

Доказательство такое же, как и в теореме 1, следует только заменить пространства H_1 на H_3 и H_2 на H_4 .

Автор приносит благодарность И. И. Воровичу и В. И. Юдовичу за помощь в работе.

Поступила 20 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Reissner E. On Axisymmetrical Deformation of thin Shells of Revolution Proc. Symp., in Appl. Math. Elast. 1950, vol. 3, pp. 27—52.
2. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1955, т. 19, № 4, стр. 173—186.
3. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2, стр. 203—206.
4. Лерэй Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. Усп. матем. наук, 1946, т. 1, вып. 3,4 (13,14), стр. 71—95.
5. Ладженская О. А., Уралцева П. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОЛОГОГО СФЕРИЧЕСКОГО КУПОЛА

И. И. Ворович, Н. И. Минакова

(Ростов-на-Дону)

Предлагается вариант уравнений больших деформаций непологой сферической оболочки, аналогичный варианту уравнений В. И. Феодосьева [1] для пологих оболочек.

Разрабатываются пути преодоления трудностей, возникающих при использовании метода Бубнова — Галеркина в варианте Папковича. Для определения кривой нагружения используется метод перехода к задаче Коши. Детально исследуется практическая сходимость метода Бубнова — Галеркина в этой задаче. Поскольку решение задачи определяется в этом случае двумя параметрами λ и θ_0 , где θ_0 — угол наклона недеформированной срединной поверхности в заделке, $\lambda = R\theta_0^2/h$, R — радиус срединной поверхности, h — толщина оболочки, то приводятся результаты анализа поведения оболочки при разных λ и θ_0 в диапазоне $0 < \theta_0 \leq 0.7$, $0 \leq \lambda \leq 70$.

Даны таблицы верхних и нижних критических давлений. Результаты сравниваются с результатами, полученными по теории пологих оболочек и по другим теориям.

1. Будем рассматривать большие осесимметричные деформации непологой сферической оболочки, нагруженной равномерно распределенным внешним давлением. В основу положим следующие приближенные соотношения связи между перемещениями и деформациями:

$$u = u_0 + \frac{z}{R} \left(u_0 - \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right), \quad w = w_0, \quad z = r - R \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} + z\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + z\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} = \frac{1}{R \sin \theta} (w_0 \sin \theta + u_0 \cos \theta), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \quad (1.4)$$

Здесь u_0 , w_0 — соответственно, тангенциальное и нормальное перемещения точек срединной поверхности, R — радиус срединной поверхности, r — текущий радиус, θ — полярный угол (фиг. 1).

Связь между составляющими деформациями и усилиями возьмем в следующей форме:

$$T_1 = E_1 (\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}), \quad T_2 = E_1 (\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}) \quad (E_1 = Eh / (1 - \mu^2)) \quad (1.5)$$

$$M_1 = E_2 (\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} + \mu\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}), \quad M_2 = E_2 (\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + \mu\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}) \quad (E_2 = Eh^3 / 12 (1 - \mu^2)) \quad (1.6)$$

Здесь T_1, T_2 — тангенциальные усилия, M_1, M_2 — изгибающие моменты, E_1 — жесткость оболочки на растяжение, E_2 — жесткость оболочки на изгиб.

Формулы (1.5) — (1.6) получены на основе закона Гука.

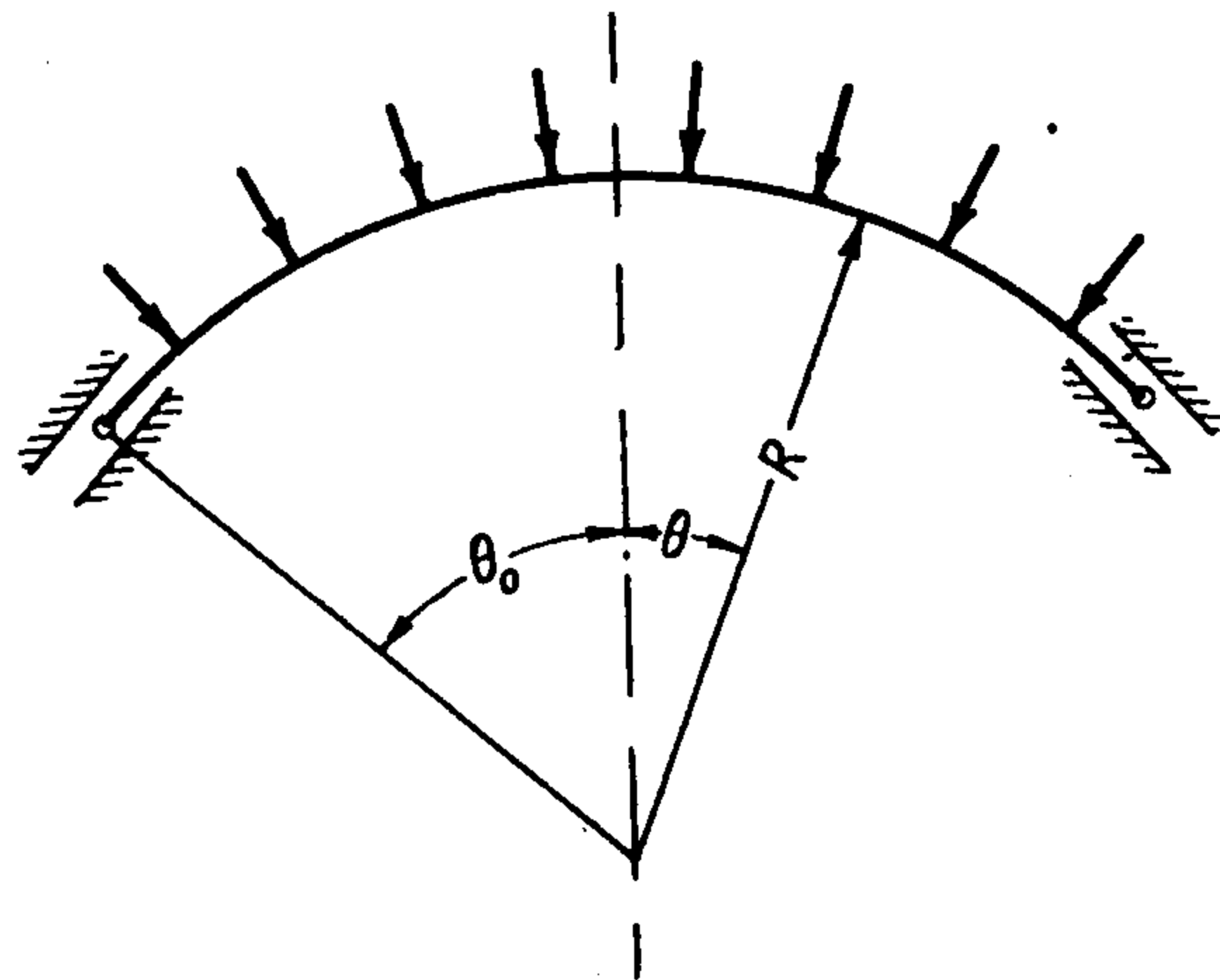
Тогда из принципа Лагранжа вытекает следующая система уравнений равновесия оболочки:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2) \operatorname{ctg} \theta = 0 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_1}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial M_1}{\partial \theta} - \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) \operatorname{ctg} \theta - (M_1 - M_2) - \\ & - R(T_1 + T_2) - R^2 T_1 \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} - \omega R T_2 \operatorname{ctg} \theta - q R^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь ω — угол поворота нормали к срединной поверхности [$r = R$, который дается соотношением:

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \quad (1.9)$$



Фиг. 1

При выводе уравнений (1.7), (1.8) не производилось отождествление внутренней геометрии оболочки с геометрией на плоскости, что отличает данную систему от известных вариантов уравнений равновесия теории пологих оболочек.

Будем рассматривать шарнирно-скользящую заделку, которой соответствуют граничные условия: при $\theta = \theta_0$, где θ_0 — угол, характеризующий место заделки купола (фиг. 1)

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \mu \operatorname{ctg} \theta \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad w = 0, \quad \psi = 0 \quad (1.10)$$

Здесь ψ — функция напряжений

$$T_1 = \frac{\psi}{\sin \theta}, \quad T_2 = \frac{1}{\cos \theta} \frac{d\psi}{d\theta} \quad (1.11)$$

Если теперь подставить (1.3), (1.4), (1.6) и (1.11) в (1.8), затем принять $dw/d\theta = \varphi$ и вновь полученное уравнение проинтегрировать по θ в пределах от 0 до θ , то окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{E_2}{R^2} \left[\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d\varphi}{d\theta} - \varphi (\mu + \operatorname{ctg}^2 \theta) \right] - \frac{\varphi \psi}{\sin \theta} + \\ & + \frac{R}{\sin \theta} \int_0^\theta \frac{d/d\theta (\psi \sin \theta)}{\cos \theta} d\theta + 2qR^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\sin \theta} = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

В уравнение (1.12) входят две неизвестные функции w и ψ . Вторым соотношением, связывающим w и ψ , будет уравнение совместности, чтобы его получить, подставим (1.1) — (1.4) в (1.11) и исключим u , в результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + \frac{d\psi}{d\theta} (\operatorname{ctg} \theta + 2 \operatorname{tg} \theta) - \psi (\operatorname{ctg}^2 \theta + \mu) + \\ & + \frac{E_1 (1 - \mu^2)}{R} \left[\frac{\cos^2 \theta}{2R \sin \theta} \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 - \cos \theta \frac{dw}{d\theta} - w \sin \theta \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Введем безразмерные величины при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{Eh^3}{R^2 \varepsilon} \Psi_0, \quad \varphi = -\frac{h}{\varepsilon} \Phi_0, \quad w = -hw_0, \quad \lambda = \frac{R\varepsilon^2}{h} \\ \theta &= \rho\varepsilon, \quad \varepsilon = \theta_0, \quad w_0 = \int_1^\rho \Phi_0(t) dt, \quad q_0 = \frac{q}{E} \left(\frac{R\varepsilon}{h} \right)^4 \end{aligned}$$

Уравнения (1.12), (1.13) и граничные условия (1.10) представим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_0}{d\theta^2} \frac{\sin \varepsilon \rho}{\varepsilon} + \frac{d\psi_0}{d\theta} (\cos \varepsilon \rho + 2 \frac{\sin^2 \varepsilon \rho}{\cos \varepsilon \rho}) - \psi_0 \left(\mu \varepsilon \sin \varepsilon \rho + \frac{\varepsilon \cos^2 \varepsilon \rho}{\sin \varepsilon \rho} \right) = \\ = \varphi_0 \frac{\sin 2\varepsilon \rho}{2\varepsilon} \lambda + \lambda \sin^2 \varepsilon \rho w_0 + \frac{\varphi_0^2 \cos^2 \varepsilon \rho}{2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{d^2\varphi_0}{d\theta^2} \frac{\sin \varepsilon \rho}{\varepsilon} + \frac{d\varphi_0}{d\theta} \cos \varepsilon \rho - \varphi_0 \left(\mu \varepsilon \sin \varepsilon \rho + \frac{\varepsilon \cos^2 \varepsilon \rho}{\sin \varepsilon \rho} \right) \right] = \\ = -12 \left[\varphi_0 \psi_0 + \lambda \int_0^\rho \frac{d/dt (\psi_0 (\sin \varepsilon t) / \varepsilon)}{\cos \varepsilon t} dt \right] + 6q_0 \rho^2 \left(\frac{2 \sin \varepsilon \rho / 2}{\varepsilon \rho} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\left[\frac{d\varphi_0}{d\theta} + \mu \varepsilon \varphi_0 \operatorname{ctg} \varepsilon \rho \right]_{\rho=1} = 0, \quad w_0|_{\rho=1} = 0, \quad \psi_0|_{\rho=1} = 0 \quad (1.16)$$

2. Допустим, что необходимо определить кривую нагружения купола, т. е. найти зависимость q_0 от своего безразмерного перемещения в центре $w_0|_{\rho=0} = f$. Легко видеть, что f определяется соотношением:

$$f = \int_0^1 \varphi_0(t) dt \quad (2.1)$$

Систему (1.14), (1.15) будем решать методом Бубнова — Галеркина. Положим:

$$\varphi_0 = \sum_{i=0}^N C_{i+1} (\rho^{2i+3} - \gamma_i \rho^{2i+1}) \quad \left(\gamma_i = \frac{2i+3 + \mu \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon}{2i+1 + \mu \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon} \right) \quad (2.2)$$

При этом выполняются граничные условия (1.16).

Нужно отметить, что применение процедуры Папковича в данном случае затруднено в отличие от случая пологих оболочек, так как уравнение (1.14) есть уравнение с переменными коэффициентами. Если учесть соотношение (2.2), то для φ_0 и w_0 получаем следующие выражения:

$$\varphi_0 = \sum_{i=0}^N A_i \rho^{2i+1} \quad (A_i = C_i - \gamma_i C_{i+1}, C_0 = 0) \quad (2.3)$$

$$w_0 = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{2i+2} \rho^{2i+2} - w_1 \quad \left(w_1 = \sum_{i=0}^N C_{i+1} \left(\frac{1}{2i+4} - \frac{\gamma_i}{2i+2} \right) \right) \quad (2.4)$$

Таким образом, правая часть (1.14) есть некоторая целая функция ρ :

$$\frac{d^2\psi_0}{d\theta^2} \frac{\sin \varepsilon \rho}{\varepsilon} + \frac{d\psi_0}{d\theta} \left(\cos \varepsilon \rho + 2 \frac{\sin^2 \varepsilon \rho}{\cos \varepsilon \rho} \right) - \psi_0 \left(\mu \varepsilon \sin \varepsilon \rho + \frac{\varepsilon \cos^2 \varepsilon \rho}{\sin \varepsilon \rho} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \rho^{2n+2} \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.5) естественно разыскивать в виде:

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \psi_n(\rho) \quad (\psi_n = \psi_n^* - \delta_n \psi_n^{**}) \quad (2.6)$$

$$\psi_n^* = \rho^{2n+3} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(n)} \rho^{2k}, \quad \psi_n^{**} = \rho \sum_{k=0}^{\infty} e_k \rho^{2k} \quad (2.7)$$

Здесь ψ_n^* — частное решение неоднородного уравнения (2.5), а ψ_n^{**} — общее решение соответствующего однородного уравнения. Произвольные постоянные

$$\delta_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(n)} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k \right)^{-1} \quad (2.8)$$

определяются из условия $\psi_0|_{\rho=1} = 0$.

Подставляя (2.6) — (2.8) в (2.5) и приравнявая коэффициенты левой и правой частей преобразованного уравнения при одинаковых степенях ρ , найдем:

$$d_0^{(n)} = \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \quad (2.9)$$

$$d_k^{(n)} = -\frac{1}{4(n+k+1)(n+k+2)} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s=0}^{k-1} d_s^{(n)} \frac{(e^2)^{k-s}}{(2k-2s)!} [(2n+2s+3) 2 |E_{2k-2s}| - (4^{k-s} - 2) |B_{2k-2s}|] - \right.$$

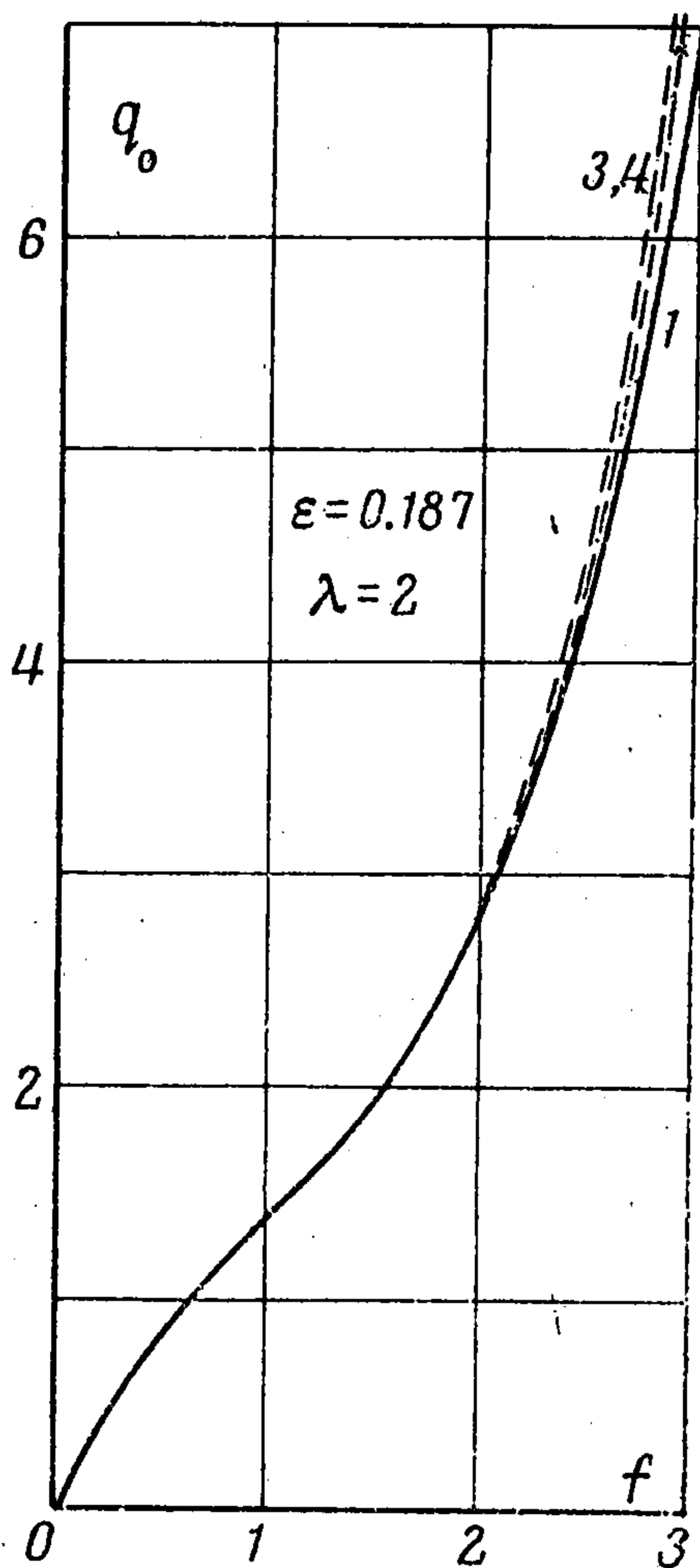
$$\left. - \sum_{s=0}^{k-1} d_s^{(n)} \frac{(-e^2)^{k-s}}{(2k-2s-1)!} \left[(1-\mu) + \frac{n+s+1.5}{k-s} - \frac{(n+s+1.5)(n+s+1)}{(k-s)(k-s+0.5)} \right] \right\}, \quad k \geq 1$$

$$e_0 = 1, \quad e_k = d_k^{(1)}, \quad k \geq 1 \quad (2.11)$$

Здесь E_n — числа Эйлера, B_n — числа Бернулли.

Соотношения (2.9) — (2.11) верны, когда $\theta < 1/2 \pi$. Подставим (2.2), (2.6) в левую часть (1.15) и потребуем, чтобы получившееся выражение было ортогонально $(\rho^{2r+3} - \gamma_r \rho^{2r+1})$, $r = 1, 2, \dots, N$.

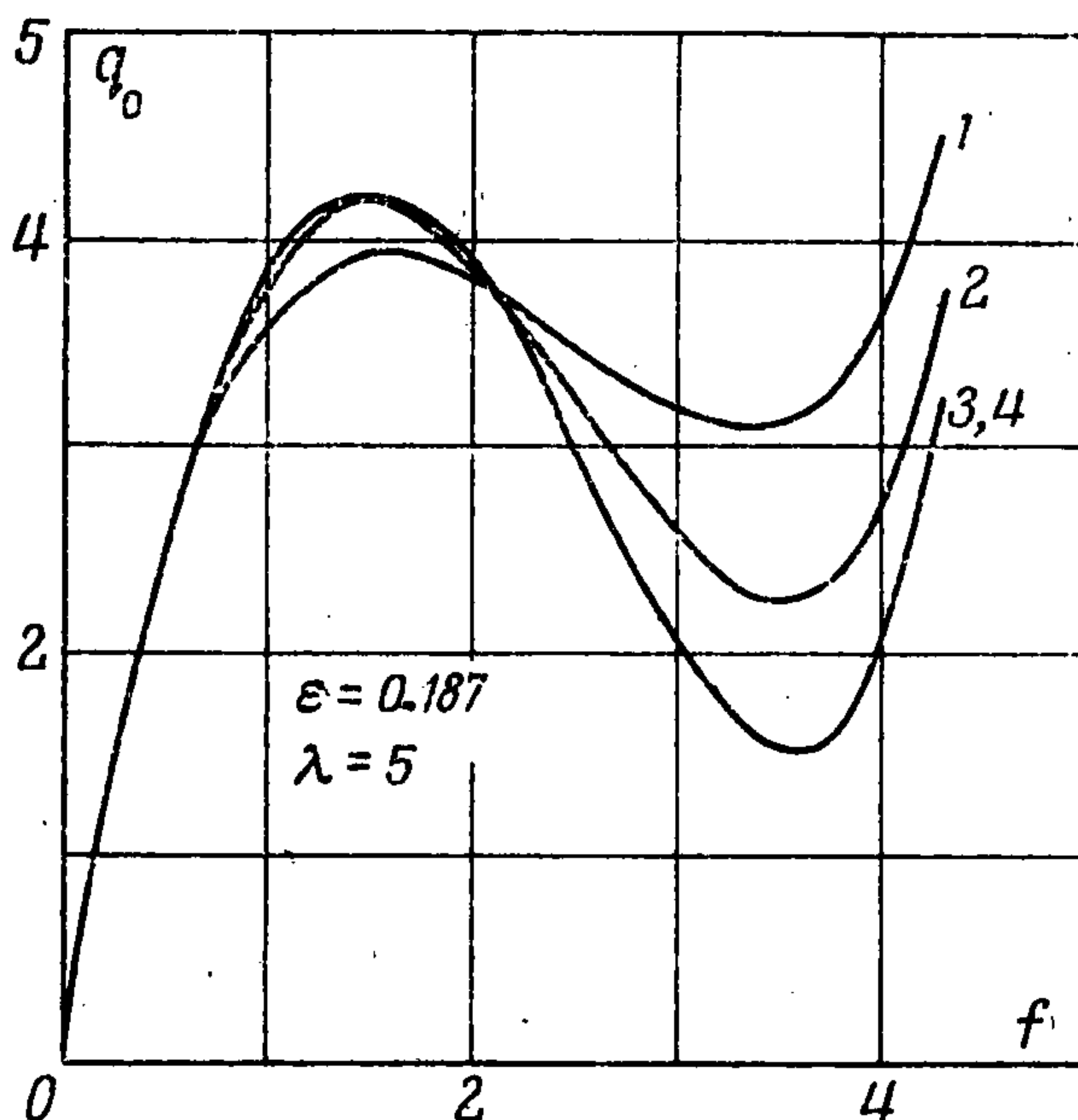
Таким образом, получим алгебраическую систему уравнений третьей степени для определения C_{i+1} :



Фиг. 2

$$\sum_{i=0}^N C_{i+1} [A_{im}^{(1)} + \lambda^2 A_{im}^{(2)}] + \lambda \sum_{i=0}^N \sum_{n=0}^N C_{i+1} C_{n+1} A_{imn} +$$

$$+ \sum_{i=0}^N \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^N C_{i+1} C_{n+1} C_{j+1} A_{ijnm} = A_m q_0 \quad (2.12)$$

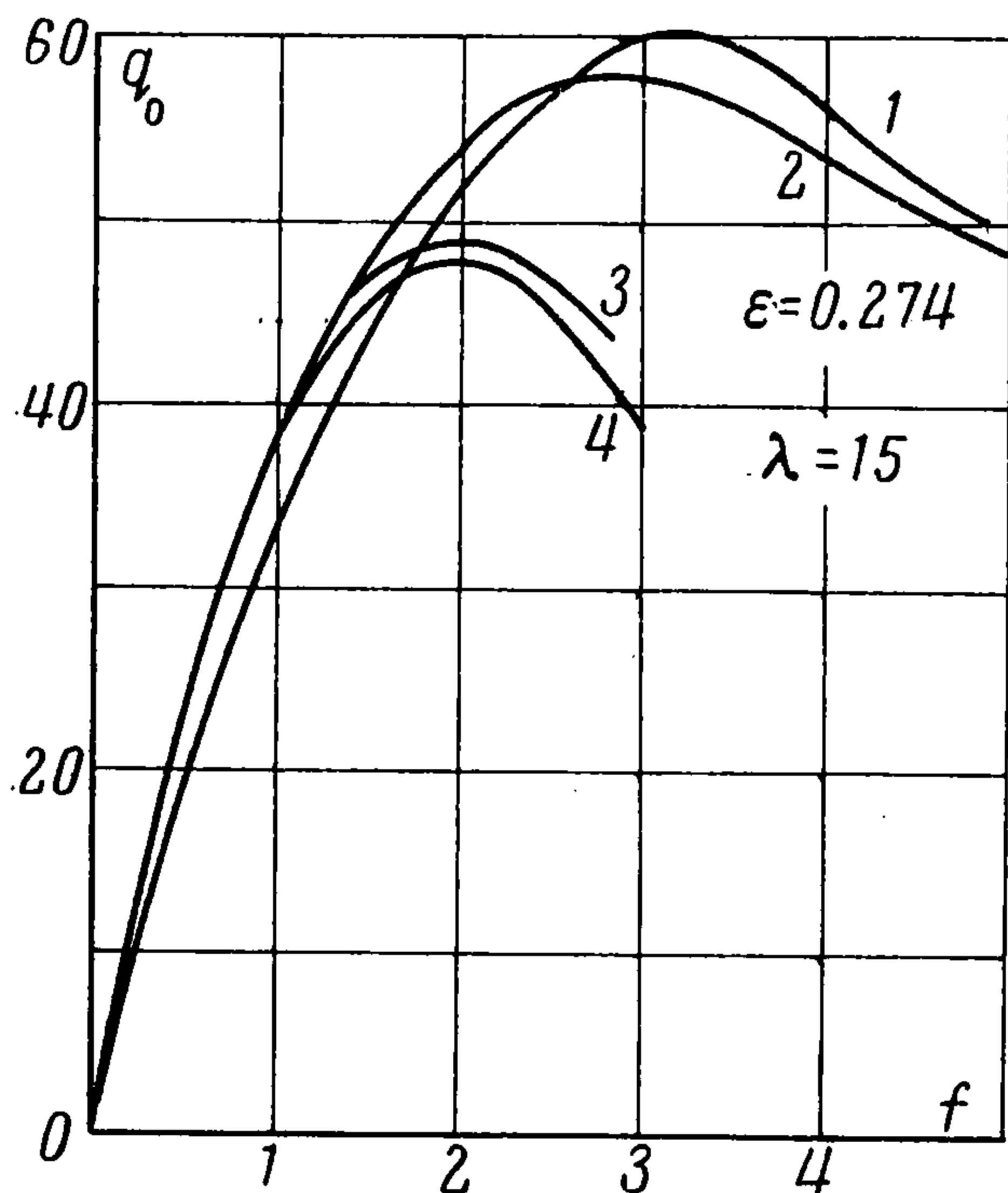


Фиг. 3

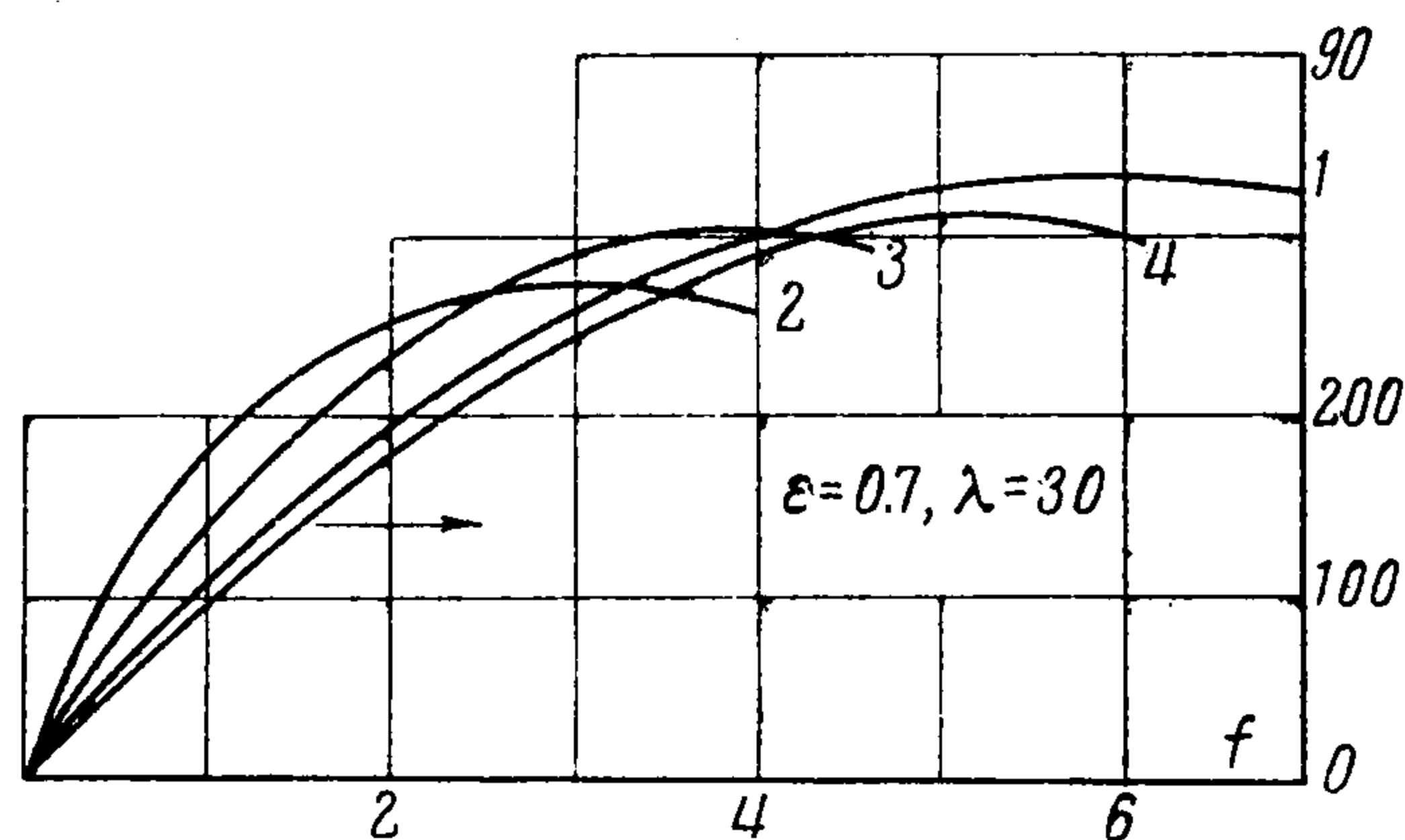
Коэффициенты $A_{im}^{(1)}$, $A_{im}^{(2)}$, A_{imn} , A_{ijnm} зависят от параметра $\epsilon = \theta_0$. Следовательно, рассматриваемая нелинейная задача устойчивости в этом случае будет двухпараметрической (параметры $\lambda = R\theta_0^2 / h$ и $\epsilon = \theta_0$), что значительно усложняет исследование проблемы.

Для определения C_{n+1} и q_0 используем идею, изложенную применительно к исследованию пологого сферического купола в работе [2]. В качестве независимого параметра может быть принято либо безразмерное перемещение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} \left(\frac{\gamma_k}{2k+2} - \frac{1}{2k+4} \right) \quad (2.13)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

либо безразмерное давление q_0 . Соответственно, из (2.12), (2.13) получим следующие две системы дифференциальных уравнений:

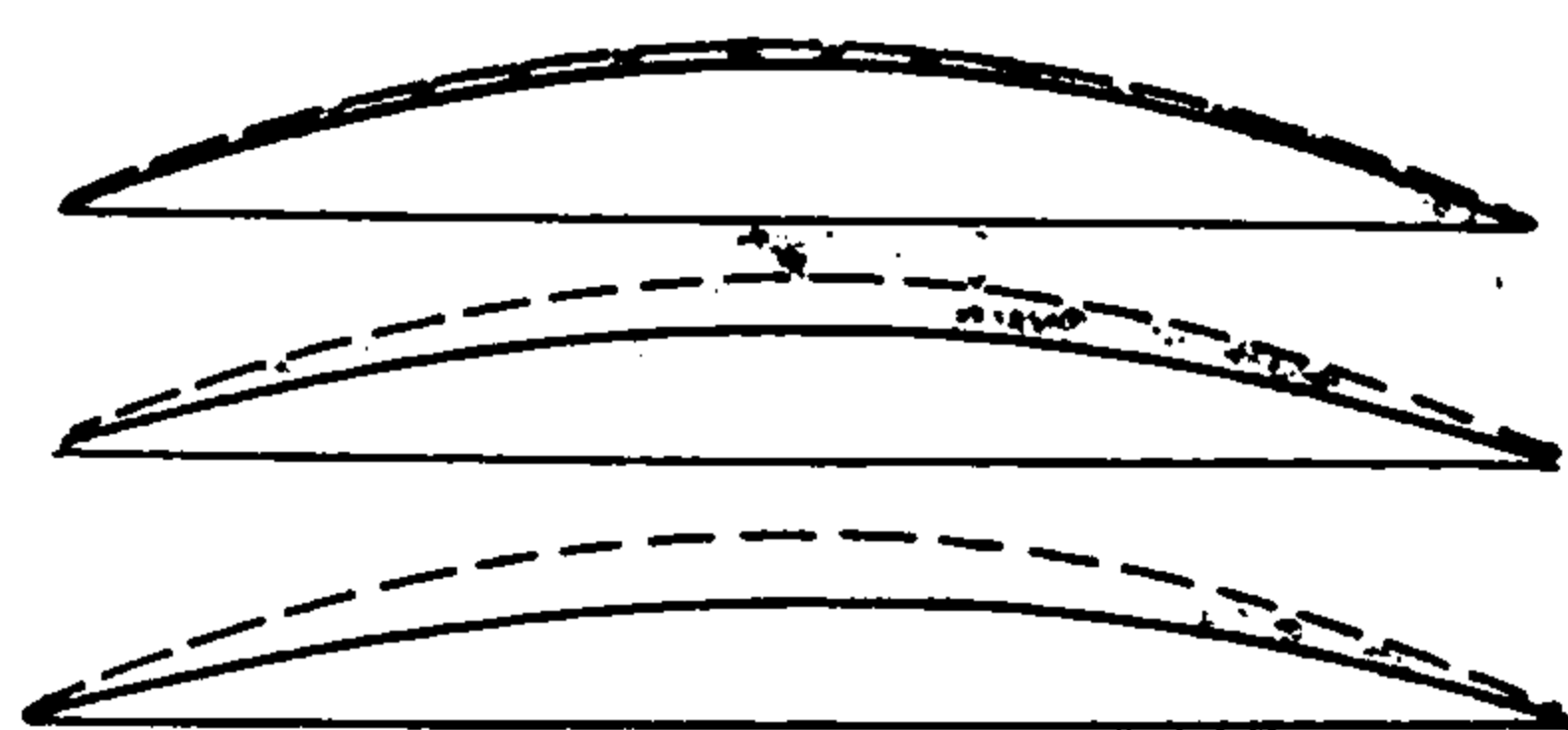
$$\sum_{i=0}^N \frac{dC_{i+1}}{df} \left[(A_{im}^{(1)} + \lambda^2 A_{im}^{(2)}) + \lambda \sum_{n=0}^N (A_{inm} + A_{nim}) C_{n+1} + \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^N (A_{inj} + A_{nij} + A_{jin}) C_{n+1} C_{j+1} \right] - \frac{dq_0}{df} A_m = 0 \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=0}^N \left(\frac{\gamma_i}{2i+2} - \frac{1}{2i+4} \right) \frac{dC_{i+1}}{df} = 1 \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (2.15)$$

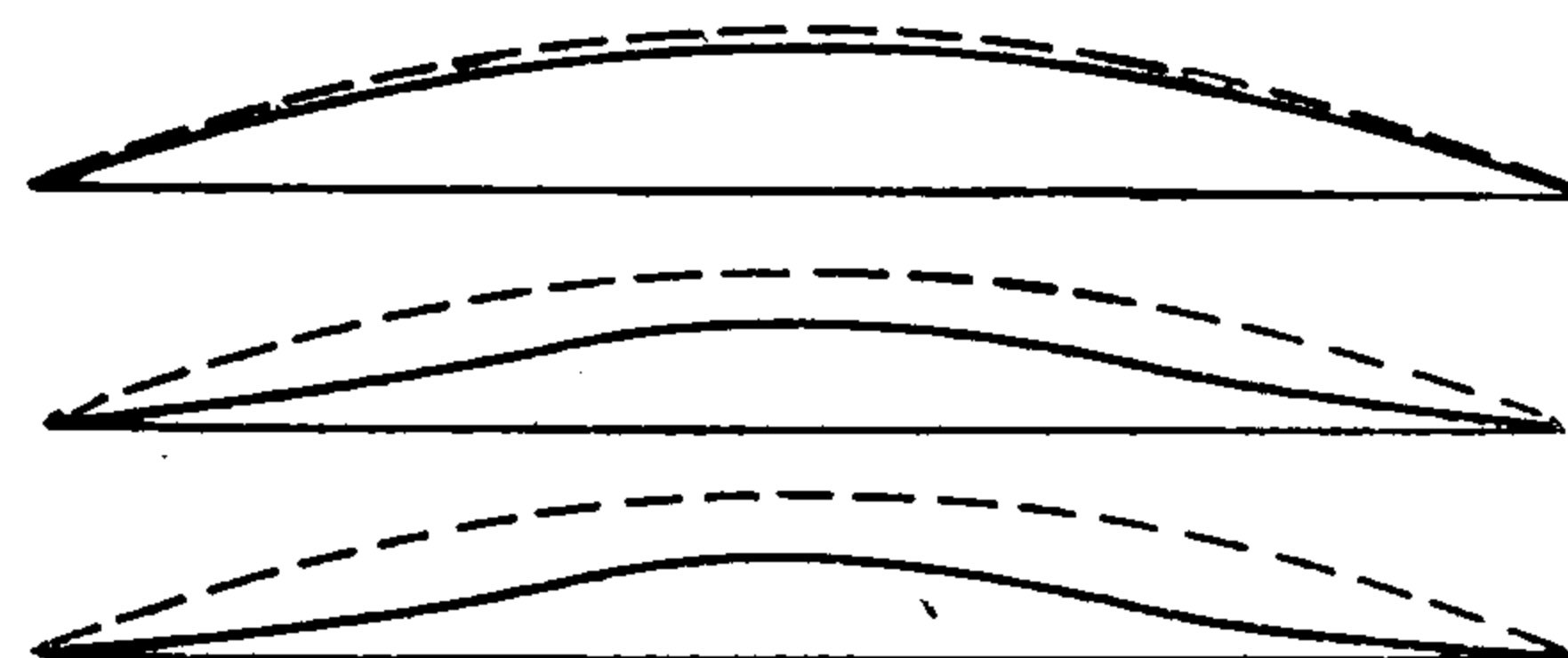
$$\sum_{i=1}^N \frac{dC_{i+1}}{dq_0} \left[(A_{im}^{(1)} + \lambda^2 A_{im}^{(2)}) + \lambda \sum_{n=0}^N (A_{inm} + A_{nim}) C_{n+1} + \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^N (A_{inj} + A_{nij} + A_{jin}) C_{n+1} C_{j+1} \right] - A_m = 0 \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=0}^N \left(\frac{\gamma_i}{2i+2} - \frac{1}{2i+4} \right) \frac{dC_{i+1}}{dq_0} = \frac{df}{dq_0} \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (2.17)$$

За начальные данные можно принять элементы ненапряженного состояния оболочки при отсутствии нагрузки, т. е. при $f = 0$, $q_0 = 0$, $C_{i+1} = 0$. Интегрирование систем (2.14), (2.15) и (2.16), (2.17) производилось методом Рунге — Кутты. Причем систему (2.14), (2.15) удобно интегрировать, пока dq_0 / df не очень велико.



Фиг. 6



Фиг. 7

В противном случае целесообразно интегрировать систему (2.16), (2.17).

Программа была составлена для ЭЦВМ «Минск-12». Она состояла из стандартных блоков и позволяла автоматическое переключение интегрирования одной системы на другую.

3. Рассмотрим результаты расчетов. Кривые $q_0 - f$ вычислялись для следующих комбинаций значений параметров λ и ε :

$\varepsilon = 0.187 \{ \lambda = 2, 4, 5, 12, 15, 30, 50, 70 \}$

$\varepsilon = 0.273 \{ \lambda = 5, 12, 15, 30, 50, 70 \}$

$\varepsilon = 0.5 \{ \lambda = 15, 30, 50, 70 \}$

$\varepsilon = 0.7 \{ \lambda = 30 \}$

Выбор значений параметра λ в зависимости от ε определялся условием

$$R/h \geq 50 \quad (3.1)$$

Обнаружено, что метод Бубнова — Галеркина дает удовлетворительную точность на базе четвертого приближения как для верхней, так и для нижней критических нагрузок в случае $\lambda \leq 5$, $\varepsilon \leq 0.3$. В остальных случаях надежные результаты получены лишь для верхних критических нагрузок. Для характеристики быстроты сходимости значений q_0 приведена табл. 1.

Из таблицы видно, что в случае $\lambda \leq 5$, $\varepsilon \leq 0.3$ четвертое приближение от третьего отличается не более чем на 0.2%. В случае больших λ это отличие не превышает 3%.

На фиг. 2—3 приведены зависимости q_0 от f , полученные соответственно в 1, ..., 4-м приближениях, когда $\varepsilon = 0.187$; $\lambda = 2, 5$. Из этих графиков видно, что третье и четвертое приближения практически неразличимы. В случаях $\varepsilon = 0.273$; $\lambda = 15$ и $\varepsilon = 0.7$, $\lambda = 30$ удовлетворительное совпадение третьего и четвертого приближений достигается лишь на частях кривых нагружения, изображенных на фиг. 4—5. Приведем сводную таблицу верхних критических нагрузок для разных значений ε и λ (табл. 2). Можно отметить, что с ростом λ при данном ε верхние критические числа q_0^+ увеличиваются, как это видно из приведенной таблицы.

Таблица 1

f	1	2	3	4
$\varepsilon=0.187, \lambda=2$				
0.2	0.3885	0.3990	0.3997	0.3994
1.0	1.426	1.418	1.416	1.416
2.0	2.902	2.922	2.928	2.928
3.0	6.665	7.371	7.512	7.532
4.0	14.95	18.29	18.64	18.94
$\varepsilon=0.187, \lambda=4$				
0.2	0.7739	0.8294	0.8364	0.8331
1.0	2.479	2.591	2.600	2.600
1.6	2.797	2.818	2.811	2.814
2.0	2.821	2.731	2.695	2.698
2.6	2.932	2.655	2.550	2.548
3.0	3.265	2.920	2.793	2.785
$\varepsilon=0.187, \lambda=5$				
0.2	1.074	1.168	1.183	1.174
1.0	3.541	3.795	3.822	3.820
1.6	3.973	4.161	4.176	4.184
3.0	3.178	2.585	2.150	2.160
3.6	3.210	2.264	1.534	1.531
4.0	3.722	2.764	2.129	2.103
$\varepsilon=0.187, \lambda=12$				
0.2	4.479	5.999	6.111	5.788
1.0	20.57	23.57	23.63	23.16
2.0	30.96	34.04	30.23	30.80
2.6	32.87	36.13	28.12	28.34
$\varepsilon=0.187, \lambda=70$				
0.2	174.0	235.6	104.4	113.1
1.0	839.8	1020	490.8	523.6
2.0	1605	1678	910.4	951.2
3.0	2299	2053	1268	1298
4.0	2922	2213	1570	1581
$\varepsilon=0.273, \lambda=5$				
0.2	1.055	1.149	1.164	1.160
1.0	3.482	3.736	3.764	3.766
1.6	3.912	4.100	4.115	4.125
2.0	3.803	3.854	3.830	3.844
$\varepsilon=0.273, \lambda=12$				
0.2	5.068	5.934	6.051	6.013
1.0	20.54	23.37	23.52	23.37
2.0	30.42	33.86	30.40	30.60
$\varepsilon=0.273, \lambda=70$				
0.2	170.2	240.3	102.5	114.4
1.0	821.4	1037	482.6	544.6
2.0	1570	1702	897.2	1016
3.0	2248	2080	1254	1413
4.0	2857	2245	1558	1729
5.0	3400	2252	1812	1955
6.0	3879	2137	2010	2081
$\varepsilon=0.5, \lambda=15$				
0.2	7.085	9.085	9.037	8.050
1.0	29.86	36.65	37.08	34.35
2.2	49.12	55.79	51.22	52.59

Таблица 1 (продолжение)

f	1	2	3	4
$\varepsilon=0.5, \lambda=70$				
0.2	153.5	268.0	93.51	100.9
1.0	740.3	1124	443.1	470.8
2.0	1414	1813	831.4	865.6
4.0	2569	2389	1483	1487
5.0	3055	2420	1760	1746
$\varepsilon=0.7, \lambda=30$				
0.2	23.90	46.04	28.50	21.25
1.0	109.5	176.3	132.6	97.25
2.0	195.1	253.3	232.0	175.8
3.0	258.7	273.2	288.9	241.4
4.0	302.1	259.0	303.0	291.5

верхней критической нагрузкой. Третье положение соответствует нагрузке q_0 , превышающей верхнее критическое число.

Таблица 2

ε	$\lambda=70$	50	30	15	12	5	4
0.187	2121	901.1	251.3	50.05	30.8	4.184	2.814
0.273	2105	909.8	245.7	48.36	30.4	4.125	
0.5	2441	1026	276.5	52.85			
0.7			314.5				

На фиг. 7 дается развитие форм равновесия оболочки для значений $\varepsilon = 0.273$; $\lambda = 12$. И, наконец, на фиг. 8 изображены три положения неполого сферического сегмента для $\varepsilon = 0.7$; $\lambda = 30$.

Значения верхних критических чисел, полученные в данной работе в случае $\varepsilon \leq 0.2$; $\lambda \leq 5$, мало отличаются от значений q_0^+ для пологих сферических оболочек.

Для сравнения заметим, что значения q_0^+ , вычисленные в четвертом приближении по теории пологих куполов, соответственно будут $q_0^+ = 2.84$ ($\lambda = 4$), $q_0^+ = 4.22$ ($\lambda = 5$) и $q_0^+ = 2.84$, $q_0^+ = 4.22$ по теории непологих куполов.

Следует отметить заметное влияние непологости оболочки на нижние критические числа. Так при $\lambda = 4$ имеем $q_0^- = 2.78$ по теории пологих оболочек и $q_0^- = 2.53$ по теории непологих оболочек. При $\lambda = 5$ соответственно $q_0^- = 3.00$ и $q_0^- = 1.48$. Можно отметить, что теория А. В. Погорелова дает для верхних критических нагрузок существенно большие значения.

Поступила 20 X 1967

Ростовский университет

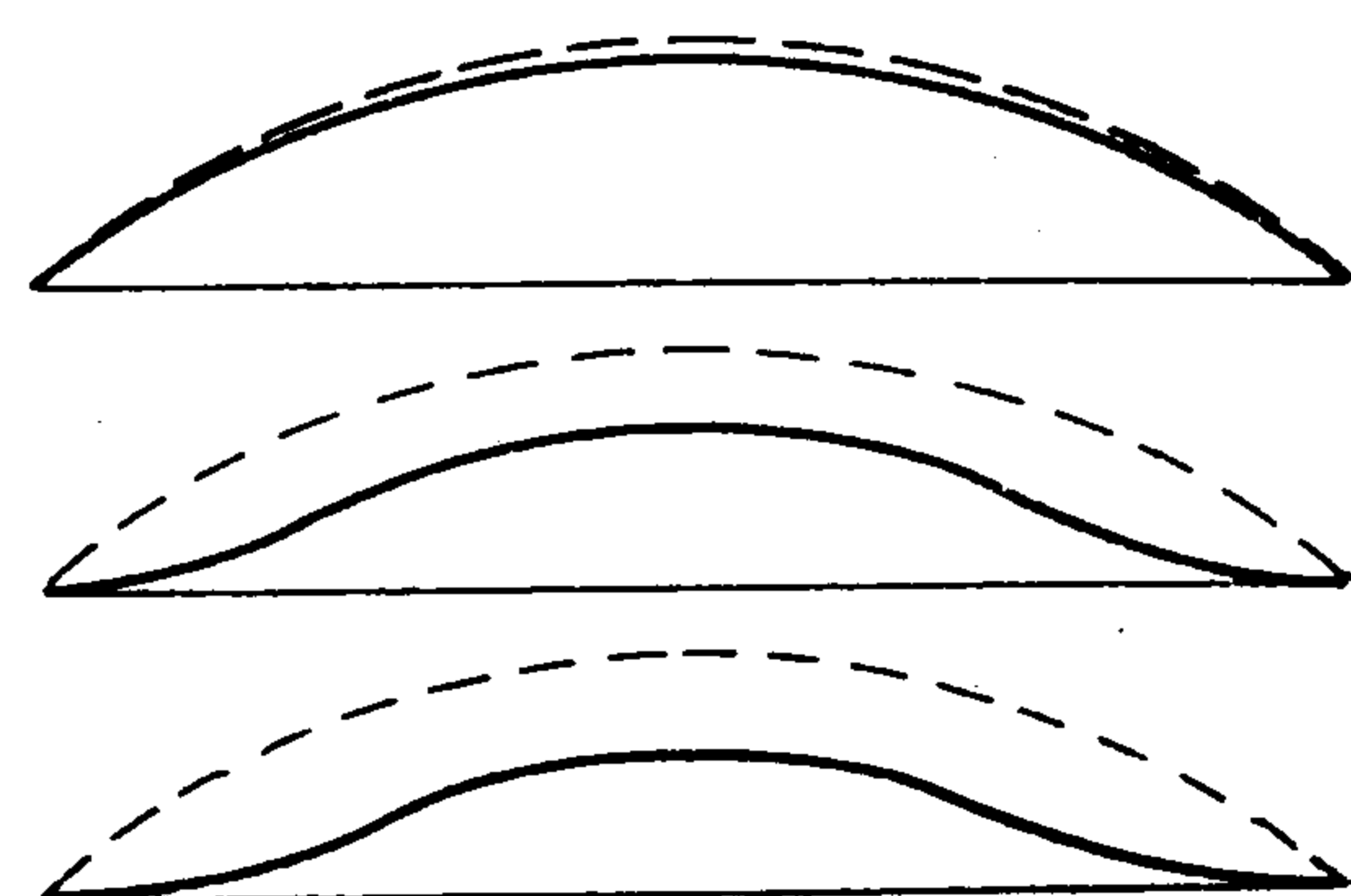
ЛИТЕРАТУРА

1. Ф е о д о с ь е в В. И. Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
2. В о р о в и ч И. И., З и п а л о в а В. Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.

В определении перемещений удовлетворительную точность удалось получить на базе четвертого приближения. При этом аппроксимация кривой прогиба в соответствии с (2.2) производилась полиномом десятой степени.

На фиг. 6—8 изображены разные стадии нагружения оболочек для нескольких значений ε и λ . На фиг. 6 рассматривается случай $\varepsilon = 0.273$; $\lambda = 5$.

Положение I соответствует нагрузке q_0 меньшей, чем верхнее критическое число. Положение II соответствует нагрузке q_0^+ , являющейся



Фиг. 8