\psi_\nu^{(n)} = 0, \qquad \psi_s^{(n)} = 0, \qquad \xi^{(n)} = 0 \tag{2.15}$$

для свободного края плиты

$$G_\nu^{(n)} = M_\nu^{(n)}, \qquad H_{\nu s}^{(n)} = -M_s^{(n)}, \qquad N_\nu^{(n)} = Q^{(n)} \tag{2.16}$$

Поступила 10 VII 1967

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопов В. К. Применение символического метода к выводу уравнений теории плит. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5, стр. 902.
2. Лурье А. И. К задаче о равновесии пластины переменной толщины. Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1936, № 6, стр. 57.
3. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3, стр. 151.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955, стр. 146.