

Можно показать при помощи аналитического продолжения, что формула (4.2) выполняется по всей комплексной плоскости μ при $\operatorname{Re} \nu > -1/2$.

В частном случае $\mu - \nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) формула (4.2) совпадает с уже известными формулами, которые получаются из 29.10 и 29.71 из [10] при помощи правила сдвига (если учесть потерянный множитель $1/2$ в правой колонке формулы 29.71).

Автор благодарит А. Я. Сагомоняна и С. С. Григоряна за обсуждение статьи и В. А. Еропина за помощь в работе.

Поступила 4 VIII 1967

НИИ механики
Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. М., Изд-во Моск. ун-та, 1962.
2. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция). М., «Наука», 1966.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя и др.). М., «Наука», 1966.
6. Lu T i n g. On the diffraction of an arbitrary pulse by a wedge or a cone. Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, No. 1.
7. W a t e r m a n P. C. Roots of Legendre functions of variable index. J. Math. and Phys., 1963, vol. 42, No 4, p. 323.
8. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
10. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

О СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ В УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Н. Д. Вервейко

(Воронеж)

Рассматривается полупространство из упруго-вязко-пластического материала в котором на сфере, расположенной на глубине от свободной поверхности, задан импульс давления. Получены соотношения, описывающие пластическое деформирование среды в распространяющейся зоне между волнами нагрузки и разгрузки.

Рассмотрено отражение волны нагрузки от свободной поверхности, проведено аналитическое исследование состояния среды за отраженной безвихревой волной.

Получены выражения, описывающие изменение интенсивности отраженной безвихревой волны, показано, что в некоторой области отраженная безвихревая волна будет волной пластического нагружения.

Задача о распространении сферической волны в упругом, предварительно напряженном полупространстве и ее отражении от свободной поверхности рассматривалась рядом авторов [1,2].

Ниже рассматривается первоначальное ненапряженное полупространство из упруго-вязко-пластического материала, в котором на сфере Σ_0 радиусом R_0 с центром в точке O на глубине h от свободной поверхности задано давление $P_0 > k\sqrt{3}$, действующее малый промежуток времени $[0, t_0]$, при $t > t_0$ давление на сфере Σ_0 отсутствует. В момент времени $t > t_0$ часть материала, ограниченная волновыми поверхно-

чения ω_3 и φ_3 :

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \frac{C_1}{r} \exp[-g(\alpha - \beta)r] - \frac{\sqrt{3}}{\alpha - \beta} \left[1 - \frac{1}{g(\alpha - \beta)r} \right] \\ \varphi_3 &= \left[C_2 - 2 \frac{C_1}{r} - C_1 \frac{3}{2} g^2 (\alpha^2 - \beta^2) r \right] \frac{1}{r} \exp[-g(\alpha - \beta)r] - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{(\alpha - \beta)^2 r} \left(4\alpha - \beta + \frac{2}{gr} \right)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий

$$r = r_0, \quad P_0 = -\alpha\omega_3, \quad \varphi_1 = -\alpha \frac{\partial \omega_3}{\partial r} \quad (1.6)$$

Аналогично можно определить ω_1 , ω_2 , φ_1 и φ_2 . Напряжения и скорости в зоне упругого состояния среды между поверхностями Σ_0 и Σ_2 вычислять не будем, заметим, что они являются величинами порядка ε .

2. Исследуем изменение интенсивности $\omega_3^{(1)}$ отраженной безвихревой волны Σ_3 в процессе ее распространения по направлению $v^{(3)}$ из точки O_1 . При переходе через каждую волновую поверхность в окрестности точки отражения M должны выполняться условия динамической совместности [3] для скачков σ_{ij} и v_i

$$-c[\sigma_{ij}] = \beta[v_k]v_k\delta_{ij} + \frac{\alpha - \beta}{2}([v_i]v_j + [v_j]v_i) \quad (2.1)$$

Здесь

$$c = c_0 = 1 \text{ для } \Sigma_1 \text{ и } \Sigma_3, \quad c = c_1 = [(\alpha - \beta) / 2\alpha]^{1/2} \text{ для } \Sigma_4$$

На свободной поверхности должно удовлетворяться условие

$$[\sigma_{ij}^{(4)}]n_j = 0 \quad (2.2)$$

Условия того, что Σ_3 и Σ_4 — безвихревая и эквиволюминальная волновые поверхности, имеют вид

$$[v_i^{(3)}]v_i^{(3)} = \omega_3^{(1)}, \quad [v_i^{(4)}]v_i^{(4)} = 0 \quad (2.3)$$

Полагая

$$\begin{aligned}n_i &= \{\cos \varphi, -\sin \varphi, 0\}, & v_i^{(1)} &= \{1, 0, 0\} \\ v_i^{(3)} &= \{-\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, 0\}, & v_i^{(4)} &= \{-\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi), 0\}\end{aligned}\quad (2.4)$$

где φ — угол между свободной поверхностью и волной Σ_3 , ψ — угол между свободной поверхностью и волной Σ_4 , решим систему уравнений (2.1) — (2.3) относительно $\omega_3^{(1)}$ в точке M при условии, что

$$\frac{c_0}{c_1} = \left(\frac{2\alpha}{\alpha - \beta} \right)^{1/2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \quad (2.5)$$

$$\omega_3^{(1)} = -\zeta\omega_3, \quad \zeta = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg}^2 2\psi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg}^2 2\psi} \quad (2.6)$$

Следуя работе [3], можно проследить изменение интенсивности волновой поверхности Σ_3 , зная тип волны Σ_3 , который характеризуется состоянием материала по обе стороны от Σ_3 .

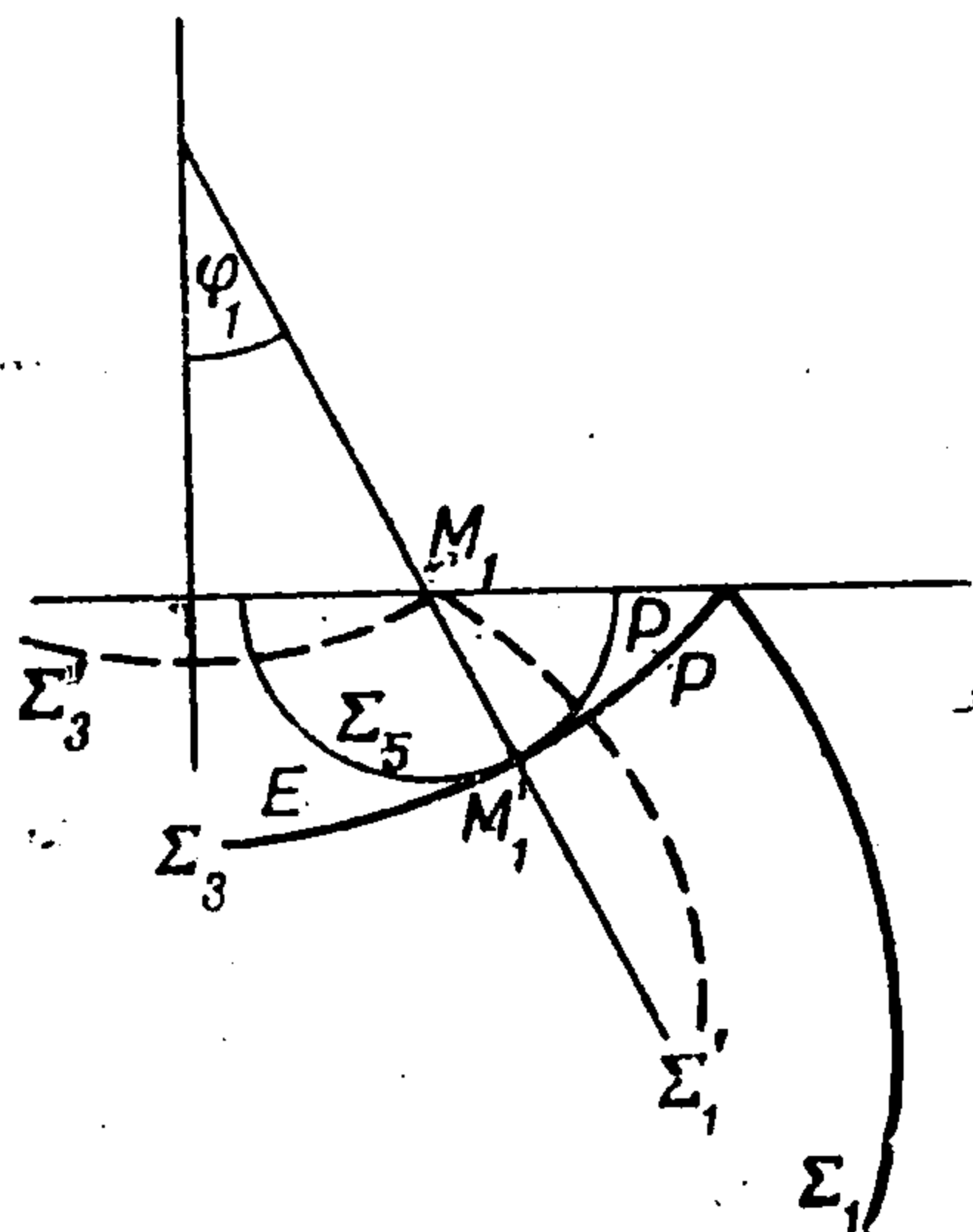
При прохождении волной Σ_3 зоны пластического деформирования среды между Σ_1 и Σ_2 она будет волной пластической, если $I_{(3)} \geq 1$, и будет волной разгрузки, если $I_{(3)} < 1$. Вычисляя интенсивность касательных напряжений $I = 1/2 s_{ij}s_{ij}$ за поверхностью Σ_3 , получим условие для определения типа волны

$$I_{(3)} = \left(\frac{\omega_3}{\omega_{3\infty}} \right)^2 [3\zeta \sin^2 2\varphi + (1 - \zeta)^2], \quad \omega_{3\infty} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha - \beta} \quad (2.7)$$

где $\omega_{3\infty}$ — интенсивность волновой поверхности Σ_1 при $t \rightarrow \infty$.

Анализ соотношения (2.7) показывает, что при φ , мало отличающимся от нуля и конечном $\omega_3 / \omega_{3\infty}$, $I < 1$, т. е. отраженная безвихревая волна Σ_3 является волной разгрузки. Однако при $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 получены из условия $I = 1$, Σ_3 может стать пластической волной.

В точке $M_1^{(1)}$ за волновой поверхностью имеется упругое напряженное состояние материала слева от точки $M_1^{(1)}$ и пластическое — справа от точки $M_1^{(1)}$. Поскольку интенсивность $\omega_3^{(1)}$ волновой поверхности Σ_3 изменяется непрерывно вдоль Σ_3 , то точка M_1 может быть источником слабого возмущения, которое по принципу Гюйгенса будет распространяться в виде осесимметричной волновой поверхности Σ_5 , на которой будут претерпевать разрыв третьи производные от σ_{ij} и u_i , так что поверхность Σ_5 будет отделять зоны упругого и пластического поведения материала за Σ_3 (фиг. 2).



Фиг. 2

При $\varphi_2 < \varphi < 1/2 \pi$ отраженная безвихревая волна Σ_3 снова становится волной разгрузки и в точке M_4 ($\varphi = \varphi_2$) на Σ_3 имеет место то же явление, что и в точке M_1 .

Зависимость $F = I (\omega_{3\infty} / \omega_3)^2$ приведена на фиг. 3 для различных значений коэффициента Пуассона $\sigma = 0, 0.1, \dots, 0.5$. Из фигуры следует, что $\sigma = 0.3$ — 0.5 при $\varphi_{10} < \varphi < \varphi_{20}$, где $\varphi_{10} \approx 20^\circ$ и $\varphi_{20} \approx 70^\circ$, сферическая отраженная волна при конечном $\omega_3 / \omega_{3\infty} > 1$ отражается всегда пластической волной.

При $0 < \varphi < \varphi_{10}$ и $\varphi_{20} < \varphi < 1/2 \pi$ отраженная волновая поверхность Σ_3 в момент отражения является волной разгрузки.

Интенсивность волны разгрузки Σ_3 изменяется при ее распространении согласно уравнению [3]

$$\frac{\delta \omega_3^{(1)}}{\delta t} + \frac{1}{t} \omega_3^{(1)} = [\varepsilon_{ij}^p] v_i^{(3)} v_j^{(3)} \quad (2.8)$$

$$[\varepsilon_{ij}^p] v_i^{(3)} v_j^{(3)} = 1/2 \gamma (2/3 - \sin^2 2\varphi) (\sigma_1 - \sigma_2 + \sqrt{3})$$

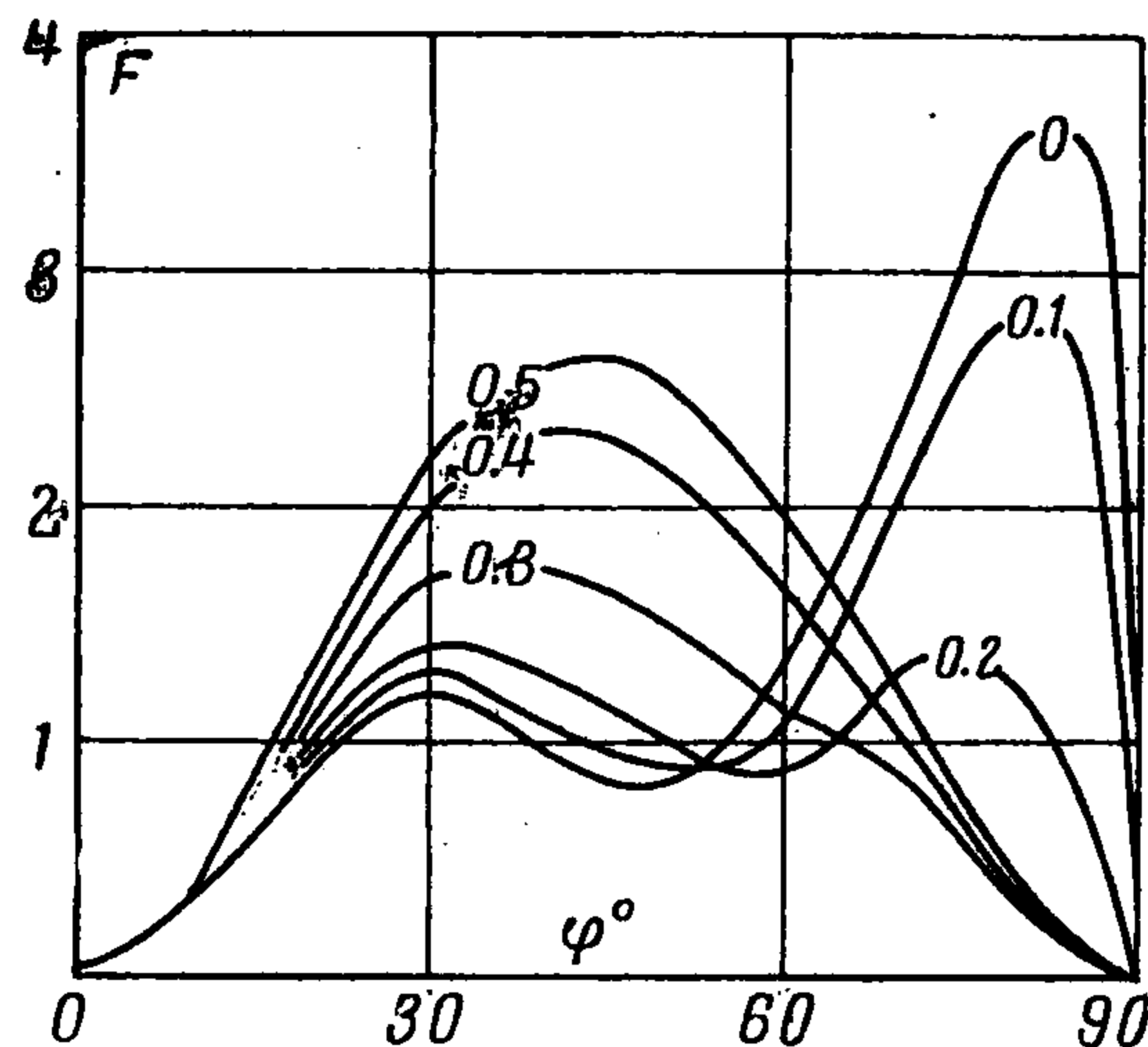
$$\sigma_1 - \sigma_2 = -(\alpha - \beta) \omega_3 - \varepsilon (\varphi_1 - \varphi_2) - \dots$$

$$\varepsilon = t - r, \quad r = \sqrt{t^2 - 4t \cos \varphi + 4}$$

Время t_1 прохождения [волной Σ_3 зоны пластического деформирования, материала между Σ_1 и Σ_2 определяется

$$t_{10} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \quad (2.9)$$

$$t_{20} = \frac{4 - \varepsilon^2}{2(2 \cos \varphi - \varepsilon)} = \frac{1}{\cos \varphi} + \varepsilon \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \dots$$



Фиг. 3

Интегрируя соотношения (2.8) при условиях (2.9), получим

$$\omega_3^{(1)} = \frac{C_5}{t} + \frac{\gamma(\alpha - \beta)}{\alpha t} \left(\frac{2}{3} - \sin^2 2\varphi \right) \int_{t_{10}}^t \left[C_1 e^{-g(\alpha - \beta)t} + \frac{\sqrt{3}}{g(\alpha - \beta)^2} - \right. \\ \left. - t(t - \sqrt{t^2 - 4t \cos \varphi + 4}) \left(\varphi_3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial t} + 2\gamma \omega_3 - \frac{\omega_3}{t} + \frac{2\sqrt{3}\gamma}{\alpha - \beta} \right) \right] dt \quad (2.10)$$

Постоянная интегрирования C_5 определяется из условия $t = t_{10}$, $\omega_3^{(1)} = -\zeta \omega_3$. Следует отметить, что при $\varphi = 1/2 \arcsin \sqrt{2/3}$ интенсивность волны Σ_3 изменяется по закону распространения упругих волн, если $1/2 \arcsin \sqrt{2/3} < \varphi_1$. К моменту времени $t = t_{20}$ отраженная безвихревая волна Σ_3 входит в зону упругого напряженного со-

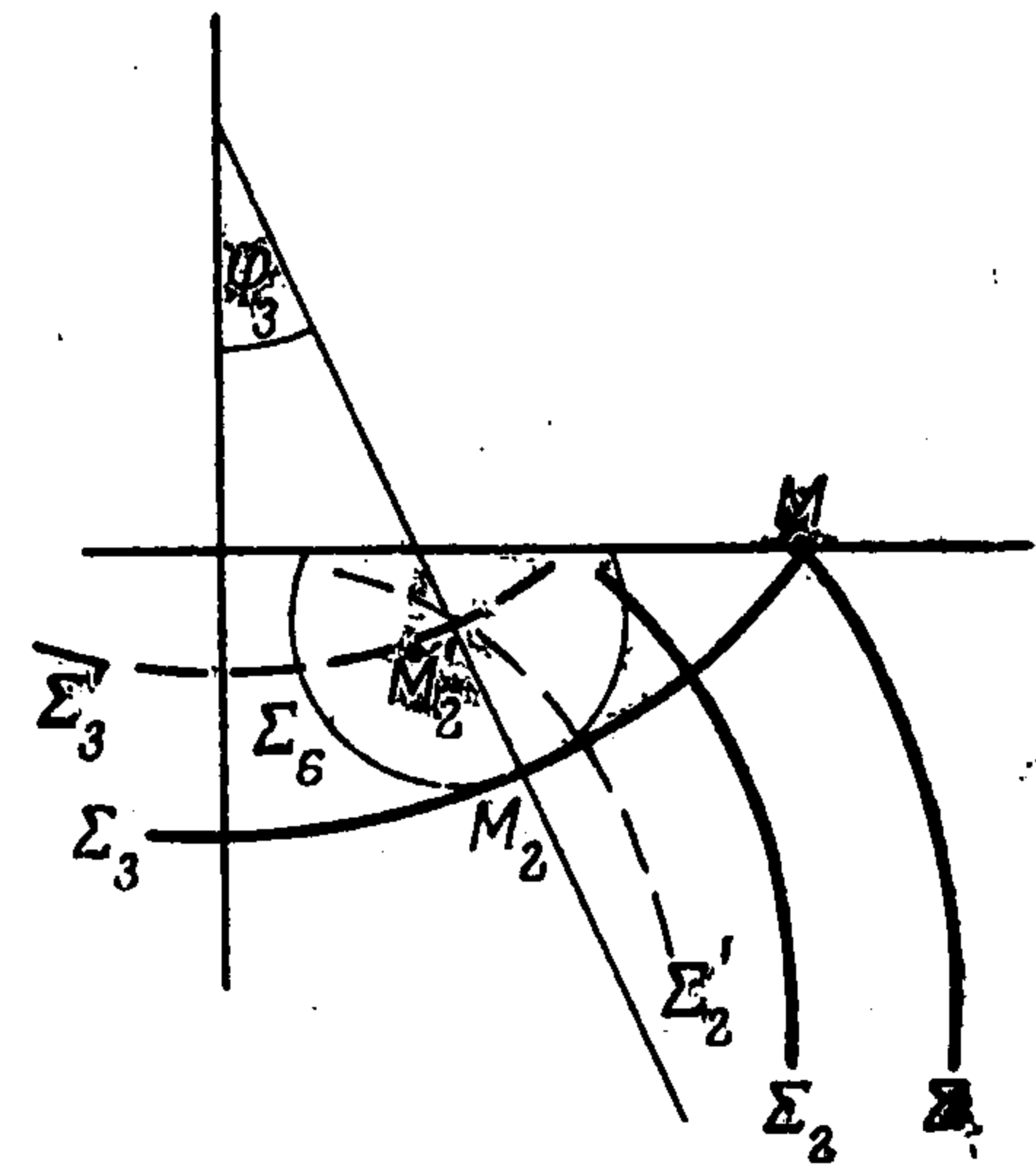
стояния материала за поверхностью Σ_2 . Из выполнения условий динамической совместности (2.1) при пересечении волновых фронтов Σ_2 и Σ_3 следует, что их пересечение регулярно, т. е. волны пересекаются не взаимодействуя.

Исследуем характер волны Σ_3 при ее входе в упругую зону. Из условий динамической совместности (2.1) вычислим I за Σ_3 при $t = t_{20}$:

$$I = \left(\frac{\omega_3^{(1)}(t_{20})}{\omega_{3\infty}} \right)^2 \quad (2.11)$$

где

$$\omega_3^{(1)}(t_{20}) = -\zeta\omega_3(t_{10}) + \varepsilon(2/3 - \sin^2 2\varphi) \times \\ \times \left\{ \frac{\omega_3(t_{10})}{2t_{10}} \zeta + \frac{\gamma\sqrt{3}}{2\alpha g(\alpha - \beta)t_{10}} + \frac{C_1\gamma(\alpha - \beta)}{\alpha t_{10}} e^{-g(\alpha - \beta)t_{10}} \right\} \quad (2.12)$$



Фиг. 4

Из соотношений (2.11), (2.12) следует, что при $\varphi \approx 0$, $\zeta \approx 1$ отраженная безвихревая волна Σ_3 входит в упругую зону как волна пластического нагружения с интенсивностью $\omega_3^{(1)}(t_{20})$ и распространяется далее по закону (2.8).

По направлениям $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ отраженная волна Σ_3 является волной пластической и затухает при малых $\omega_3^{(1)}$ по закону [3]

$$\omega_3^{(1)}(t_2) = \frac{\omega_3^{(1)}(t_{10})}{t} \exp \left\{ -\frac{4}{3} \gamma \int_{t_{10}}^{t_2} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{s_{ij} s_{ij}}} \left(1 - \frac{2(s_{ij} v_i^{(3)} v_j^{(3)})^2}{s_{ij} s_{ij}} \right) \right] dt \right\} \\ s_{ij} v_i^{(3)} v_j^{(3)} = (2/3 - \sin^2 2\varphi) (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.13) \\ s_{ij} s_{ij} = 2/3 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (t_{10} \leq t \leq t_{20})$$

Здесь t_{20} растет при $\varphi \rightarrow 1/2 \pi$ и разложение t_{20} в ряд по ε расходится.

При входе в упругую зону за поверхность Σ_2 волна разгрузки Σ_3 может быть волной пластического нагружения ($\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$) или упругой волной ($\varphi_3 < \varphi < 1/2 \pi$) в зависимости от знака неравенства $\omega_3^{(1)}(t_{20}) \geq \omega_{3\infty}$.

Точка M_2 на волновой поверхности Σ_3 является точкой перехода от пластического деформирования материала за Σ_3 к упругому за Σ_3 в момент пересечения волновых поверхностей Σ_2 и Σ_3 и является источником слабого возмущения, которое будет распространяться в виде тороидальной волновой поверхности Σ_6 , на которой возможны разрывы третьих производных от σ_{ij} и v_i , так что за Σ_3 в области $M_0 M_2$ среда находится в пластическом деформировании, а в области $M_2 M$ — в упругом (фиг. 4).

Таким образом, отраженная безвихревая волна Σ_3 будет распространяться в зоне за Σ_2 как волна нагрузки при $0 \leq \varphi \leq \varphi_3$ по закону (2.8) и как упругая волна при $\varphi_3 < \varphi < 1/2 \pi$.

Поступила 29 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. On the propagation of tremor over the surface of an elastic solid. Philos Trans, Roy. Soc of London., Ser. A, 1904, vol. 203.
2. Шемякин Е. И. Задача Лэмба для внутреннего источника. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 4, стр. 780—782.
3. Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. О распространении волн в упруго-вязко-пластической среде. Изв. АН СССР, МТТ, 1966, № 4, стр. 111—123.
4. Зволинский Н. В., Рыков Г. В. Отражение плоской пластической волны и преломление ее на границе двух полупространств. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, стр. 672—680.
5. Томас Т. Пластическое течение и разрушение твердых тел. «Мир», 1964.