ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧАСТИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Л. Е. Соколова (Москва)

В работе изучаются механические системы, подверженные действию гироскопических сил с неполной диссипацией. К рассмотрению таких систем приводит, в частности, исследование устойчивости стационарных движений. Получены условия, при выполнении которых диссипативная функция обеспечивает асимптотическую устойчивость. Рассмотрен пример.

1. Асимптотическая устойчивость равновесий гироскопических систем. Пусть на голономную систему со стационарными связями и силовой функцией, не зависящей явно от времени, действуют гироскопические силы Γ_i и диссипативные силы F_i вида

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} q_j^{\cdot}, \qquad F_i = \frac{\partial F}{\partial q_i^{\cdot}} \qquad (\gamma_{ij} = -\gamma_{ji} = \mathrm{const}), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

где q_i — обобщенные координаты, F — постоянно отрицательная квадратичная форма обобщенных скоростей

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \qquad (\beta_{ij} = \mathrm{const})$$

Введем лагранжиан

$$L = T + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}' q_i q_j^{\cdot} + U \qquad (d_{ij}' - d_{ji}' = \gamma_{ij})$$

Здесь через T и U обозначены кинетическая энергия и силовая функция системы. Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i^{\cdot}} \tag{1.1}$$

Допустим, что система находится в состоянии равновесия $q_i = 0$. В таком случае уравнения (1.1) будут уравнениями возмущенного движения.

Уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \delta^2 L}{\partial q_i^{\cdot}}\right) - \frac{\partial \delta^2 L}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i^{\cdot}}, \qquad \delta^2 L = \delta^2 T + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}' q_i q_j^{\cdot} + \delta^2 U \tag{1.2}$$

Здесь $\delta^2 T$ и $\delta^2 U$ — совокупность членов второго порядка в разложении кинетической энергии и силовой функции.

Пусть $\delta^2 U$ представляет собой определенно отрицательную квадратичную форму q_i. Известно [1], что в этом случае положение равновесия будет устойчивым.

В силу уравнений (1.2) имеем

$$d \,/\, dt\, (\delta^2 T - \delta^2 U) = F$$

Так как $\delta^2 T - \delta^2 U$ есть функция определенно положительная, а F — постоянно отрицательная (причем обе функции не зависят явно от времени), то, согласно теореме Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости [2,3], равновесие, в силу системы первого приближения, будет асимптотически устойчивым, если уравнения (1.2) не допускают траекторий, вдоль которых $F \equiv 0$.

Пусть ранг квадратичной формы F равен p. Тогда справедливо представление:

$$F = -{}^1/_2 \; [(\varphi_1')^2 + \ldots + (\varphi_p')^2]$$

где через φ_i' обозначены некоторые линейно независимые формы обобщенных скоростей

$$\varphi_i' = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j^{\cdot}, \qquad c_{ij} = \mathrm{const} \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

Если существуют траектории, вдоль которых $F \equiv 0$, то на этих траекториях

$$\varphi_i' = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q_l^{\cdot}} = \sum_{i=1}^{p} c_{li}\varphi_i' = 0 \tag{1.3}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \delta^2 L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial \delta^2 L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Характеристическое уравнение системы (1.4) не имеет нулевых корней, поэтому из уравнений (1.3), (1.4) следует

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}q_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{1.5}$$

Представим уравнения (1.4) в форме Гамильтона

$$q_i^{\cdot} = \partial H / \partial p_i, \qquad p_i^{\cdot} = -\partial H / \partial q_i \qquad (H = \delta^2 T - \delta^2 U) \tag{1.6}$$

Функция H будет определенно положительной квадратичной формой $q_1,\ldots, q_n$; $p_1,\ldots, p_n$. В этом случае, согласно [4,5], корни характеристического уравнения все чисто мнимые, т. е. имеют вид $\pm\lambda_k i$, и, кроме того, существует каноническое преобразование $q_i = q_i(x_i, y_i)$, $p_i = p_i(x_i, y_i)$, приводящее H к нормальному виду

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(y_i^{\cdot})^2 + \lambda_i^2 x_i^2]$$

Преобразование, приводящее H к нормальному виду, оказывается линейным, с постоянными коэффициентами, в общем случае комплексными. Пусть оно в матричной форме имеет вид

$$\begin{Vmatrix} q \\ p \end{Vmatrix} = B\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} \partial q_i / \partial x_j & \partial q_i / \partial y_j \\ \partial p_i / \partial x_j & \partial p_i / \partial y_j \end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

В нормальных переменных x_i, y_i уравнения (1.6) принимают вид

$$x_i^{\cdot} = y_i, \qquad y_i^{\cdot} = -\lambda_i^2 x_i \tag{1.8}$$

Отсюда

$$x_i^{\cdot\cdot} = -\lambda_i^2 x_i \tag{1.9}$$

Уравнения (1.5), с учетом (1.7), (1.8), представляются в форме

$$D_1 X + D_2 X^{\cdot} = 0 \tag{1.10}$$

$$D_1 = \| d_{kj} \| = C \| \partial q_i / \partial x_j \|, \quad D_2 = \| d_{k,\, n+j} \| = C \| \partial q_i / \partial y_j \| \quad (k = 1,\ldots, p;\ i, j = 1, \ldots, n)$$

Пусть $\pm\lambda_1 i,\ldots, \pm\lambda_k i$ представляют собой все корни характеристического уравнения с кратностями $n_1,\ldots, n_k$. Условимся величину A, соответствующую корню $\lambda_l i$, обозначить символом $A(\lambda_l)$. Уравнения (1.9), (1.10) в этих обозначениях примут вид

$$(x_i(\lambda_l))^{\cdot\cdot} = -\lambda_l^2 x_i(\lambda_l) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.11}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\ \sum_{j=\nu_{l-1}}^{\nu_l} [d_{mj} x_j(\lambda_l) + d_{m,\, n+j}(x_j(\lambda_l))^{\cdot}] = 0 \quad (\nu_l = n_1 + \ldots + n_l;\ m = 1, \ldots, p) \tag{1.12}$$

Любое решение уравнений (1.11), (1.12) имеет вид

$$x_j(\lambda_l) = u_j(\lambda_l)\exp(\lambda_l it) + v_j(\lambda_l)\exp(-\lambda_l it) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Подставляя это решение в уравнения (1.12) и учитывая, что функции $\exp(\lambda_k it)$, $\exp(\lambda_m it)$ $(\lambda_k \neq \lambda_m)$ линейно независимы, получим следующие необходимые и достаточные условия существования ненулевого решения уравнений (1.11), (1.12):

$$r[D(\lambda_l)] = n_l, \quad D(\lambda_l) = \| d_{mj} + \lambda_l i d_{m,\, n+j} \| \quad (m = 1, \ldots, p;\ i = \nu_{l-1} + 1, \ldots, \nu_l) \tag{1.13}$$

При выполнении равенств (1.13) система (1.4) не допускает ненулевых траекторий, вдоль которых $F = 0$, и равновесие в силу системы первого приближения, а значит и в силу полной системы (1.1), будет асимптотически устойчивым.

Если $r\,[D(\lambda_l)] < n_l$, так, например, в случае, когда ранг диссипации p меньше n_l, уравнения (1.11), (1.12) допускают ненулевое решение и асимптотической устойчивости в силу первого приближения не будет.

Учитывая (1.7), представим матрицу $D(\lambda_l)$ в виде

$$D(\lambda_l) = CM(\lambda_l), \qquad M(\lambda_l) = \| \partial q_m / \partial x_j(\lambda_l) + i\lambda_l \partial q_m / \partial y_j(\lambda_l) \|$$

Если $r\,[C]$ равен n, то уравнения (1.5), а значит и уравнения (1.12), допускают только тривиальное решение, поэтому имеют место равенства (1.13). Отсюда следует, что $r\,[M(\lambda_l)] = n_l$.

Вычисляя миноры порядка n_l матриц $D(\lambda_l)$, получим некоторые многочлены P_i относительно переменных c_{ij} степени, не превышающей n_l. Так как $r[M(\lambda_l)] = n_l$, ни один из многочленов P_i не обращается в нуль тождественно. Следовательно, существуют такие действительные c_{ij}, что все $P_i \neq 0$. В этом случае равновесие будет асимптотически устойчивым.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть разложение силовой функции гироскопической системы в окрестности положения равновесия начинается с определенно отрицательной квадратичной формы. В случае, когда наибольшая кратность корня характеристического уравнения системы (1.4), равная s, не превышает ранга p диссипативной функции, равновесие будет асимптотически устойчивым в силу полной системы уравнений, если ранг каждой матрицы

$$D(\lambda_l) = \begin{Vmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} \\ \ldots\ldots \\ c_{p1} \ldots c_{pn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial q_m}{\partial x_j(\lambda_l)} + \lambda_l i \dfrac{\partial q_m}{\partial y_j(\lambda_l)} \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix} (m, j = 1, \ldots, n) \\ (l = n_1 + \ldots + n_{l-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_l) \end{matrix}$$

равен кратности этого корня. Это условие будет необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости в первом приближении. Добавление любых диссипативных сил с диссипативной функцией ранга меньшего s не сделает равновесие асимптотически устойчивым в силу первого приближения, в то время как всегда можно указать диссипативную функцию ранга s, чтобы равновесие было асимптотически устойчивым.

2. Асимптотическая устойчивость стационарных движений. Рассмотрим голономную механическую систему, кинетическая энергия T и силовая функция U которой не зависят явно от времени и последних k обобщенных координат $q_{n-k+1}, \ldots, q_n$. Примем, что индексы r, s изменяются от 1 до $n - k$, индексы m, l от $n - k + 1$, до n. Пусть на систему действуют диссипативные силы с определенно отрицательной относительно своих переменных диссипативной функцией

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=n-p+1}^{n} \beta_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \qquad (p \geqslant k)$$

и некоторые постоянные силы $F_{n-k+1}, \ldots, F_n$ такие, что система допускает стационарное движение [6]

$$q_r = 0, \qquad q_m^{\cdot} = q_{m0}^{\cdot} \tag{2.1}$$

В работе [7] было показано, что в случае, когда квадратичная часть разложения $T - U$ в окрестности стационарного движения (2.1) есть функция определенно положительная по отношению к вариациям координат и скоростей, движение (2.1) будет асимптотически устойчивым, если у системы с кинетической энергией T' вида

$$T' = \frac{1}{2} \Big[\sum_{r,s} a_{rs} q_r^{\cdot} q_s^{\cdot} + \sum_{r,l} a_{rl} q_r^{\cdot} q_{l0}^{\cdot} \Big]$$

и силовой функцией U' вида

$$U' = U + \sum_{m,l} a_{ml} q_{m0}^{\cdot} q_{l0}^{\cdot}$$

не существует в окрестности равновесия $q_r = 0$ движений, вдоль которых выполняются следующие равенства:

$$\sum_s a_{ms} q_s^{\cdot} + \sum_l a_{ml} q_{l0}^{\cdot} = 0, \qquad q_{n-p+1} = \ldots = q_{n-k} = 0 \quad (p \geqslant k) \tag{2.2}$$

Вариации уравнений (2.2) запишутся в виде

$$\sum_r (a_{mr})_0 \, q_r^{\cdot} + \sum_{l,\, s} \left(\frac{\partial a_{ml}}{\partial q_s}\right)_0 q_s q_{l0}^{\cdot} = 0, \qquad q_{n-p+1} = \ldots = q_{n-k} = 0 \tag{2.3}$$

Уравнения первого приближения для системы с лагранжианом $L' = T' + U'$ примут форму

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \delta^2 L'}{\partial q_r^{\cdot}} - \frac{\partial \delta^2 L'}{\partial q_r} = 0 \tag{2.4}$$

К уравнениям (2.3), (2.4) применимы с небольшими изменениями рассуждения п. 1. Условия асимптотической устойчивости, аналогичные (1.13), имеют вид

$$r\,[D(\lambda_p')] = n_l', \qquad D(\lambda_l') = C' \left\| \begin{matrix} \partial q_i / \partial x_j (\lambda_l') + i\lambda_l' \partial q_i / \partial y_j (\lambda_l') \\ -(\lambda_l')^2 \partial q_i / \partial y_j (\lambda_l') + i\lambda_l' \partial q_i / \partial x_j (\lambda_l') \end{matrix} \right\|$$

Здесь $i\lambda_l'$ — корень характеристического уравнения системы (2.4), n_l' — кратность этого корня, C' — матрица коэффициентов уравнений (2.3), x_i', y_i' — нормальные переменные уравнений (2.4).

Пусть диссипативная функция F не зависит от циклических координат. Уравнениями возмущенного движения для нециклических координат будут уравнения Рауса

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_r^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial q_r^{\cdot}} \qquad (R = R_2 + R_1 - R_0) \tag{2.5}$$

Здесь R_2 — определенно положительная квадратичная форма скоростей, R_1 — линейная форма скоростей, R_0 зависит только от координат.

Уравнения (2.5) имеют вид, аналогичный (1.1), поэтому, если разложение $U - R_0$ начинается с определенно отрицательной квадратичной формы переменных q_r, при исследовании асимптотической устойчивости можно применять результаты, полученные в п. 1.

Замечание. Отметим, что в работе [8] при доказательстве леммы 3.1 допущена неточность. Формулировка леммы должна быть изменена, а именно: *Лемма* 3.1. Если введенная диссипация сделает равновесие асимптотически устойчивым, то среди коэффициентов $\nu_{k+1}^2, \ldots, \nu_n^2$ нет ни одного, равного одному из числа $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, но возможно совпадение некоторых из $\nu_{k+1}^2, \ldots, \nu_n^2$.

Дальнейшие выкладки статьи сохраняют силу только в том случае, если среди вновь появившихся частот $\nu_{k+1}^2, \ldots, \nu_n^2$ нет равных между собой.

3. *Пример.* Рассмотрим механическую систему, представляющую собой твердое тело с маятником, подвешенным в центре масс тела точке O. Предполагается, что никакие внешние силы на систему не действуют. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — неподвижная система координат; $Oy_1y_2y_3$ — подвижная система координат, с осями, направленными по главным центральным осям инерции тела. Маятник подвешен так, что его движение происходит в плоскости Oy_1y_2. Угол, образуемый маятником с отрицательным направлением оси Oy_2, обозначим через α. В оси подвеса маятника действуют момент сил вязкого трения — $k\alpha^{\cdot}$ и момент упругих сил — $\varkappa\alpha$.

Введем следующие обозначения: x_1', x_2', x_3' — координаты центра масс системы относительно $Ox_1x_2x_3$; φ, ψ, θ — углы Эйлера, определяющие положение $Oy_1y_2y_3$; p_1, p_2, p_3 — проекции мгновенной угловой скорости тела на оси y_1, y_2, y_3; A_1, A_2, A_3 — моменты инерции тела относительно y_1, y_2, y_3; l — длина маятника; M — масса тела, m — масса маятника.

Координаты ψ, x_1', x_2', x_3' являются циклическими, и уравнения движения можно записать в форме (2.5).

Исследуемое стационарное движение имеет вид

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad \alpha = 0, \quad \psi^{\cdot} = \psi_0^{\cdot} = \omega, \quad (x_i')^{\cdot} = (x_i')_0^{\cdot} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Предполагая, что циклические импульсы не возмущаются, положим в возмущенном движении

$$\theta = \pi/2 + \xi_1, \quad \varphi = \xi_2, \quad \alpha = \xi_3 \tag{3.1}$$

Условиями определенной отрицательности $\delta^2(U - R_0)$ служат неравенства

$$\omega^2(B_2 - B_3) > 0, \quad \omega^2(B_2 - B_1) > 0, \quad (B_2 - B_1)(\varkappa - a\omega^2) - a^2\omega^2 > 0$$

$$B_1 = A_1 + a, \quad B_2 = A_2 + a, \quad B_3 = A_3 + a, \quad a = Mml^2 / M + m$$

Диссипативная функция имеет вид $F = -{}^1/_2 k (\xi_3^{\cdot})^2$.

Полагая в уравнениях Рауса для возмущений значений нециклических координат $\xi_3 = \xi_3^{\cdot} = 0$, получим в первом приближении систему вида (1.4) с функцией

$$\delta^2 L = {}^1/_2 [B_1(\xi_1^{\cdot})^2 + B_3(\xi_2^{\cdot})^2 + 2\omega\gamma_{12}\xi_2\xi_1^{\cdot} + (B_3 - B_2)\omega^2\xi_1^2 + (B_1 - B_2)\omega^2\xi_2^2]$$

$$\gamma_{12} = B_1 + B_2 - B_3$$

Кроме того, будет выполняться уравнение

$$\varphi_1 = \omega\gamma_{12}(\xi_1^{\cdot} + \omega\xi_2) = 0 \tag{3.2}$$

В нормальных переменных уравнение (3.2) имеет вид

$$\gamma_{12}\left\{i\omega\left[\frac{(B_2 - B_1)(B_2 - B_3)}{B_1 B_2}\right]^{1/2}\left(-\frac{B_2}{B_1 - B_2} - \frac{1}{4B_1}\right)x_2 + \left(-\frac{B_2}{B_1 - B_2} + \frac{1}{4B_1}\right)y_2\right\} = 0$$

Отсюда $D(\lambda_1) = 0$ и условие (1.13) не выполнено. Следовательно, стационарное движение не будет асимптотически устойчивым в силу системы первого приближения.

Продифференцировав уравнение (3.2) по времени, в силу уравнений возмущенного движения, получим

$$\gamma_{12}(B_3 - B_2)\omega(\xi_2^{\cdot} - \omega\xi_1) = 0$$

В первом приближении

$$p_1 = \omega\xi_2 + \xi_1^{\cdot}, \quad p_2 = \omega + \eta^{\cdot}, \quad p_3 = \xi_2^{\cdot} - \omega\xi_1 \qquad (\eta^{\cdot} = 0)$$

Отсюда на траекториях, вдоль которых $F \equiv 0$, в первом приближении имеем

$$p_1 = p_3 = 0, \quad p_2 = \text{const}$$

Из доказательства теоремы Барбашина — Красовского, о которой упоминалось выше, следует, что если уравнения допускают траектории, вдоль которых $F \equiv 0$, то движение будет асимптотически стремиться либо к нулю, либо к одной из указанных траекторий. Следовательно, в первом приближении при $\omega\gamma_{12} \neq 0$ все движения (3.1) асимптотически стремятся к вращению системы вокруг оси y_2, имеющей постоянное направление в пространстве.

Автор благодарит Г. К. Пожарицкого за ценные замечания по работе.

Поступила 29 VIII 1967

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. «Наука», 1965.
2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1960.
3. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1952.
4. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Гостехиздат, 1956.
5. Синг Дж. Л. Классическая динамика. Физматгиз, 1963.
6. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости диссипативных систем. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
7. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений при частичной диссипации. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
8. Пожарицкий Г. К. Характеристические показатели затухающих колебаний механических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.