

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ РЕЗИНОВОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ

В. И. Феодосьев

(Москва)

Сформулированная в заглавии задача ставилась неоднократно [1-4]. При этом обычно предполагалось, что оболочка в процессе деформации сохраняет сферическую форму. Ниже рассматриваются условия возникновения форм равновесия, отличных от сферической, но близких к ней. Считается, что в докритическом состоянии оболочка получает большое равномерное удлинение, а отклонения от этого состояния являются малыми.

1. Для резины выражение закона деформирования примем в форме [4]

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_1^2 + \frac{\partial W}{\partial I_2'} \lambda_1^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + s \\ \sigma_2 &= \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_2^2 + \frac{\partial W}{\partial I_2'} \lambda_2^2 (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + s \\ \sigma_3 &= \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_3^2 + \frac{\partial W}{\partial I_2'} \lambda_3^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + s\end{aligned} \quad (\lambda_{1,2,3} = 1 + \varepsilon_{1,2,3}) \quad (1.1)$$

Здесь $\lambda_{1,2,3}$ представляют собой степени удлинения, а $\varepsilon_{1,2,3}$ — линейные деформации, на величину которых не накладывается ограничений; I_1 и I_2' — первый и приведенный второй инварианты деформации

$$I_1 = 1/2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 3), \quad I_2' = 2 (I_1 - I_2) = 1/2 (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3) \quad (1.2)$$

Здесь s — произвольная постоянная; ее неопределенность обусловлена предположением о неизменности объема резины при деформировании; W — потенциальная энергия деформации резины на единицу объема.

Функция $W(I_1, I_2')$ определяется путем испытания данного типа резины при нескольких видах напряженного состояния.

Наиболее достоверной является четырехчленная аппроксимация функции W , предложенная В. Л. Бидерманом [5].

$$W = C_1 I_1 + C_2 I_2' - C_3 I_1^2 + C_4 I_1^3 \quad (1.3)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — упругие константы резины, имеющие размерность напряжения. Модуль упругости резины выражается через эти константы следующим образом:

$$E = 3 (C_1 + C_2)$$

При помощи функции (1.3) удается весьма точно представить закон деформирования резины вплоть до разрыва.

Напряженное состояние сферической оболочки двухосное, и $\sigma_3 = 0$. Это дает возможность определить величину s .

После подстановки W (1.3) получаем]

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (C_1 + C_2 \lambda_2^2 - 2C_3 I_1 + 3C_4 I_1^2) (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \\ \sigma_2 &= (C_1 + C_2 \lambda_1^2 - 2C_3 I_1 + 3C_4 I_1^2) (\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\end{aligned} \quad (1.4)$$

Обозначим через σ_0 и ε_0 напряжение и деформацию, возникающие в оболочке в предкритическом состоянии. При переходе к новой форме равновесия эти величины получают малые изменения.

Тогда главные напряжения и деформации будут следующими:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \Delta\sigma_2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_2 \quad (1.5)$$

Соответственно изменятся степени удлинения

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1, \quad \lambda_2 = 1 + \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_2$$

Обозначим

$$1 + \varepsilon_0 = \alpha \quad (1.6)$$

Величина λ_3 определяется из условия неизменности объема

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda_3 = \frac{1}{(\alpha + \Delta \varepsilon_1)(\alpha + \Delta \varepsilon_2)}$$

Вследствие малости $\Delta \varepsilon_1$ и $\Delta \varepsilon_2$ получаем

$$\lambda_1 = \alpha + \Delta \varepsilon_1, \quad \lambda_2 = \alpha + \Delta \varepsilon_2, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2}{\alpha} \right) \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) и (1.5) в (1.2) и (1.4), находим

$$\sigma_0 = \left[C_1 + C_2 \alpha^2 - C_3 \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} - 3 \right) + \frac{3}{4} C_4 \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} - 3 \right)^2 \right] \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^4} \right) \quad (1.8)$$

$$\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 = A (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2), \quad \Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2 = B (\Delta \varepsilon_1 - \Delta \varepsilon_2) \quad (1.9)$$

$$A = 2C_1 \left(\alpha + \frac{2}{\alpha^5} \right) + 2C_2 \alpha \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} \right) - 2C_3 \left[\left(\alpha + \frac{2}{\alpha^5} \right) \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} - 3 \right) + 2\alpha \left(\alpha - \frac{1}{\alpha^5} \right)^2 \right] + 3C_4 \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} - 3 \right) \left[\frac{1}{2} \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} - 3 \right) \left(\alpha + \frac{2}{\alpha^5} \right) + 2\alpha \left(\alpha - \frac{1}{\alpha^5} \right)^2 \right]$$

$$B = 2\alpha \left[C_1 + C_2 \frac{1}{\alpha^4} - C_3 \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} - 3 \right) + \frac{3}{4} C_4 \left(2\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^4} - 3 \right)^2 \right] \quad (1.10)$$

Эти величины играют роль «переменных констант» упругости, зависящих от α .

2. Составим геометрические соотношения. Примем, что оболочка при отклонении от сферической формы остается телом вращения (фиг. 1).

Отрезок дуги меридиана $AB = R d\theta$ после отклонения занимает положение $A'B' = (1 + \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) R d\theta$. Перемещение по нормали будет $w_0 + w$, где w_0 — докритическое перемещение, соизмеримое с радиусом и не зависящее от угла θ , а $w = w(\theta)$ — величина малая. Точно так же малыми являются линейное перемещение u и угловое — ϑ .

Относительные удлинения в меридиональном и окружном направлениях будут

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1 = \frac{w_0}{R} + \frac{w + u'}{R}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_2 = \frac{w_0}{R} + \frac{w' + u \operatorname{ctg} \theta}{R} \quad (2.1)$$

Далее находим главные кривизны и линейризуем полученные выражения по условию малости w :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R\alpha} - \frac{w + w' \operatorname{ctg} \theta}{R^2 \alpha^2}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R\alpha} - \frac{w'' + w}{R^2 \alpha^2} \quad (2.2)$$

Текущая толщина оболочки h^* равна $h\lambda_3$.

Согласно (1.7) получаем

$$\frac{1}{h^*} = \frac{\alpha^2}{h} \left(1 + \frac{\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2}{\alpha} \right) \quad (2.3)$$

3. Составляем уравнения равновесия

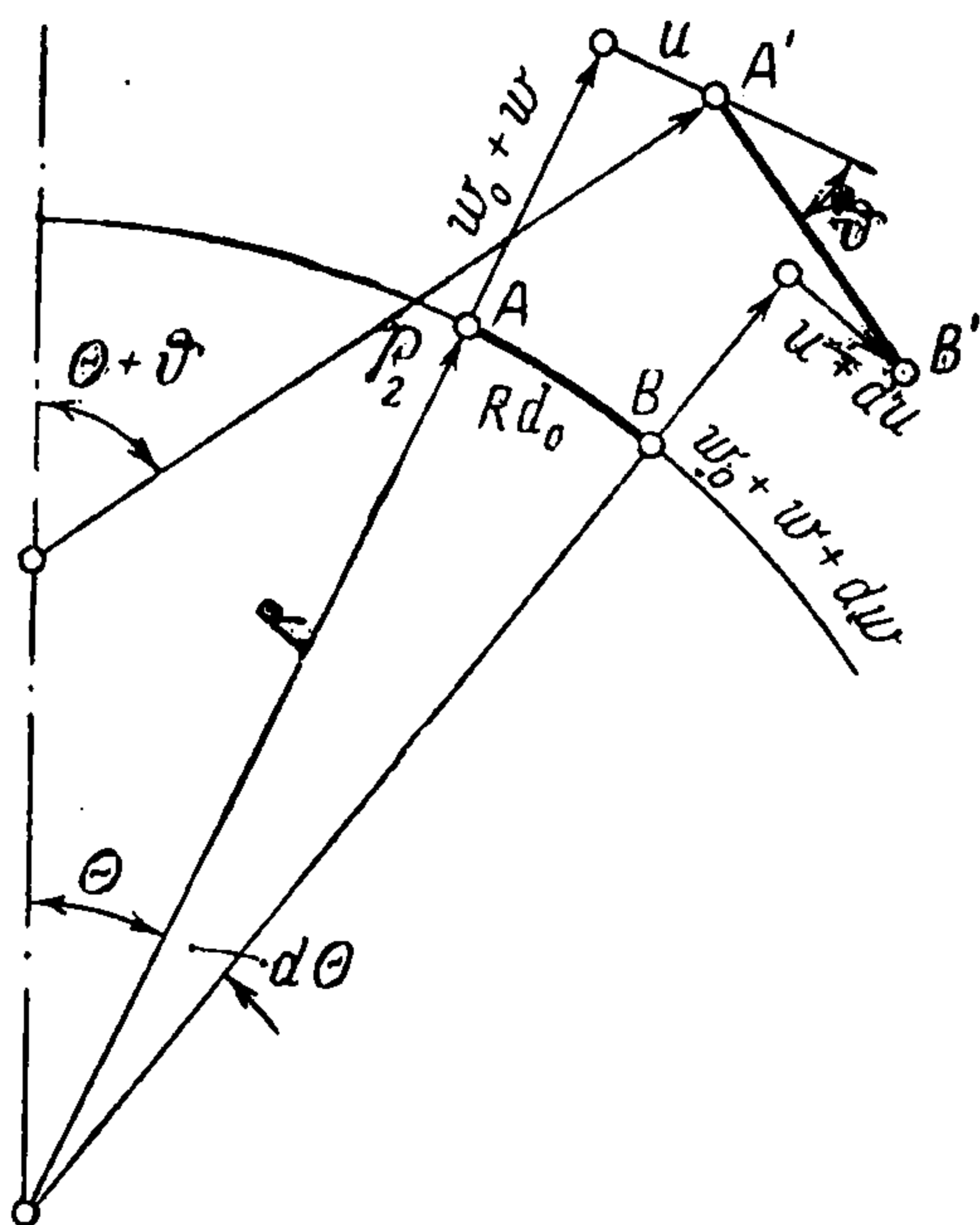
$$\frac{\sigma_0 + \Delta \sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_0 + \Delta \sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h^*}, \quad \frac{\sigma_0 + \Delta \sigma_1}{\rho_2} = \frac{p}{2h^*} \quad (3.1)$$

После подстановки ρ_1 , ρ_2 , h^* и последующей линейризации находим

$$\frac{2\sigma_0}{\alpha^3} = \frac{pR}{h} \quad (3.2)$$

$$\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{R\alpha} (2w + w' \operatorname{ctg} \theta + w'') + \frac{pR}{h} \alpha^2 (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2)$$

$$2\Delta \sigma_1 = 2 \frac{\sigma_0}{R\alpha} (w + w' \operatorname{ctg} \theta) + \frac{pR}{h} \alpha^2 (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2)$$



Фиг. 1.

При помощи (3.2) исключаем в последних двух выражениях давление и переписываем их в форме

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 &= \frac{\sigma_0}{R\alpha} (2w + w' \operatorname{ctg} \theta + w'') + \frac{2\sigma_0}{\alpha} (\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2) \\ \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 &= \frac{\sigma_0}{R\alpha} (w' \operatorname{ctg} \theta - w'')\end{aligned}$$

Согласно (1.9) и (2.1), исключаем $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\varepsilon_1$ и $\Delta\varepsilon_2$. Тогда получим

$$\begin{aligned}(a - 2) (2w + u' + u \operatorname{ctg} \theta) &= 2w + w' \operatorname{ctg} \theta + w'' \\ b (u' - u \operatorname{ctg} \theta) &= w' \operatorname{ctg} \theta - w''\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь

$$a = A\alpha / \sigma_0, \quad b = B\alpha / \sigma_0 \quad (3.4)$$

Из второго уравнения (3.3) следует, что

$$u = -\frac{1}{b} w' + C \sin \theta \quad (3.5)$$

а первое — принимает вид

$$w'' + w' \operatorname{ctg} \theta + n(n + 1)w = K \cos \theta \quad (3.6)$$

$$n(n + 1) = \frac{2b(3 - a)}{a + b - 2}, \quad K = 2C \frac{b(a - 2)}{a + b - 2} \quad (3.7)$$

4. Уравнение (3.6) представляет собой уравнение Лежандра, написанное в канонической форме с правой частью. Поскольку особенности в полюсах сферы отсутствуют, величина n должна принимать целочисленные значения $n = 0, 1, 2, \dots$

Для того чтобы удовлетворить этому условию, необходимо подобрать соответствующую степень удлинения $\alpha = 1 + \varepsilon_0$.

Рассмотрим формы равновесия, соответствующие различным значениям n .

При $n = 0$ получаем $a = 3$, $K = 2Cb / (b + 1)$. Уравнения (3.6) и (3.5) дают

$$w = D - \frac{Cb}{b + 1} \cos \theta, \quad u = \frac{Cb}{b + 1} \sin \theta$$

Функцию $\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$ из рассмотрения исключаем, как не удовлетворяющую условию ограниченности w .

Условимся за неподвижную плоскость считать плоскость экватора, тогда $C = 0$:

$$w = D, \quad u = 0$$

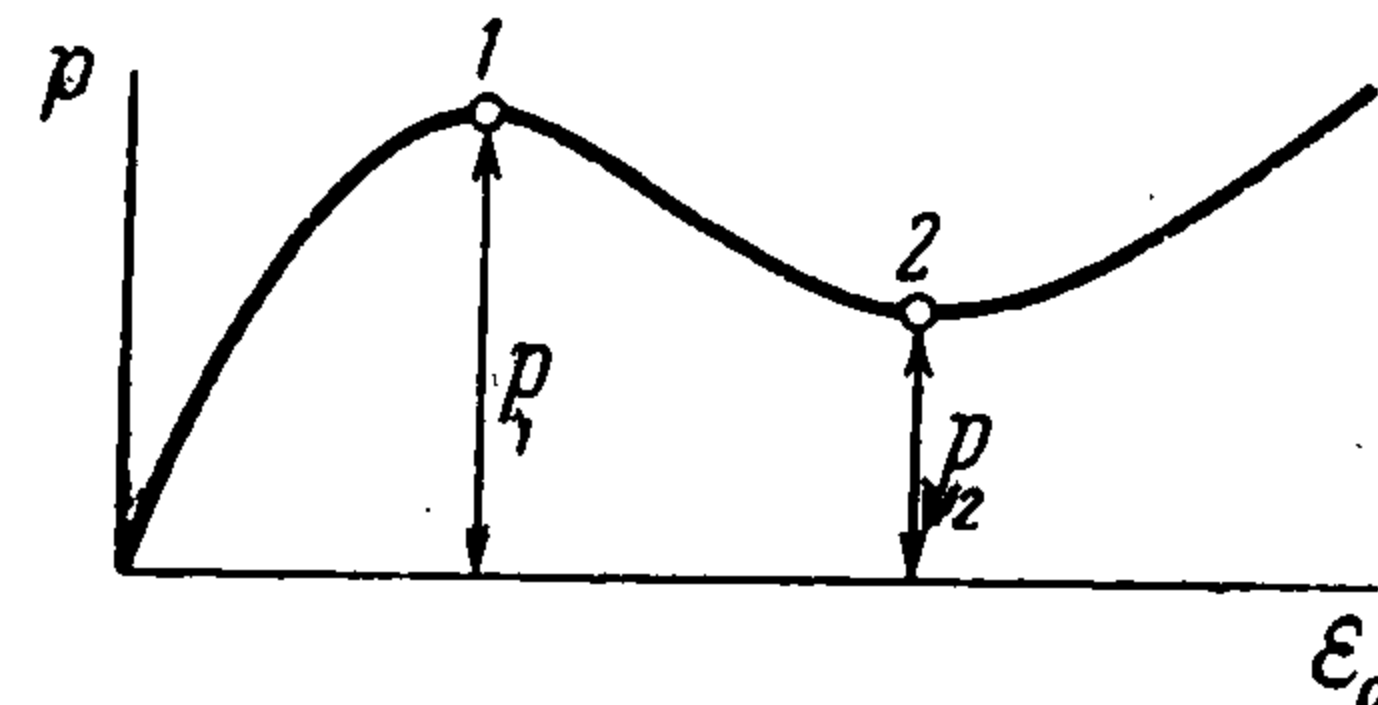
Следовательно, при некотором давлении, наряду с основной сферической формой существует некоторая другая, тоже сферическая, мало от нее отличающаяся. Такое состояние, как нетрудно догадаться, соответствует экстремальным значениям давления p_1 или p_2 (фиг. 2), если таковые существуют.

Действительно, при $n = 0$ величина $a = 3$ и, следовательно, $A = 3\sigma_0 / \alpha$. С другой стороны, определяя экстремум p (3.2), получаем

$$\frac{d\sigma_0}{d\alpha} = \frac{3\sigma_0}{\alpha}$$

Сопоставляя выражения σ_0 (1.8) и A (1.10), убеждаемся, что

$$\frac{d\sigma_0}{d\alpha} = A$$



Фиг. 2

и, следовательно, условие $n = 0$ и условие $dp / d\alpha = 0$ будут тождественными.

Отметим, что при $n = 0$ все выведенные выше соотношения, несмотря на предположение о малости w , пригодны и для описания закритического поведения оболочки, поскольку последняя сохраняет сферическую форму.

При $n = 1$ имеем $a = 2$, $K = 0$. Тогда из (3.6) и (3.5)

$$w = D \cos \theta, \quad u = \frac{D}{b} \sin \theta + C \sin \theta$$

Снова предполагая, что плоскость экватора остается неподвижной, получим $w = D \cos \theta$, $u = 0$. Толщина оболочки h^* становится переменной $h^* = h\lambda_3$. Согласно (1.7) и (2.1)

$$h^* = \frac{h}{\alpha^2} \left(1 - \frac{2D}{R\alpha} \cos \theta \right)$$

Следовательно, при $D > 0$ в верхнем полушарии толщина оболочки уменьшается, а в нижнем увеличивается (фиг. 3).

Для последующих значений n имеем

$$b = \frac{n(n+1)(a-2)}{2(3-a) - n(n+1)}, \quad K = Cn(n+1) \frac{a-2}{3-a}, \quad w = DP_n(\theta) + \frac{K}{n(n+1)-2} \cos \theta$$

$$u = -\frac{D}{b} P_n'(\theta) + \frac{1}{b} \frac{K}{n(n+1)-2} \sin \theta + C \sin \theta$$

где $P_n(\theta)$ — функция Лежандра первого рода.

Как и в двух предыдущих случаях, предполагаем плоскость экватора не смещающейся. Тогда

$$w = D \left[P_n(\theta) + P_n' \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{2(3-a) - n(n+1)}{3(3-a) - n(n+1)} \cos \theta \right]$$

$$u = D \frac{2(3-a) - n(n+1)}{n(n+1)(a-2)} \left[P_n' \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \theta - P_n'(\theta) \right]$$

При $n = 2$

$$P_n(\theta) = \frac{3 \cos 2\theta + 1}{4}, \quad w = \frac{D(3 \cos 2\theta + 1)}{4}, \quad u = D \frac{\sin 2\theta}{2(a-2)}$$

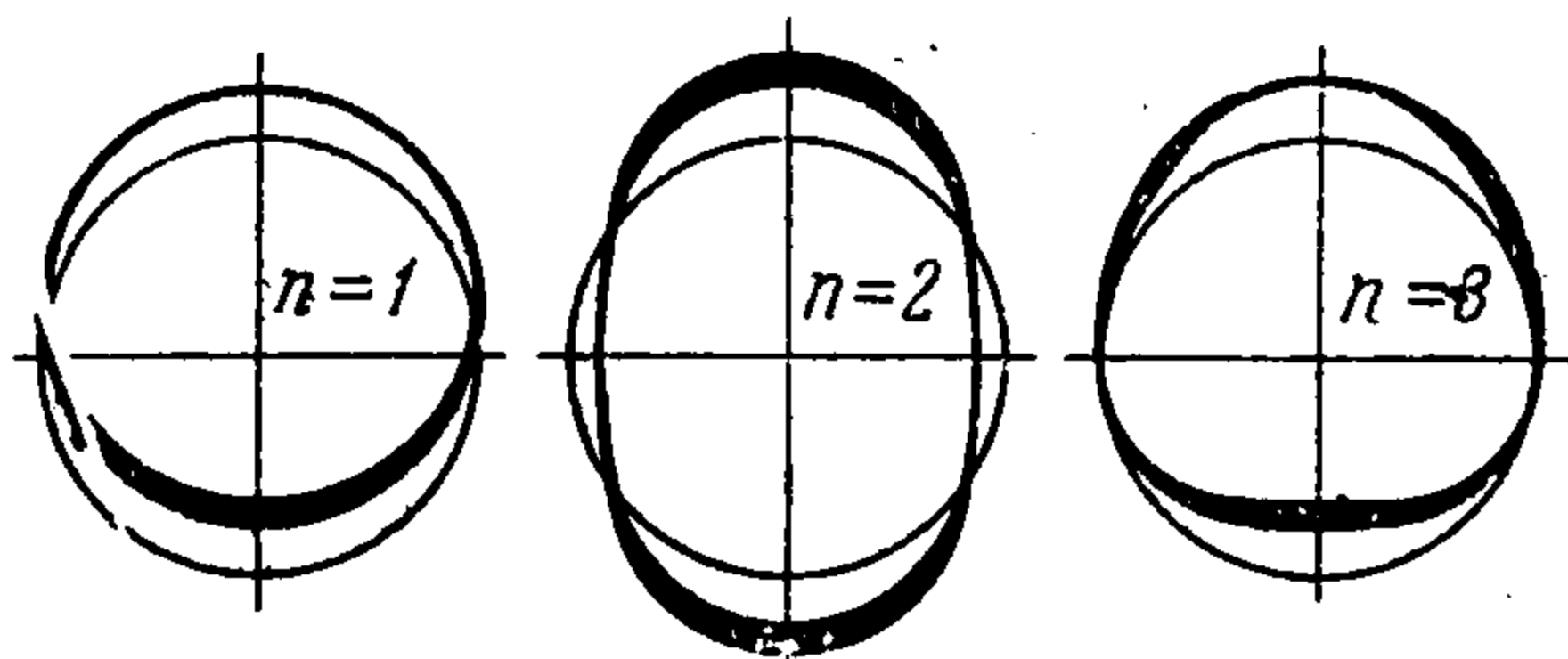
При $n = 3$

$$P_n(\theta) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \sin \theta)$$

$$w = \frac{1}{8} D \left(5 \cos 3\theta + \frac{11a+27}{a+1} \cos \theta \right), \quad u = -D \frac{5}{16} \frac{a+3}{a-2} (\sin 3\theta + \sin \theta)$$

Соответствующие формы равновесия показаны на фиг. 3.

5. Вопрос о том, какие из найденных форм равновесия устойчивы, а какие нет, требует дальнейшего анализа. Однако интуитивные представления подсказывают, что на начальной стадии нагружения устойчивой является сферическая «нулевая» форма ($n = 0$), которая в дальнейшем может перейти к первой форме ($n = 1$). Высшие формы равновесия, по-видимому, неустойчивы и практически не реализуются, если к тому не создано специальных условий.



Фиг. 3

Оценка устойчивости сферической формы равновесия по максимуму давления, как это делается в работах [1,2], не может рассматриваться вне связи с условиями нагружения.

Если внутренняя полость сферы соединена с большой емкостью газа, и давление, следовательно, не зависит от деформации оболочки, то по достижении экстремальной точки (фиг. 2) происходит скачкообразное увеличение объема с последующим разрушением оболочки или переходом на новую восходящую ветвь кривой $p = f(\epsilon)$. При некоторых видах диаграммы растяжения здесь также возможно сохранение сферической устойчивой формы равновесия.

Если же газ во внутреннюю полость подается, как обычно, малыми порциями, то переход через максимум давления не влечет за собой качественных изменений в процессе нагружения и не должен рассматриваться как свидетельство потери устойчивости.

Полученные выше критерии перехода давления через максимум ($n = 0$) и перехода к форме с односторонним утонением ($n = 1$) допускают относительно простую геометрическую интерпретацию.

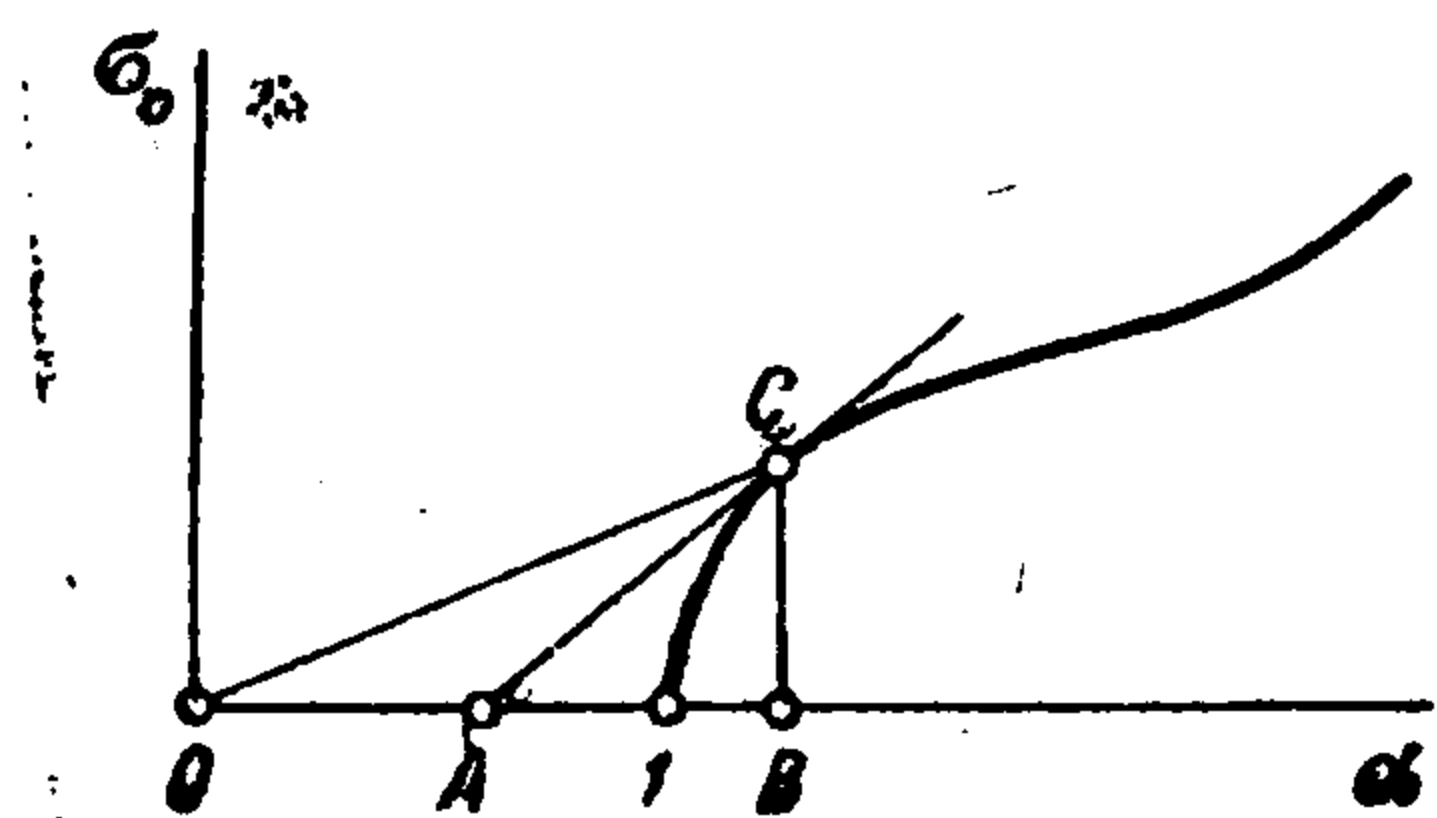
Положим, имеется диаграмма равномерного двухосного растяжения резины $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$, $\sigma_3 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ (фиг. 4). Эта диаграмма при известных константах резины C_1 , C_2 , C_3 и C_4 может быть построена на основе выражения (1.8) или получена непосредственно из эксперимента, постановка которого описана в работе [5].

При $n = 0$ ($a = 3$) происходит переход давления p через экстремум, а при $n = 1$ ($a = 2$) по соседству со сферической [существует форма равновесия с односторонним утонением.

Так как $A = d\sigma_0 / da$, то согласно (3.4)

$$a = \frac{d\sigma_0}{d\alpha} \frac{\alpha}{\sigma_0}$$

Поэтому в соответствии с диаграммой (фиг. 4) величина a определяется отношением отрезков OB к AB , т. е. $a = OB / AB$.



Фиг. 4

По мере удлинения оболочки это отношение уменьшается, начиная с бесконечности. Условие $a = 3$ (если оно возможно) выполняется при меньшей деформации, нежели условие $a = 2$. Это означает, что существованию формы $n = 1$ предшествует переход давления через максимум.

В зависимости от вида кривой может получиться, что ни то, ни другое условие выполняться не будет, либо условие $a = 3$ выполняется (причем, может быть, дважды), а условие $a = 2$ не выполняется, т. е. форма $n = 1$ не существует. В частности, путем несложных выкладок можно убедиться, что это имеет место при двучленной аппроксимации Муни [6] для функции $W = C_1 I_1 + C_2 I_2'$, т. е. при $C_3 = C_4 = 0$.

Если бы диаграмма $\sigma_0 = f(\epsilon_0)$ была линейной, то давление имело бы максимум при $a = 3/2$, т. е. при увеличении диаметра сферы в полтора раза. Переход же к форме $n = 1$ происходил бы при двукратном увеличении диаметра, т. е. при $a = 2$.

Если критическое удлинение известно, то давление определяется по (3.2).

Условия существования форм с $n > 1$ определяются не только величиной a , но и b , и дать им простую геометрическую интерпретацию не удастся. В этом случае следует обратиться к численному определению n по (1.8), (1.10), (3.4) и (3.7).

Для резины из натурального каучука с восемью весовыми частями серы [4] константы

$$C_1 = 3.8 \text{ кг/см}^2, C_2 = 0.2 \text{ кг/см}^2, C_3 = 0.076 \text{ кг/см}^2, C_4 = 3.68 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^2$$

или

$$\frac{C_2}{C_1} = 0.0525, \quad \frac{C_3}{C_1} = 0.02, \quad \frac{C_4}{C_1} = 0.00097$$

Проведя подсчеты, видим, что величина a в этом случае, уменьшаясь от бесконечности, достигает минимального значения $a = 2,3$, а затем снова увеличивается. Это значит, что для оболочки, изготовленной из этой резины, возможна только сферическая форма равновесия. Экстремум давления имеет место при $a = 3$ или

$$p_{\max}^* = \frac{p_{\max} R}{C_1 h} = 1.338, \quad \alpha = 1.399; \quad p_{\min}^* = \frac{p_{\min} R}{C_1 h} = 1.218, \quad \alpha = 3.297$$

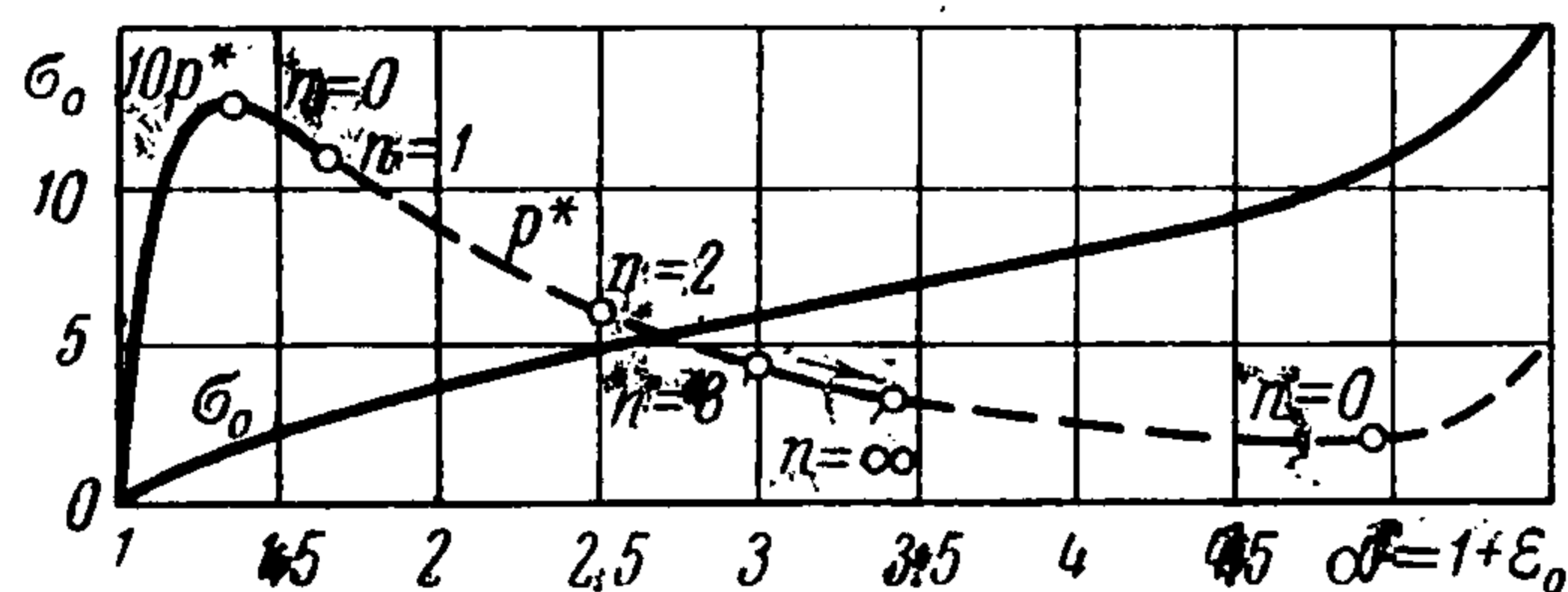
Небольшое изменение в соотношениях констант меняет картину. Так, при

$$C_2/C_1 = 0.02, \quad C_3/C_1 = 0.03, \quad C_4/C_1 = 0.001$$

получаем четыре критические точки

$$\begin{aligned} (n = 0, \alpha = 1.36, p^* = 1.25) & \quad (n = 1, \alpha = 1.79, p^* = 1.05) \\ (n = 1, \alpha = 2.84, p^* = 0.63) & \quad (n = 0, \alpha = 3.75, p^* = 0.53) \end{aligned}$$

Может случиться, что на нисходящей части кривой $p = f(\alpha)$ располагаются все



Фиг. 5

критические точки, характеризуемые числом n от нуля до бесконечности. На фиг. 5 показаны соответствующие кривые при

$$\frac{C_2}{C_1} = 0.02, \quad \frac{C_3}{C_1} = 0.04, \quad \frac{C_4}{C_1} = 0.0005$$

Кривая $p = f(\alpha)$ за точкой $n = 1$ показана пунктиром, поскольку здесь закритическое поведение системы неизвестно.

Дальнейшее рассмотрение примеров нецелесообразно, поскольку упругие константы меняются довольно сильно и известны только для некоторых типов резин.

Поступила 20 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Р ж а н и ц ы н А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
2. Г р и г о р ь е в А. С. Об устойчивости безмоментных оболочек вращения в условиях растяжения. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1, с. 170.
3. П а н о в к о Я. Г., Г у б а н о в а И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1964.
4. Г р и н А. и А д к и н с Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды, М., «Мир», 1965.
5. П о н о м а р е в С. Д., Б и д е р м а н В. Л., Л и х а р е в К. К., М а к у ш и н В. М., М а л и н и н Н. Н., Ф е о д о с ь е в В. И. Расчеты на прочность в машиностроении, т. II, М., Машгиз, 1958.
6. Т р е л о а р Л. Физика упругости каучука. М., Изд-во иностр. лит., 1953.

ПОЛИМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ ТОЛСТЫХ ПЛИТ

Ю. А. Груздев, В. К. Прокопов

(Ленинград)

В статье одного из авторов [1] был дан метод получения дифференциальных уравнений и краевых условий в задачах растяжения и изгиба плит постоянной толщины, основанный на использовании принципа минимума потенциальной энергии в сочетании с символической записью решений уравнений теории упругости, предложенной А. И. Лурье [2-4]. В статье были получены естественным образом дифференциальные уравнения и геометрические краевые условия в общем виде; однако получение силовых краевых условий потребовало производства большого числа громоздких выкладок, резко возрастающих при каждом последующем приближении; вопрос же о получении таких условий в общем виде остался открытым.

Ниже эти затруднения преодолены; интегрирование вариации потенциальной энергии деформации плиты по толщине плиты и введение полимоментных характеристик напряженного состояния существенно упростило анализ и позволило получить в общем виде как геометрические, так и статические краевые условия.

Перемещения точек плиты можно выразить через шесть функций координат x, y , представляющих собой перемещения точек срединной плоскости плиты u_0, v_0, w_0 и «повороты» u_0', v_0', w_0' . А. И. Лурье дал эти выражения в символической форме при помощи операторов дифференцирования

$$\frac{\sin zD}{D}, \quad \cos zD, \quad D^2 = \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad (0.1)$$