О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕЙССНЕРА ДЛЯ НЕПОЛОГИХ СИММЕТРИЧНО ЗАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Л. С. Срубщик (Ростов-на-Дону)

В 1950 году Рейсснер [1] вывел уравнения конечной симметричной деформации тонких оболочек вращения, поверхность которых задается параметрическими уравнениями $r = r(\xi)$, $z = z(\xi)$ (ξ — параметр), без предположения о какой-либо малости углов поворота элемента оболочки в результате деформации. В случае пологой оболочки и предположения о малости углов поворота из этих уравнений можно получить хорошо известные уравнения пологой теории. Изучение последних достигло в настоящий момент известного прогресса, однако все больше выявляется необходимость изучения более точных уравнений нелинейной теории оболочек.

Эта работа посвящена доказательству теоремы существования решений уравнений Рейсснера при разных краевых условиях, но при некоторых ограничениях, накладываемых на класс рассматриваемых оболочек. Именно, будем полагать, что при $0 < a \leqslant \xi \leqslant b < \infty$, т. е. в области изменения параметра ξ, имеют место условия

$$0 < l_1 \leqslant \frac{r}{\alpha} \leqslant l_2 < \infty, \qquad \alpha^2(\xi) = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

Сюда включается довольно широкий класс оболочек вращения, такие, как цилиндрические, тороидальные, сферические с вырезанным полюсом, кольцеобразные пластины и т. д. Но это условие исключает некоторые важные типы оболочек, такие, как сферический купол и круглая пластина. Будем считать, что это ограничение не связано с существом дела и надеемся в дальнейшем снять его.

Теоремы существования в нелинейной теории пологих оболочек при разнообразных краевых условиях были получены в работах И. И. Воровича [2,3]. Рассматриваемая ниже задача из теории непологих оболочек методически интересна тем, что наряду с нелинейными дифференциальными уравнениями равновесия и совместности деформаций оболочки имеют место нелинейные краевые условия. Для доказательства теоремы существования здесь применяется метод работы [3].

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\xi}\frac{r}{\alpha}\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{\alpha}{r}\cos(\Phi_0-\beta)\,[\sin\Phi_0 - \sin(\Phi_0-\beta)] + \nu\frac{d\Phi_0}{d\xi}[\cos(\Phi_0-\beta) - \cos\Phi_0] - \\
- \frac{\alpha}{D}[\Psi\sin(\Phi_0-\beta) - T\cos(\Phi_0-\beta)] \equiv F_1(\beta, \Psi) \\
\frac{d}{d\xi}\frac{r}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\xi} = \left[\frac{\alpha}{r}\cos^2(\Phi_0-\beta) - \nu\frac{d(\Phi_0-\beta)}{d\xi}\sin(\Phi_0-\beta)\right]\Psi + \\
+ \alpha C[\cos(\Phi_0-\beta) - \cos\Phi_0] + \nu\sin(\Phi_0-\beta)\frac{dT}{d\xi} + \\
+ \left[\frac{\alpha}{r}\cos(\Phi_0-\beta)\sin(\Phi_0-\beta) + \nu\frac{d(\Phi_0-\beta)}{d\xi}\cos(\Phi_0-\beta)\right]T - \\
- \left[\frac{d}{d\xi}(r^2p) + \nu r\alpha p\cos(\Phi_0-\beta)\right] \equiv F_2(\beta, \Psi)
\end{gathered} \tag{1}$$

$$T = -\int r\alpha q\,d\xi, \qquad C = Eh, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\Phi = \Phi_0 - \beta, \qquad \alpha^2(\xi) = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2, \qquad 0 < \nu < 0.5$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered}
\beta = 0, \qquad \Psi = 0 \qquad \text{при } \xi = a \\
\frac{r}{\alpha}\frac{d\beta}{d\xi} = \nu[\sin(\beta-\Phi_0) - \sin\Phi_0] \equiv f_1(\beta) \quad \text{при } \xi = b \\
\frac{r}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\xi} = \nu\Psi\cos(\Phi_0-\beta) + T\sin(\beta-\Phi_0) - r^2p \equiv f_2(\beta, \Psi)
\end{gathered} \tag{2}$$

Задача (1), (2) есть система уравнений Рейсснера симметричной деформации тонкой оболочки вращения постоянной толщины. Поверхность оболочки задается параметрическими уравнениями $r = r(\xi)$, $z = z(\xi)$. Здесь $\Phi_0(\xi)$ — угол, который составляет элемент оболочки в соответствующей ξ точке до деформации с осью абсцисс; $\Phi(\xi)$ — угол после деформации, Ψ — горизонтальная составляющая напряжения; $T \equiv (rV)$ — вертикальная составляющая напряжения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $p \equiv p_h$ и $q \equiv p_v$ — соответственно, горизонтальная и вертикальная составляющие нагрузки, которые зависят от интенсивности нагрузки $\rho(\xi)$ и угла $\beta(\xi)$. Например, в случае сферического купола, находящегося под гидростатическим давлением постоянной интенсивности ρ, имеем

$$r(\xi) = R\sin\xi, \quad z(\xi) = -R\cos\xi, \quad \Phi_0 = \xi, \quad p = -\rho\sin(\xi-\beta), \quad q = \rho\cos(\xi-\beta)$$

а в случае цилиндрической оболочки надо положить $r = R$, $z = R\xi$, $\Phi_0 = {}^1\!/_2\,\pi$, причем здесь R — радиус основания цилиндра.

Краевые условия (2) выбраны для определенности. Первое из них при $\xi = a$ означает, что соответствующий край оболочки жестко защемлен и свободен от напряжений, а второе условие при $\xi = b$ описывает неподвижное шарнирное закрепление оболочки по краю.

Введем банаховы пространства функций.

1) Пространства C_k непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ имеющие производные до k-го порядка включительно, с нормой

$$\|w\|_{C_k} = \sum_{l=0}^{k} \max_{a\leqslant\xi\leqslant b} \left|\frac{d^l w}{d\xi^l}\right|$$

2) Пространство H_1 пар функций $x \equiv (x_1, x_2)$, где $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_1$, с нормой

$$\|x\|_{H1} = \|x_1\|_{C1} + \|x_2\|_{C1}$$

3) Пространство H_2 пар функций $y \equiv (y_1, y_2)$, где $y_1 \in C_2$, $y_2 \in C_2$, с нормой

$$\|y\|_{H2} = \|y_1\|_{C2} + \|y_2\|_{C2}$$

4) Пространство H_3 пар функций $\sigma \equiv (\sigma_1, \sigma_2)$, образованное замыканием по норме множества гладких функций, исчезающих при $\xi = a$:

$$\|\sigma\|_{H_3}^2 = \int_a^b \left[\left|\frac{d\sigma_1}{d\xi}\right|^2 + \left|\frac{d\sigma_2}{d\xi}\right|^2\right] d\xi$$

5) Пространство H_4 пар функций $z \equiv (z_1, z_2)$, образованное замыканием по норме множества гладких функций, исчезающих при $\xi = a$:

$$\|z\|_{H_4} = \left[\int_a^b \left(\left|\frac{d^2 z_1}{d\xi^2}\right|^2 + \left|\frac{d^2 z_2}{d\xi^2}\right|^2\right) d\xi\right]^{1/2} + \left|\frac{dz_1(b)}{d\xi}\right| + \left|\frac{dz_2(b)}{d\xi}\right|$$

Теорема 1. Пусть

$$\alpha^2 q \in C_0, \ \alpha^2 p' \in C_0, \ \alpha' \in C_0, \ 0 < l_1 \leqslant r/\alpha \leqslant l_2 < \infty, \ a \leqslant \xi \leqslant b \qquad (3)$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет, по меньшей мере, одно решение $u \equiv (\beta, \Psi)$, компоненты которого являются элементами пространства C_2.

Для доказательства теоремы применим принцип Лерэ—Шаудера [4,5] существования неподвижных точек вполне непрерывных преобразований.

Рассмотрим семейство операторов, зависящих от параметра $\lambda \in [0, 1]$

$$\frac{d}{d\xi}\frac{r}{\alpha}\frac{d\beta}{d\xi} = \lambda f_1(\beta, \Psi), \qquad \frac{d}{d\xi}\frac{r}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\xi} = \lambda F_2(\beta, \Psi) \qquad (4)$$

с краевыми условиями

$$\beta(a) = 0, \quad \Psi(a) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{r}{\alpha}\frac{d\beta}{d\xi} = \lambda f_1(\beta), \qquad \frac{r}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\xi} = \lambda f_2(\beta, \Psi) \quad \text{при } \xi = b$$

При $\lambda = 1$ задача (4), (5) переходит в (1), (2), а при $\lambda = 0$ имеет единственное решение $\beta = \Psi = 0$.

Нелинейной задаче (4), (5) сопоставим линейную задачу

$$\frac{d}{d\xi}\frac{r}{\alpha}\frac{d\beta}{d\xi} = \lambda F_1(\varphi, \psi), \qquad \frac{d}{d\xi}\frac{r}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\xi} = \lambda F_2(\varphi, \psi) \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$\beta(a) = \Psi(a) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{r}{\alpha}\frac{d\beta}{d\xi} = \lambda f_1(\varphi), \qquad \frac{r}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\xi} = \lambda f_2(\varphi, \psi) \quad \text{при } \xi = b$$

состоящие в определении функций β, Ψ по известным функциям φ, ψ. Линейная задача (6), (7) разрешима и для нее справедлива теорема единственности. Поэтому пара функций $u \equiv (\beta, \Psi)$ однозначно определяется по $v \equiv (\varphi, \psi)$. Это соответствие определяет нелинейный оператор

$$u = L(v, \lambda) \tag{8}$$

сопоставляющий любому λ из $[0, 1]$ и $v(\xi)$ из пространства H_1 решения задачи (5), (6). Неподвижные точки преобразования $L(u, \lambda)$ будут решениями задачи (4), (5) и наоборот.

Таким образом, задача (4), (5) сводится к решению уравнения

$$u = L(u, \lambda) \tag{9}$$

Лемма. Для решения задачи (4), (5) справедливы следующие оценки, равномерные по $\lambda \in [0, 1]$:

$$\int_a^b \frac{r}{\alpha}\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)^2 d\xi \leqslant m, \quad \max_{a\leqslant\xi\leqslant b} |\Psi| \leqslant m, \quad \int_a^b \frac{r}{\alpha}\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)^2 d\xi \leqslant m \tag{10}$$

где постоянная m зависит от l_1, $\|\alpha^2 p\|_{L_2}$ и $\|\alpha^2 q\|_{L_1}$.

Для доказательства умножим второе уравнение системы (4) на Ψ и проинтегрируем от a до b. Интегрируя по частям, с учетом краевых условий (5), получим

$$\int_a^b \frac{r}{\alpha}\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)^2 d\xi + \lambda\int_a^b \frac{\alpha}{r}\Psi^2\cos^2\Phi d\xi - 2\lambda\nu\int_a^b \Psi\frac{d\Psi}{d\xi}\cos\Phi d\xi =$$

$$= \lambda C\int_a^b \alpha(\cos\Phi_0 - \cos\Phi)\Psi d\xi - \frac{\lambda}{2}\int_a^b \frac{\alpha}{r} T\Psi\sin 2\Phi d\xi +$$

$$+ \lambda\nu\int_a^b T\frac{d\Psi}{d\xi}\sin\Phi d\xi - \lambda\int_a^b r^2 p\frac{d\Psi}{d\xi}d\xi + \lambda\nu\int_a^b rp\Psi\cos\Phi d\xi; \quad (\Phi = \Phi_0 - \beta)$$

Используя справедливое в силу (3) неравенство

$$|\Psi(\xi)| \leqslant \left(\frac{b-a}{l_1}\int_a^b \frac{r}{\alpha}\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)^2 d\xi\right)^{1/2} \tag{11}$$

а также неравенство Буняковского, отсюда выводим

$$\int_a^b \frac{r}{\alpha}\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)^2 d\xi + \lambda\int_a^b \frac{\alpha}{r}\Psi^2\cos^2\Phi d\xi \leqslant \lambda m_2\left[\left(\int_a^b \frac{r}{\alpha}\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)^2 d\xi\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_a^b \frac{\alpha}{r}\Psi^2\cos^2\Phi d\xi\right)^{1/2}\right]\left[\left(\int_a^b \frac{\alpha}{r}T^2 d\xi\right)^{1/2} + \left(\int_a^b \alpha r^3 p^2 d\xi\right)^{1/2} + m_1\right] \tag{12}$$

где m_2 — некоторая постоянная.

Учитывая выражение для T, данное в (1), при помощи (3) из (12) выводим первую оценку (10). Вторую оценку получаем применяя (11).

Для получения третьей оценки из (10) умножим первое уравнение системы (4) на β и проинтегрируем от a до b. Получим

$$\int_a^b \frac{r}{\alpha}\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)^2 d\xi = \lambda \int_a^b \frac{\alpha}{r}\cos\Phi\,[\sin\Phi_0 - \sin\Phi]\,\beta d\xi +$$

$$+\lambda \int_a^b \left\{\nu \frac{d\Phi_0}{d\xi}[\cos\Phi_0 - \cos\Phi] - \frac{\alpha}{D}[\Psi\sin\Phi - T\cos\Phi]\right\}\beta d\xi \quad (\Phi = \Phi_0 - \beta)$$

Отсюда, применяя (3) к левой части и используя неравенство Буняковского, получаем искомую оценку. Лемма доказана.

Теперь выведем оценку β и Ψ в норме C_1. Для этого от системы (4), (5) сначала перейдем к эквивалентной системе интегральных уравнений.

Например, для первого уравнения получим

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{\lambda\alpha}{r}\left[\int_a^\xi F_1(t)\,dt - \int_a^b F_1(t)\,dt + f_1(b)\right] \tag{13}$$

(второе уравнение такое же, но с заменой F_1 на F_2 и f_1 на f_2).

Из явных выражений F_1, F_2, f_1, и f_2, используя оценки (10), выводим

$$\|F_1\|_{C_0} \leqslant m_3, \quad \|F_2\|_{L_2} \leqslant m_3, \quad \|f_1\|_{C_0} \leqslant m_3, \quad \|f_2\|_{C_0} \leqslant m_3 \tag{14}$$

при условии, что $p(b) < \infty$ и ограничены нормы

$$\|\alpha^2 p\|_{L_2}, \qquad \|\alpha^2 p'\|_{L_2}, \qquad \|\alpha^2 q\|_{L_2}$$

В силу (14), из (13) имеем

$$\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\frac{d\beta}{d\xi}\right| \leqslant m_4, \qquad \max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\frac{d\Psi}{d\xi}\right| \leqslant m_4 \tag{15}$$

Наконец, покажем, что при выполнении условий теоремы имеют место оценки

$$\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\frac{d^2\beta}{d\xi^2}\right| \leqslant m_5, \qquad \max_{a\leqslant\xi\leqslant b}\left|\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}\right| \leqslant m_5 \tag{16}$$

Для этого в уравнениях (4) член с первой производной перенесем в правую часть. Применяя (10), (15) и условия теоремы относительно p и q оцениваем правые части, а также f_1, f_2 и выводим (16).

Вернемся к операторному уравнению (9). Покажем, что L является вполне непрерывным оператором в пространстве H_1. Для этого рассмотрим $F_1(\varphi, \psi)$, $F_2(\varphi, \psi)$, $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi, \psi)$. Получаем, что F_1, F_2 являются элементами пространства C_0, а f_1 и f_2 — элементами пространства C_1. Тогда решения задачи (6), (7) будут принадлежать пространству H_2 и для них будут справедливы оценки (16).

Так как множество функций, ограниченное в норме C_2, компактно в пространстве C_1, имеем, что всякое ограниченное в H_1 множество переводится оператором L в компактное. Отсюда следует вполне непрерывность оператора L. Просто устанавливается и равномерная непрерывность преобразования $L(u, \lambda)$ относительно λ.

Итак, выполняются все условия принципа Лерэ - Шаудера и, следовательно, уравнение (8) имеет, по крайней мере, одно решение в H_1. На самом деле это решение будет более гладким в силу (16). Поэтому решение задачи (1), (2) будет принадлежать пространству H_2, и теорема доказана.

Теорема 2. Пусть

$$\alpha^2 q \in L_2, \quad \alpha^2 p \in L_2, \quad \alpha^2 p' \in L_2, \quad \alpha' \in L_2, \quad \alpha^2 p|_{\xi=b} < \infty$$

а также имеет место условие (3). Тогда краевая задача (1), (2) имеет, по меньшей мере, одно решение $u \equiv (\beta, \Psi)$, которое является элементом пространства H_4.

Доказательство такое же, как и в теореме 1, следует только заменить пространства H_1 на H_3 и H_2 на H_4.

Автор приносит благодарность И. И. Воровичу и В. И. Юдовичу за помощь в работе.

Поступила 20 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Reissner E. On Axysimmetrical Deformation of thin Shells of Revolution Proc. Symp., in Appl. Math. Elast. 1950, vol. 3, pp. 27—52.
2. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1955, т. 19, № 4, стр. 173—186.
3. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2, стр. 203—206.
4. Лерэй Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. Усп. матем. наук, 1946, т. 1, вып. 3,4 (13,14), стр. 71—95.
5. Ладыженская О. А., Уральцева П. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОЛОГОГО СФЕРИЧЕСКОГО КУПОЛА

И. И. Ворович, Н. И. Минакова

(Ростов-на-Дону)

Предлагается вариант уравнений больших деформаций непологой сферической оболочки, аналогичный варианту уравнений В. И. Феодосьева [1] для пологих оболочек.

Разрабатываются пути преодоления трудностей, возникающих при использовании метода Бубнова — Галеркина в варианте Папковича. Для определения кривой нагружения используется метод перехода к задаче Коши. Детально исследуется практическая сходимость метода Бубнова — Галеркина в этой задаче. Поскольку решение задачи определяется в этом случае двумя параметрами λ и θ_0, где θ_0 — угол наклона недеформированной срединной поверхности в заделке, $\lambda = R\theta_0^2 / h$, R — радиус срединной поверхности, h — толщина оболочки, то приводятся результаты анализа поведения оболочки при разных λ и θ_0 в диапазоне $0 < \theta_0 \leqslant 0.7$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 70$.

Даны таблицы верхних и нижних критических давлений. Результаты сравниваются с результатами, полученными по теории пологих оболочек и по другим теориям.

1. Будем рассматривать большие осесимметричные деформации непологой сферической оболочки, нагруженной равномерно распределенным внешним давлением. В основу положим следующие приближенные соотношения связи между перемещениями и деформациями:

$$u = u_0 + \frac{z}{R}\left(u_0 - \frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right), \qquad w = w_0, \qquad z = r - R \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} + z\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + z\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} = \frac{1}{R\sin\theta}(w_0\sin\theta + u_0\cos\theta), \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R^2}\frac{\partial w_0}{\partial\theta} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2, \qquad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} \tag{1.4}$$

Здесь u_0, w_0 — соответственно, тангенциальное и нормальное перемещения точек срединной поверхности, R — радиус срединной поверхности, r — текущий радиус, θ — полярный угол (фиг. 1).

Связь между составляющими деформациями и усилиями возьмем в следующей форме:

$$T_1 = E_1(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}), \qquad T_2 = E_1(\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}) \qquad (E_1 = Eh/(1-\mu^2)) \tag{1.5}$$

$$M_1 = E_2(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} + \mu\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}), \qquad M_2 = E_2(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + \mu\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}) \qquad (E_2 = Eh^3/12(1-\mu^2)) \tag{1.6}$$