РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА КОНУСЕ

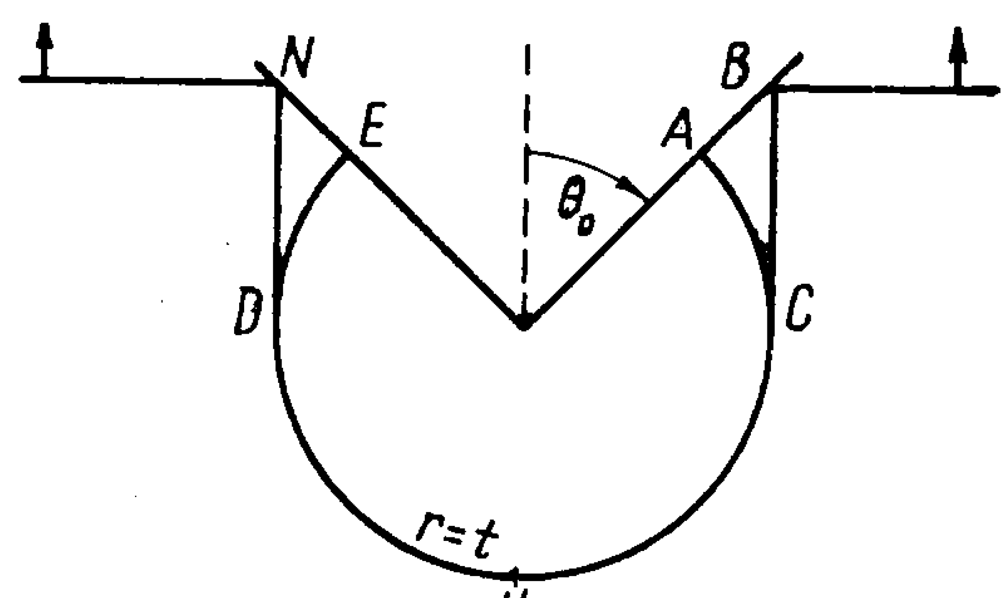
В. Б. Поручиков (Москва)

Задача о дифракции плоской нестационарной акустической волны на бесконечном круговом конусе произвольного угла раствора рассматривалась в работах [1,2] с использованием численных и асимптотических методов. В предлагаемой работе методом интегральных преобразований получено аналитическое решение этой задачи в осесимметричном случае. Исследовано решение задачи о дифракции ступенчатой волны давления; приведены результаты численных расчетов.

§ 1. Пусть акустическая волна давления

$$u_0 = (c_0t - r\cos\theta)^\nu\, \eta\,(c_0t - r\cos\theta)$$

набегает на конус (фиг. 1) произвольного угла раствора $2\theta_0$. Здесь $\eta(x)$ — функция Хевисайда, c_0 — скорость звука в среде, r, θ — сферические координаты точки; $\operatorname{Re}\nu > -1$. Ось конуса перпендикулярна к фронту падающей волны, достигающего вершины конуса в момент $t = 0$. Без ограничения общности можно положить $c_0 = 1$ и искать решение в виде $u = w + u_0$. Тогда уравнение возмущенного движения среды вместе с граничными и начальными условиями запишется в сферической системе координат следующим образом:



Фиг. 1

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) = r^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial\theta} = -\frac{\partial u_0}{\partial\theta} \quad \text{при } \theta=\theta_0, \qquad w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t=0 \tag{1.1}$$

(В том случае, когда производная от u_0 в обычном смысле не существует, ее следует понимать как обобщенную.) Предполагается, что функция $w(r, \theta, t)$ удовлетворяет условиям применения преобразования Лапласа по t, а ее изображение допускает применение преобразования Конторовича — Лебедева [3] по r.

§ 2. К системе (1.1) применяется преобразование Лапласа по t, а затем преобразование Конторовича — Лебедева по r. Тогда уравнение и граничное условие принимают следующий вид:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right) + \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)\psi = 0 \qquad \left(\psi = \int_0^\infty \frac{\Phi(r,\theta,p)}{\sqrt{r}} K_\mu(pr)\,dr\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{\pi^{3/2}\,\Gamma(1+\nu)}{\sqrt{2}\,p^{3/2+\nu}\cos\pi\mu} P^1_{\mu-1/2}(\cos\theta_0) \quad \text{при } \theta=\theta_0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Re} p > a_0 \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\mu = 0, \quad \Phi(r,\theta,p) \risingdotseq w(r,\theta,t)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция; $P_\mu^\alpha(x)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода для интервала $(-1,1)$ [4]; $K_\mu(x)$ — функция Макдональда.

Решение уравнения (2.1), не имеющее особенностей в области $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и удовлетворяющее граничному условию (2.2), записывается в следующем виде:

$$\psi = \frac{\pi^{3/2}\Gamma(1+\nu)\,P^1_{\mu-1/2}(\cos\theta_0)\,P_{\mu-1/2}(-\cos\theta)}{\sqrt{2}\,p^{3/2+\nu}\cos\pi\mu\,P^1_{\mu-1/2}(-\cos\theta_0)} \tag{2.3}$$

Применяя обратное преобразование Конторовича — Лебедева по μ, получим

$$\Phi = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu)}{\sqrt{2r}\,p^{3/2+\nu}\,i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{P^1_{\mu-1/2}(\cos\theta_0)\,P_{\mu-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu\,P^1_{\mu-1/2}(-\cos\theta_0)} I_\mu(pr)\,\mu\,d\mu \tag{2.4}$$

Здесь $I_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

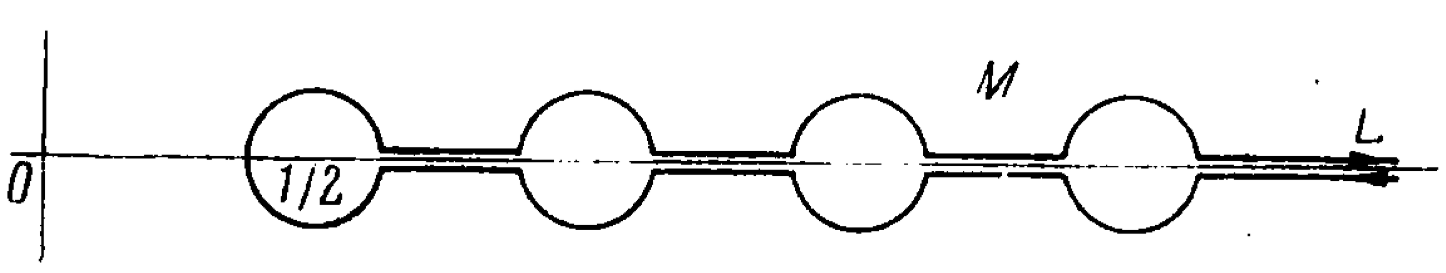
Интеграл в правой части уравнения (2.4) сходится и является аналитической функцией в области $|\arg p| < {}^1/_2\pi - (2\theta_0 - \theta)$. Но функция Φ, как изображение по Лапласу от искомой функции, должна быть аналитической в области $\operatorname{Re} p > a_0$. Для определения функции Φ, аналитической во всей области $\operatorname{Re} p > a_0$ при любом θ из области $\theta_0 \leqslant \theta < \pi$, воспользуемся аналитическим продолжением правой части уравнения (2.4).

Так как

$$P_{\mu-{}^1/_2}^{-m}(\cos\theta) \sim \left(\frac{2}{\pi\sin\theta}\right)^{{}^1/_2} \mu^{m-{}^1/_2} \sin\left(\mu\theta + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon,\ \varepsilon > 0)$$

$$I_\mu(pr) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\mu)}\left(\frac{pr}{2}\right)^\mu \qquad \text{при } |\mu| \to \infty$$

то подынтегральное выражение в (2.4) быстро убывает в правой полуплоскости и можно деформировать контур интегрирования в положение L (фиг. 2), ибо подынтегральное выражение в (2.4) аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re}\mu > 0$ везде вне действительной оси. Как видно на фиг. 2, контур L уходит в бесконечность вдоль действительной оси и при этом обходит простые полюсы подынтегрального выражения. Теперь, как легко убедиться, интеграл в выражении (2.4) (но уже по контуру L) сходится и является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и, таким образом, по теореме единственности представляет функцию Φ в области $\operatorname{Re} p > a_0$.



Фиг. 2

Если теперь применить обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.4) и изменить порядок интегрирования (что можно обосновать после подробного исследования), то получим

$$w = -\frac{\Gamma(1+\nu)}{2\sqrt{2\pi r}} \int\limits_L \frac{P_{\mu-{}^1/_2}^1(\cos\theta_0)\, P_{\mu-{}^1/_2}(-\cos\theta)\,\mu}{\cos\pi\mu P_{\mu-{}^1/_2}^{1}(-\cos\theta_0)}\, d\mu \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{I_\mu(pr)}{p^{{}^3/_2+\nu}} e^{pt} dp \qquad (a > 0) \qquad (2.5)$$

Вычисление интеграла по p в выражении (2.5) приводится в § 4.

§ 3. Если воспользоваться формулой (4.2) (см. § 4), то выражение (2.5) для $w(r, \theta, t)$ запишется следующим образом:

$$w = \frac{\Gamma(1+\nu)}{2ri}(r^2 - t^2)^{{}^1/_2(1+\nu)} \int\limits_L \frac{P_{\mu-{}^1/_2}^1(\cos\theta_0)\, P_{\mu-{}^1/_2}(-\cos\theta)\, P_{\mu-{}^1/_2}^{-1-\nu}(-t/r)\,\mu d\mu}{\cos\pi\mu P_{\mu-{}^1/_2}^{1}(-\cos\theta_0)} \qquad (-r < t < r)$$

$$w = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\pi ri} e^{\pi i\nu}(t^2 - r^2)^{{}^1/_2(1+\nu)} \int\limits_L \frac{\cos[(\mu-\nu)\pi] P_{\mu-{}^1/_2}^1(\cos\theta_0) P_{\mu-{}^1/_2}(-\cos\theta) Q_{\mu-{}^1/_2}^{-1-\nu}(t/r)\mu d\mu}{\cos\pi\mu P_{\mu-{}^1/_2}^1(-\cos\theta_0)}$$

$$(t > r) \qquad (3.1)$$

Здесь $Q_\mu^{\ \alpha}(x)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода.

Исходя из асимптотики присоединенной функции Лежандра первого рода при $|\mu| \to \infty$, легко видеть, что при $2\theta_0 - \theta < \arccos(t/r)$ подынтегральное выражение в (3.1) для $-r < t < r$ экспоненциально убывает вдоль любого луча в плоскости μ вне действительной оси и, следовательно, контур L можно деформировать в мнимую ось. Тогда, так как $P_{\mu-{}^1/_2}^{\ \alpha}(x) = P_{-\mu-{}^1/_2}^{\ \alpha}(x)$, то полученный интеграл обращается в нуль. Следовательно, всюду будем иметь $w = 0$ при $t < 0$, а также при $0 < t < r$, если $2\theta_0 - \theta < \arccos(t/r)$; получается физическая картина течения, представленная на фиг. 1: вне ограниченной области $BCKDN$ возмущений нет.

Если воспользоваться теоремой о вычетах и свести интегралы в (3.1) к рядам по корням подынтегрального выражения $\cos\pi\mu\, P_{\mu-{}^1/_2}^{1}(-\cos\theta_0)$, то ряд по корням функции $\cos\pi\mu$ даст падающую волну с обратным знаком (это легко получить, если применить обратное преобразование Лапласа к формуле Сонина (5) на стр. 75 работы [5] и выразить многочлены Гегенбауэра через присоединенные функции Лежандра первого рода по формуле (4) на стр. 177 работы [4]). Таким образом, для функции u решение записывается в следующем виде:

$$u = \frac{\Gamma(1+\nu)}{2r\cos^2(\theta_0/2)}(r^2-t^2)^{1/2(1+\nu)}P_0^{-1-\nu}(-t/r) + \qquad (t<r)$$

$$+\frac{\pi}{2r}\Gamma(1+\nu)(r^2-t^2)^{1/2(1+\nu)}\sum_{\mu=\mu_n}\frac{(2\mu+1)P_\mu^{\ 1}(\cos\theta_0)P_\mu(-\cos\theta)P_\mu^{-1-\nu}(-t/r)}{\sin\pi\mu dP_\mu^{\ 1}(-\cos\theta_0)/d\mu}$$

$$u = \frac{\sin\nu\pi\Gamma(1+\nu)}{\pi r\cos^2(\theta_0/2)}(t^2-r^2)^{1/2(1+\nu)}e^{\pi i\nu}Q_0^{-1-\nu}(t/r) + \frac{\Gamma(1+\nu)}{r}e^{\pi i(1+\nu)}(t^2-r^2)^{1/2(1+\nu)}\sum_{\mu=\mu_n}\times$$

$$\times\frac{+\sin[(\mu-\nu)\pi]P_\mu^{\ 1}(\cos\theta_0)P_\mu(-\cos\theta)\times(2\mu+1)Q_\mu^{-1-\nu}(t/r)}{\sin\pi\mu\, dP_\mu^{\ 1}(-\cos\theta_0)/d\mu} \qquad (t>r) \qquad (3.2)$$

Здесь $\mu_n (n = 0, 1, 2\ldots)$ — положительный корень функции $P_\mu^{\ 1}(-\cos\theta_0)$ (причем $1<\mu_0<\mu_1<\ldots$). Следует заметить, что полученный в (3.2) ряд для $t<r$ и $-1<\operatorname{Re}\nu\leqslant 0$ будет условно сходящимся.

Для поверхности $\theta=\theta_0$ формула (3.2) дает

$$u = \frac{\Gamma(1+\nu)}{2r\cos^2(\theta_0/2)}(r^2-t^2)^{1/2(1+\nu)}P_0^{-1-\nu}(-t/r) - \qquad (t<r)$$

$$-\frac{\Gamma(1+\nu)}{r\sin\theta_0}(r^2-t^2)^{1/2(1+\nu)}\sum_{\mu=\mu_n}\frac{(2\mu+1)P_\mu^{-1-\nu}(-t/r)}{dP_\mu^{\ 1}(-\cos\theta_0)/d\mu} \qquad (3.3)$$

$$u = \frac{\sin\nu\pi\,\Gamma(1+\nu)}{\pi r\cos^2(\theta_0/2)}e^{\pi i\nu}(t^2-r^2)^{1/2(1+\nu)}Q_0^{-1-\nu}(t/r) + \qquad (t>r)$$

$$+\frac{2\Gamma(1+\nu)}{\pi r\sin\theta_0}e^{\pi i\nu}(t^2-r^2)^{1/2(1+\nu)}\sum_{\mu=\mu_n}\frac{(2\mu+1)\sin[(\mu-\nu)\pi]Q_\mu^{-1-\nu}(t/r)}{dP_\mu^{\ 1}(-\cos\theta_0)/d\mu}$$

При $r\to 0$ получим из формулы (3.2)

$$u(0,\theta,t) = \frac{t^\nu}{\cos^2(\theta_0/2)}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}\sim O(r^{\mu_0-1}) \qquad (3.4)$$

Полученное значение $u(0, \theta, t)$ согласуется с результатом работы [6] (где определяется значение в вершине конуса без решения всей задачи).

Легко проверить, что полученное решение (3.2) удовлетворяет условиям последовательного применения преобразований Лапласа и Конторовича — Лебедева и является, вообще говоря, обобщенным решением волнового уравнения. Из оценки (3.4) следует, что полученное решение (3.2) единственно [2].

Пусть падающая волна имеет вид ступеньки ($\nu=0$). Соответствующие формулы для этого случая получатся из (3.1) — (3.4), если $\nu\to 0$. Исследуя полученное решение, можно показать, что функция u терпит разрыв только вдоль линий BC и DN и величина скачка равна

$$\left(\frac{\sin(2\theta_0-\theta)}{\sin\theta}\right)^{1/2} \qquad (\theta_0\leqslant\theta\leqslant 2\theta_0)$$

На окружности $r=t$ терпит разрыв нормальная производная $\partial u/\partial r$. Причем, при подходе к дугам AC и DE как слева, так и справа функция $\partial u/\partial r$ имеет особенность логарифмического типа, а при приближении к дуге DKC эта функция имеет конечный предел.

Если $\theta_0 \to {}^1/_2\,\pi$, то легко показать, что решение, полученное при $\nu = 0$, стремится к решению для случая тупого конуса [1]. Если угол θ_0 мал, то получается результат, который можно найти, решая задачу методом запаздывающего потенциала.

Формула (3.3) для давления на конусе при $\nu = 0$ имеет следующий вид:

$$u(r, \theta_0, t) = \frac{1+x}{2\cos^2(\theta_0/2)} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin\theta_0} \sum_{\mu=\mu_n} \frac{(2\mu+1)\,P_\mu^{-1}(-x)}{dP_\mu^{\,1}(-\cos\theta_0)/d\mu} \qquad (x < 1) \qquad (3.5)$$

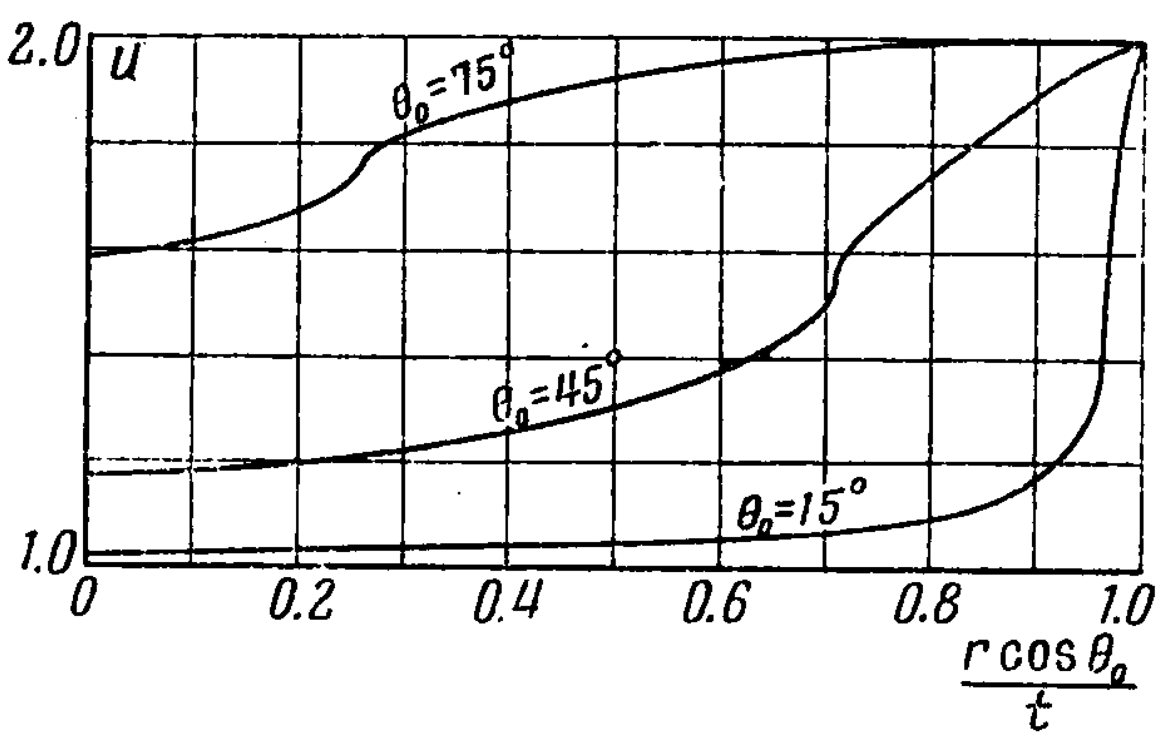
$$u(r, \theta_0, t) = \frac{1}{\cos^2(\theta_0/2)} + \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\pi\sin\theta_0} \sum_{\mu=\mu_n} \frac{(2\mu+1)\,Q_\mu^{-1}(x)\sin\pi\mu}{dP_\mu^{\,1}(-\cos\theta_0)/d\mu} \qquad (x > 1) \quad (x = t/r)$$

$$u(r, \theta_0, t) \to \frac{1}{\cos^2(\theta_0/2)} \quad \text{при } r \to 0$$

$$u(r, \theta_0, t) \to \frac{1}{\cos^2(\theta_0/2)} - \frac{2}{\pi\sin\theta_0} \sum_{\mu=\mu_n} \frac{(2\mu+1)\sin\pi\mu}{\mu(\mu+1)\,dP_\mu^{\,1}(-\cos\theta_0)/d\mu} \qquad \text{при } r \to t$$

$$u(r, \theta_0, t) \to 2 \quad \text{при } r \to t/\cos\theta_0$$

В заключение на фиг. 3 приводятся результаты расчета для функции $u(r, \theta_0, t)$ по формуле (3.5) для углов $\theta_0 = 15$, 45 и 75°. Корни функции $P_\mu^{\,1}(-\cos\theta_0)$ для $\theta_0 = 15°$ взяты из [7], а для $\theta_0 = 45$ и 75° вычислены по формуле Макдональда [8].



Фиг. 3

Заметим, что в случае падения произвольной плоской волны решение обобщается при помощи интеграла Дюамеля.

§ 4. Требуется найти обратное преобразование Лапласа от функции $I_\mu(pr)/p^\nu$, т. е. вычислить интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{I_\mu(pr)}{p^\nu} e^{pt}\, dp \qquad (4.1)$$

для произвольного комплексного μ и $a > 0$, $r > 0$, $\operatorname{Im} t = 0$ $\operatorname{Re}\nu > -{}^1/_2$. Искомый интеграл (4.1) легко приводится к сумме двух интегралов

$$\frac{1}{\pi}\sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\right] \int_0^\infty \frac{\sin xt}{x^\nu} J_\mu(xr)\,dx + \frac{1}{\pi}\cos\left[\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\right] \int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^\nu} J_\mu(xr)\,dx$$

если наложить на μ добавочное ограничение $-1 < \operatorname{Re}(\mu - \nu)$. Но каждый из интегралов, полученных в этой сумме, согласно формулам 6.699 [9] выражается через гипергеометрическую функцию, и, таким образом, интеграл (4.1) выражается через сумму гипергеометрических функций. Оказывается, что эта сумма может быть выражена через присоединенные функции Лежандра по формулам 8.771 (2) и 8.775 (1) из [9], если учесть опечатку в индексе гипергеометрической функции во втором члене суммы в формуле 8.775 (1) для $P_\nu^{\,\mu}(x)$, где должно быть

$$F\left({}^1/_2(\nu+\mu+2),\ {}^1/_2(\mu-\nu+1);\ {}^3/_2;\ x^2\right)$$

В результате получается формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{I_\mu(pr)}{p^\nu} e^{pt}\,dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (r^2 - t^2)^{{}^1/_2(\nu-{}^1/_2)} P_{\mu-{}^1/_2}^{{}^1/_2-\nu}(-t/r) \qquad (-r < t < r)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{I_\mu(pr)}{p^\nu} e^{pt}\,dp = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi r}} \sin[(\mu-\nu)\pi]\, e^{\pi i(\nu+{}^1/_2)} (t^2 - r^2)^{{}^1/_2(\nu-{}^1/_2)} Q_{\mu-{}^1/_2}^{{}^1/_2-\nu}(t/r) \quad (t > r)$$

(4.2)

(Отметим, что при $t < -r$ интеграл (4.1) обращается в нуль.)

Можно показать при помощи аналитического продолжения, что формула (4.2) выполняется по всей комплексной плоскости μ при $\mathrm{Re}\, \nu > -1/2$.

В частном случае $\mu - \nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) формула (4.2) совпадает с уже известными формулами, которые получаются из 29.10 и 29.71 из [10] при помощи правила сдвига (если учесть потерянный множитель $1/2$ в правой колонке формулы 29.71).

Автор благодарит А. Я. Сагомоняна и С. С. Григоряна за обсуждение статьи и В. А. Ерошина за помощь в работе.

Поступила 4 VIII 1967

НИИ механики
Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. М., Изд-во Моск. ун-та, 1962.
2. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1963.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция). М., «Наука», 1966.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя и др.). М., «Наука», 1966.
6. Lu Ting. On the diffraction of an arbitrary pulse by a wedge or a cone. Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, No. 1.
7. Waterman P. C. Roots of Legendre functions of variable index. J. Math. and Phys., 1963, vol. 42, No 4, p. 323.
8. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
10. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

О СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ В УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Н. Д. Вервейко

(Воронеж)

Рассматривается полупространство из упруго-вязко-пластического материала в котором на сфере, расположенной на глубине от свободной поверхности, задан импульс давления. Получены соотношения, описывающие пластическое деформирование среды в распространяющейся зоне между волнами нагрузки и разгрузки.

Рассмотрено отражение волны нагрузки от свободной поверхности, проведено аналитическое исследование состояния среды за отраженной безвихревой волной.

Получены выражения, описывающие изменение интенсивности отраженной безвихревой волны, показано, что в некоторой области отраженная безвихревая волна будет волной пластического нагружения.

Задача о распространении сферической волны в упругом, предварительно напряженном полупространстве и ее отражении от свободной поверхности рассматривалась рядом авторов [1,2].

Ниже рассматривается первоначальное ненапряженное полупространство из упруго-вязко-пластического материала, в котором на сфере Σ_0 радиусом R_0 с центром в точке O на глубине h от свободной поверхности задано давление $P_0 > k\sqrt{3}$, действующее малый промежуток времени $[0, t_0]$, при $t > t_0$ давление на сфере Σ_0 отсутствует. В момент времени $t > t_0$ часть материала, ограниченная волновыми поверхно-