О РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ

Л. Д. Акуленко (Москва)

Исследуются вращательные и колебательные решения возмущенных существенно нелинейных систем с многими степенями свободы. При помощи метода «малого параметра» строятся установившиеся резонансные решения и на основе первого метода Ляпунова выводятся достаточные условия их асимптотической устойчивости. Для иллюстрации развитой методики рассчитывается конкретный пример из нелинейной механики. Ранее аналогичные результаты были получены для частного случая систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. Исследованная в статье система является также обобщением систем Ляпунова и близких к ним.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим вещественную систему с малым параметром

$$dx_i / dt = F_i(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

для которой порождающая автономная система

$$dx_i^\circ / dt = F_i(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \equiv F_{i0} \tag{1.2}$$

допускает устойчивое двухпараметрическое семейство вращательно-колебательных решений вида [1]

$$x_i^\circ = \delta_i (T_i / 2\pi) \omega(E)(t - t_0 + \tau) + \varphi_i(\omega(E)(t - t_0 + \tau), E)$$

$$\delta_i = 1 \quad (i \leqslant p) \qquad \delta_i = 0 \quad (i > p, \ p \leqslant n)$$

В случае чисто колебательной системы $p = 0$, т. е. $x_i^0 = \varphi_i$. Здесь φ_i — периодические функции фазы $\psi = \omega(E)\ (t - t_0 + \tau)$ периода 2π, величины T_i суть постоянные периоды функций F_i и f_i по вращающимся координатам, $\omega = \omega(E)$ — собственная частота, τ — фазовая постоянная, E — второй параметр семейства.

При помощи замены [2,3] переменных x_i вида

$$x_i = x_i^\circ(\psi, E) + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} [A_{ik}(\psi, E) h_k + \overline{A}_{ik}(\psi, E) \overline{h}_k] \tag{1.3}$$

в которой (A_{ik}) — $n \times (n - 2)$-матрица, вообще говоря, комплексная (знак черты здесь означает комплексное сопряжение), систему (1.1) можно привести к более удобному для дальнейших исследований виду. Указанная матрица участвует в неособенной замене

$$y_i = \frac{\partial x_i^\circ}{\partial \tau} u_1 + \frac{\partial x_i^\circ}{\partial E} u_2 + \sum_{k=3}^{n} A_{ik}(\psi, E) u_k$$

которая систему в вариациях невозмущенных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_0 y_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

приводит к системе с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{du_1}{dt} = \omega'(E) u_2, \qquad \frac{du_2}{dt} = 0, \qquad \frac{du_j}{dt} = \sum_{k=3}^{n} H_{jk}(E) u_k \qquad (j = 3, \ldots, n)$$

В этой системе корни характеристического уравнения

$$\Delta(\rho) = | H_{jk} - \delta_{jk}\rho | = 0 \qquad (j, k = 3, \ldots, n)$$

будут характеристическими показателями для системы в вариациях (1.4), имеющими отрицательные действительные части (остальные два равны нулю). В результате можно получить систему

$$\frac{dE}{dt}=f(t, E, \psi, h, \varepsilon), \quad \frac{d\psi}{dt}=\omega(E)+F(t, E, \psi, h, \varepsilon), \quad \frac{dh}{dt}=H(E)h+g(t, E, \psi, h, \varepsilon) \tag{1.5}$$

Здесь h — $(n-2)$-мерный вектор, а $H(E)$ — $(n-2)\times(n-2)$-устойчивая матрица; причем эти величины комплексны. Функции f, ω, F и g вещественны для действительных значений E, ψ, ε и комплексных h, периодичны по t и ψ с постоянными периодами θ и 2π, соответственно (θ — период функций f_i по t). Далее, для функций f, F, g при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ и $|h|$ справедливы оценки

$$|f|, \quad |F|, \quad |g|\leqslant\lambda_1|\varepsilon|+\lambda_2|h|^2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2<+\infty) \tag{1.6}$$

Отсюда вытекают следующие тождества:

$$(f, F, g)\equiv 0, \qquad \frac{\partial^{r+s}(f, F, g)}{\partial\psi^r\,\partial F^s}\equiv 0, \qquad \frac{\partial^{r+s+1}(f, F, g)}{\partial h\,\partial\psi^r\,\partial E^s}\equiv 0 \qquad (r, s\geqslant 1)$$

при $\varepsilon=0$, $h=0$, если f, F и g нужное число раз дифференцируемы.

В статье развивается прямой метод построения стационарных резонансных решений системы (1.5) для всех значений $t\in[t_0, \infty)$. В отличие от известных схем усреднения [1,2] этот «метод малого параметра» позволяет проследить также предельное при $t\to\infty$ поведение возмущенной системы. Точнее, он позволяет указать достаточные условия осуществления стационарных, т. е. установившихся резонансных режимов. Исследование устойчивости в смысле Ляпунова этих режимов указывает, как развиваются близкие к ним в начальный момент движения. Отсюда ясно, какое важное значение при этом приобретает задача исследования устойчивости по Ляпунову возмущенного движения. Заметим, что невозмущенное движение неустойчиво, причем имеет место критический случай: двухкратному нулевому характеристическому показателю соответствует одна группа решений.

§ 2. Построение стационарного резонансного решения системы. Решение относится к резонансному вида $m\,/\,l$, если

$$\omega(E_0^*)\,/\,\nu=l\,/\,m \qquad (\nu=2\pi\,/\,\theta)$$

Здесь m и l — взаимно простые целые числа. Если функции f, ω, F, H и g аналитичны в некоторой области

$$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0, \qquad |E-E_0^*|\leqslant\alpha, \qquad |\operatorname{Im}\psi|\leqslant\beta, \qquad |h|\leqslant\sigma$$

то естественно [4] искать решение в виде рядов

$$E=E_0^*+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^iE_i, \qquad \psi=\frac{l}{m}\nu(t-t_0)+\tau+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\psi_i, \qquad h=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^ih_i \tag{2.1}$$

в которых E_i, ψ_i, h_i $(i\geqslant 1)$ имеют период $T=m\theta$. На основании оценок (1.6) вытекает, что функции

$$E=E_0^*, \qquad \psi=l/m\nu\,(t-t_0)+\tau, \qquad h=0$$

будут решением системы (1.5) при $\varepsilon=0$. Подставляя ряды (2.1) в систему (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим бесконечную последовательность зацепляющихся систем относительно E_i, ψ_i, h_i, и, в частности, систему для первых добавок

$$\frac{dE_1}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)_0, \qquad \frac{d\psi_1}{dt}=\omega_0'E_1+\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right)_0, \qquad \frac{dh_1}{dt}=H_0h_1+\left(\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)_0$$

Здесь символ $(\ldots)_0$ означает, что выражение берется для порождающего решения и $\varepsilon=0$. Из первого элементарного уравнения находим

$$E_1=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)_0dt_1+A_1 \qquad (A_1=\mathrm{const})$$

Из изложенного следует, что E_1 будет периодической функцией, если фазовая постоянная удовлетворяет уравнению

$$P(\tau)=\int_0^T\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt=0 \qquad (\operatorname{Im}\tau^*=0) \tag{2.2}$$

Это условие оказывается необходимым и достаточным при тех требованиях, которые наложены на функцию f и остальные величины. Соотношение (2.2) называется условием фазового баланса. В этих исследованиях условие периодичности и аналогичные ему будут играть решающую роль, так как они позволяют исключить вековые члены.

Функция ψ_1 находится аналогично

$$\psi_1=\omega_0' A_1(t-t_0)+\int_{t_0}^t\left[\omega_0'\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt_2+\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_0\right]dt_1+B_1$$

Требование периодичности при выполнении условия $\omega'(E_0^*)\neq 0$ позволяет определить постоянную A_1:

$$A_1^*=-(\omega_0' T)^{-1}\int_0^T\left[\omega_0'\int_{t_0}^t\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt_1+\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_0\right]dt$$

В результате периодические функции E_1 и h_1 полностью найдены

$$E_1=\int_{t_0}^t\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt_1+A_1^*, \qquad h_1=\int_{-\infty}^t e^{H_0(t-t_1)}\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt_1$$

а величина ψ_1 определена с точностью до постоянной B_1.

Из уравнений для вторых добавок получим, в частности,

$$E_2=B_1\int_0^t\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\,\partial \psi}\right)_0 dt_1+\int_{t_0}^t S_2(t_1)\,dt_1+A_2 \qquad (A_2=\text{const})$$

Здесь S_2 — известная периодическая функция

$$S_2(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\,\partial E}\right)_0 E_1+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\,\partial h}\right)_0 h_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\right)_0 h_1^2+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\,\partial \psi}\right)_0\int_{t_0}^t\left[\omega_0'\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt_2+\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_0+\omega_0' A_1^*\right]dt_1$$

Из условия периодичности E_2 находится постоянная B_1:

$$B_1^*=-\left(\frac{\partial P}{\partial \tau^*}\right)^{-1}\int_0^T S_2(t)\,dt$$

если τ^* — простой вещественный корень уравнения (2.2). В результате периодическая функция ψ_1 определена. Подставляя ее в выражения для E_2 и ψ_2, можно найти

$$A_2^*=-(\omega_0' T)^{-1}\int_0^T\left\{\omega_0'\int_{t_0}^t\left[B_1^*\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\,\partial \psi}\right)_0+S_2\right]dt_1+\frac{1}{2}\omega_0'' E_1^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\,\partial E}\right)_0 E_1+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\,\partial \psi}\right)_0 \psi_1+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\,\partial h}\right)_0 h_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}\right)_0 h_1^2\right\}dt$$

Таким образом, периодические функции E_2 и h_2 полностью определяются из системы второго приближения, а ψ_2 равна

$$\psi_2=\int_{t_0}^t\left[\omega_0' E_2+\frac{1}{2}\omega_0'' E_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\,\partial E}\right)_0 E_1+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\,\partial \psi}\right)_0 \psi_1+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\,\partial n}\right)_0 h_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2}\right)_0 h_1^2\right]dt_1+B_2$$

Постоянная интегрирования B_2 в этом выражении определяется из условия периодичности E_3 и т. д.

Совершенно аналогично находятся поправки со сколь угодно высоким индексом. Методом индукции доказывается, что таким способом можно получить любое количество ограниченных периодических коэффициентов рядов (2.1), т. е. формально с любой степенью точности по ε для всех $t \in [t_0, \infty)$ найти единственное в области определения и аналитичности системы (1.5) резонансное решение.

Замечание 2.1. Стационарное резонансное решение системы (1.5) можно построить последовательными приближениями при помощи схемы

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 + \varepsilon \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\, \partial E}\right)_0 x_{i-1} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\, \partial \psi}\right)_0 y_{i-1} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon\, \partial h}\right)_0 z_{i-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}\right)_0 z_{i-1}^2 + X(t,\ x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, \varepsilon)\right]$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \omega_0' x_i + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_0 + \varepsilon \left[\frac{1}{2}\omega_0'' x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\, \partial E}\right)_0 x_{i-1} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\, \partial \psi}\right)_0 y_{i-1} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon\, \partial h}\right)_0 z_{i-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}\right)_0 z_{i-1}^2 + Y(t, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, \varepsilon)\right]$$

$$\frac{dz_i}{dt} = H_0 z_i + \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}\right)_0 + \varepsilon \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon\, \partial E}\right)_0 x_{i-1} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon\, \partial \psi}\right)_0 y_{i-1} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon\, \partial h}\right)_0 z_{i-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial h^2}\right)_0 z_{i-1}{}^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial E}\right)_0 x_{i-1} z_{i-1} + Z(t, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, \varepsilon)\right]$$

Здесь X, Y, Z — известные достаточно гладкие функции. Доказательство сходимости последовательных приближений, т. е. функций x_i, y_i, z_i к периодическим периода T функциям, участвующим в замене

$$E = E_0^* + \varepsilon x, \qquad \psi = (l / m)\, \nu\, (t - t_0) + \tau + \varepsilon y, \qquad h = \varepsilon z \tag{2.3}$$

содержится в [4] и поэтому вопрос обоснования предложенной схемы не рассматривается. Нужно заметить, что метод последовательных приближений применим к системам типа (1.5), если функции f, ω, F и g обладают частными производными по ε, E, ψ, h до второго порядка включительно, удовлетворяющими вместе с dH / dE условиям Липшица с не зависящими от t постоянными в некоторой области

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \qquad -\alpha \leqslant E - E_0^* \leqslant \alpha,\ \psi \in (-\infty, \infty),\ |h| \leqslant \sigma$$

Полученный результат можно кратко сформулировать в виде утверждения

Теорема 2.1. Если

1) функции f, ω, F, H и g достаточно гладки и удовлетворяют условиям, перечисленным в § 1;

2) уравнение (2.2) имеет вещественный корень τ^*;

3) справедливо неравенство

$$\omega'(E_0^*)\, \partial P / \partial \tau^* \neq 0$$

то возмущенная система (1.5) имеет единственное стационарное резонансное решение при $|\varepsilon|$ достаточно малом, принадлежащее области определения и гладкости функций f, ω, F, H и g, а при $\varepsilon = 0$ равное

$$E = E_0^* = \text{const}, \qquad \psi = (l / m)\, \nu\, (t - t_0) + \tau^*, \qquad h = 0$$

Замечание 2. 2. Единственность решения понимается здесь в том смысле, что фиксированной совокупности величин m, l, E_0^* и τ^* соответствует одно решение вида (2.3). Нетрудно показать, что на промежутке длины 2π уравнение (2.2) допускает четное число вещественных корней τ^*.

Далее, возможны также критические случаи, когда условие 3) теоремы не выполняется.

Замечание 2.3. Пусть τ^* — вещественный кратный корень уравнения (2.2) кратности $r \geqslant 2$, но $\omega_0' \neq 0$. Единственность решения в определенном выше смысле тогда может нарушаться. Стационарное резонансное решение представляется, вообще говоря, рядом по дробным степеням малого параметра. Постоянные интегрирования типа B_i определяются из нелинейных алгебраических уравнений. Общее полное исследование в этом случае затруднено и требует привлечения тонких результатов теории неявных аналитических функций. Полная картина расщепления интегральных кривых является весьма запутанной.

Замечание 2.4. Несколько чаще на практике встречается случай, когда уравнение (2.2) удовлетворяется тождественно для некоторых m и l. Тогда говорят о движениях высших степеней. Для колебательных нелинейных систем на возможность таких случаев указано в [4], где исследовались периодические решения методом Пуанкаре, а также рассмотрен особый аналогичный случай для квазилинейной резонансной системы. Для нелинейной аналитической системы с одной степенью свободы, близкой к консервативной, в [5] найдены периодические резонансные движения первой, второй и третьей степеней и исследована их устойчивость по Ляпунову. Аналогичная вращательная задача рассматривалась в [6]. Следует отметить, что этот критический случай для общей системы (1.1) вызывает большой практический и теоретический интерес и заслуживает детального исследования.

Замечание 2.5. Критические случаи, когда $\omega_0' = 0$, представляют практический интерес, если ω не зависит от E, т. е. имеет место «квазилинейная» система. Тогда вещественные постоянные E_0^* и τ^*, определяющие стационарный режим, находятся из уравнений

$$P(E_0, \tau) \equiv \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt = 0, \qquad Q(E_0, \tau) \equiv \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt = 0$$

а условие 3) теоремы 2.1 имеет вид

$$\partial (P, Q) / \partial (E_0^*, \tau^*) \neq 0 \tag{2.4}$$

Если же величина ω зависит от E, но $\omega_0' = 0$, то для данного набора чисел m и l единственность решения может нарушаться. Этот случай в практике нелинейных движений является исключительным. Очевидно, изменяя числа m и l можно добиться, чтобы $\omega_0' \neq 0$.

§ 3. Исследование устойчивости возмущенного резонансного решения. С этой целью при помощи замены

$$E = E(t, \varepsilon) + U, \qquad \psi = \psi(t, \varepsilon) + V, \qquad h = h(t, \varepsilon) + W$$

составим уравнения в вариациях

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial f}{\partial E} U + \frac{\partial f}{\partial \psi} V + \frac{\partial f}{\partial h} W + f_1(t, U, V, W, \varepsilon)$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\omega' + \frac{\partial F}{\partial E}\right) U + \frac{\partial F}{\partial \psi} V + \frac{\partial F}{\partial h} W + F_1(t, U, V, W, \varepsilon)$$

$$\frac{dW}{dt} = \left(H'z + \frac{\partial g}{\partial E}\right) U + \frac{\partial g}{\partial \psi} V + \left(H + \frac{\partial g}{\partial h}\right) W + g_1(t, U, V, W, \varepsilon)$$

Здесь функции f_1, F_1, g_1 периодичны по t и их разложения по U, V, W начинаются с квадратичных членов. На основании известной теоремы Ляпунова можно ограничиться исследованием устойчивости точки покоя системы линейного приближения [4].

При $\varepsilon = 0$ можно видеть, что у $(n - 2)$ характеристических показателей системы в вариациях вещественные части отрицательны, а у остальных двух и вещественные и мнимые обращаются в нуль и им соответствует одна группа решений. В этом случае разложение критических характеристических показателей будет производиться по степеням $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Одно из решений системы в вариациях имеет вид

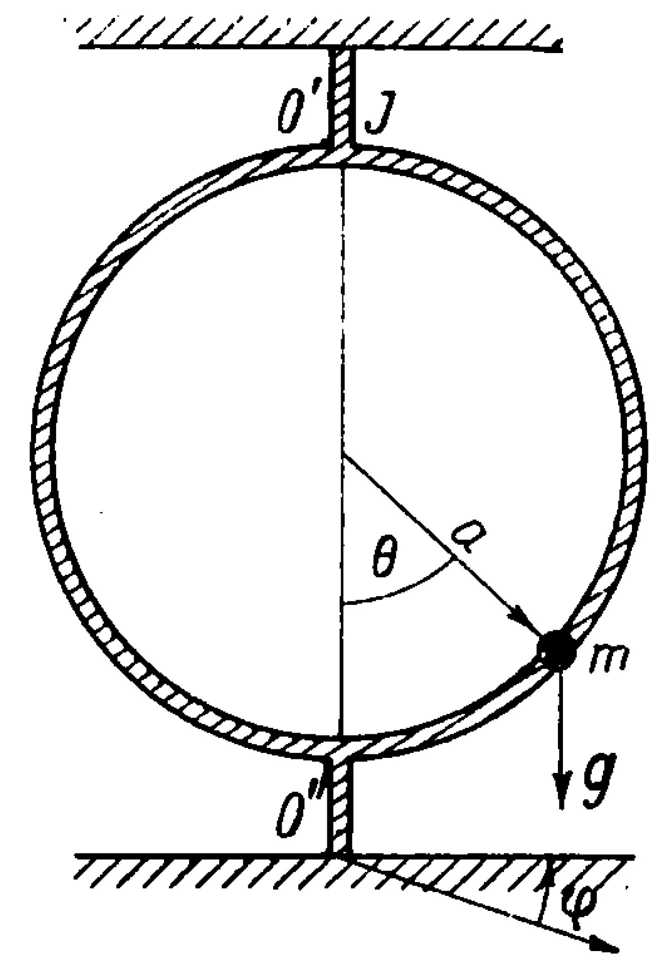
$$U = u \exp \gamma t, \qquad V = v \exp \gamma t, \qquad W = w \exp \gamma t$$

Здесь γ — критический характеристический показатель, u, v, w — периодические функции t, причем

$$\gamma=\sum_{i=1}^{\infty}\delta^i\gamma_i,\quad u=\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i u_i,\quad v=\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i v_i,\quad w=\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i w_i$$

т. е. функции u_i, v_i, w_i, $(i\geqslant 0)$ должны быть также периодическими периода T. С учетом этого обстоятельства из условий периодичности u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1, u_2 находится для γ_1 соотношение

$$\gamma_1^2=\omega'(E_0^*)\ \partial P/\partial\tau^*$$



Таким образом, при $\gamma_1^2>0$ возмущенное решение неустойчиво для $t\gtrless t_0$; если же $\gamma_1^2<0$, то его устойчивость зависит от знака величины γ_2, которая определяется из условий периодичности функций v_1, w_2, u_3, а именно,

$$\gamma_2=\frac{1}{2T}\int_0^T\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon\,\partial E}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varepsilon\,\partial\psi}\right)_0\right]dt$$

В результате для обоих критических характеристических показателей получено выражение

$$\gamma=\pm\delta(\omega_0'\partial P/\partial\tau^*)^{1/2}+\delta^2\gamma_2+O(\delta^3)$$

Отсюда при $\varepsilon>0$ достаточно малом следует утверждение теоремы 3.1.

Теорема 3.1. Построенное возмущенное резонансное решение (2.3) устойчиво по Ляпунову и притом асимптотически для $t\geqslant t_0$, если

$$\omega'(E_0^*)\frac{\partial P}{\partial\tau^*}<0,\qquad \int_0^T\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon\,\partial E}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varepsilon\,\partial\psi}\right)_0\right]dt<0$$

и неустойчиво в противном случае.

Замечание 3.1. Случай $\gamma_1=0$ исключается теоремой 2.1, т. е. первое условие является необходимым. Если же $\gamma_2=0$, то для установления достаточных признаков устойчивости нужно аналогичным образом учесть более высокие степени δ, т. е. вычислить γ_3 и т. д.

Замечание 3.2. В случае $\omega=\mathrm{const}$ резонансное решение будет асимптотически устойчивым, если собственные значения матрицы (2.4) имеют отрицательные вещественные части (см. замечание 2.5).

В заключение исследуем конкретную задачу из механики.

§ 4. **Пример.** Рассматривается некоторая механическая модель, представляющая собой систему с двумя степенями свободы в поле сил тяжести (фигура). Предполагается, что в точках закрепления с неподвижным основанием на плоский круглый обруч действует возвращающий упругий момент и момент сил трения, пропорциональный угловой скорости. Составляя функцию Лагранжа системы с учетом возмущающих сил и произведя соответствующее дифференцирование, можно получить систему

$$ma^2\theta^{\cdot\cdot}-ma^2\sin\theta\cos\theta\varphi^{\cdot 2}+mga\sin\theta=-\alpha_1\theta^{\cdot}+f_1(\nu t)$$

$$I\varphi^{\cdot\cdot}+ma^2\sin^2\theta\varphi^{\cdot\cdot}+2ma^2\sin\theta\cos\theta\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}+k_1^2\varphi=-\alpha_1\sin^2\theta\varphi^{\cdot}-\lambda_1\varphi^{\cdot}-z_1(\varphi)+g_1(\nu t)$$

Здесь I — момент инерции обруча относительно оси $O'O''$, α_1 — постоянный коэффициент вязкого трения шарика с внешней средой, f_1 и g_1 — внешние периодические моменты, z_1 — функция, учитывающая нелинейные эффекты упругого момента. Введением обозначений

$$\frac{ma^2}{I}=\varepsilon,\quad \frac{\alpha_1}{ma^2}=\varepsilon\alpha,\quad \frac{f_1(\nu t)}{ma^2}=\varepsilon f(\nu t),\quad \frac{k_1^2}{I}=k^2$$

$$\frac{z_1(\varphi)}{I}=\varepsilon z(\varphi),\quad \frac{\lambda_1}{I}=\lambda,\quad \frac{\alpha_1}{I}=\varepsilon^2\alpha,\quad \frac{g_1(\nu t)}{I}=\varepsilon g(\nu t)$$

можно получить систему типа (1.1)

$$\theta^{\cdot\cdot} - \sin\theta\cos\theta\varphi^{\cdot 2} + (g/a)\sin\theta = \varepsilon\,[f(\nu t) - \alpha\theta^{\cdot}]$$

$$\varphi^{\cdot\cdot} + \lambda\varphi^{\cdot} + k^2\varphi = \varepsilon\,(1 + \varepsilon\sin^2\theta)^{-1}[g(\nu t) + k^2\varphi\sin^2\theta + (\lambda - \alpha)\varphi^{\cdot}\sin^2\theta - {}$$
$$- 2\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\sin\theta\cos\theta - z(\varphi)] \qquad (4.1)$$

Ради определенности рассматривается случай

$$f(\nu t) \equiv f_0\sin\nu t, \qquad g(\nu t) \equiv g_0\sin(\nu t + \delta), \qquad z(\varphi) \equiv \sigma\varphi^3$$

При $\varepsilon = 0$ система (4.1) допускает двухпараметрическое семейство периодических

$$\theta_0 = 2\arcsin(\gamma_1\,\mathrm{sn}\,[2\sqrt{g/a}\,(t+\tau),\ \gamma_1]), \qquad \varphi_0 = 0$$
$$(\gamma_1 = \sqrt{aE_0/2g}, \quad T_0(E_0) = 2\sqrt{a/g}\,K(\gamma_1), \quad \gamma_1 < 1)$$

или вращательно-колебательных решений

$$\theta_0 = 2\,\mathrm{am}\,[\sqrt{E_0/2}\,(t+\tau),\ \gamma_2] = \omega(E_0)(t+\tau) + 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\frac{q^j}{1+q^{2j}}\sin j\omega(E_0)(t+\tau)$$
$$\varphi_0 = 0 \qquad (\gamma_2 = 1/\gamma_1 < 1, \quad T_0(E_0) = 2\sqrt{2/E_0}\,K(\gamma_2), \ q = \exp - \pi K'/K)$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода по соответствующим модулям; E_0, τ — постоянные интегрирования. В дальнейшем ради определенности рассматриваются вращательно-колебательные решения. При помощи замены

$$\theta = \theta_0(\psi, E), \qquad \theta^{\cdot} = \theta^{\cdot}_0(\psi, E), \qquad h_1 = \varphi, \qquad h_2 = \varphi^{\cdot}$$

можно получить систему типа (1.5)

$$dE/dt = \varepsilon\theta_0^{\cdot}(f_0\sin\nu t - \alpha\theta_0^{\cdot}) + \theta_0^{\cdot}\sin\theta_0\cos\theta_0 h_2^2$$

$$d\psi/dt = \sqrt{E/2}\,\pi/K(\gamma_2) + \theta_0^{\cdot}\,[\varepsilon(f_0\sin\nu t - \alpha\theta_0^{\cdot}) + \sin\theta_0\cos\theta_0 h_2^2]\ \times$$
$$\times\int_0^{\theta_1}\{\omega_0'[2E - 2g/a(1-\cos x)]^{-1/2} - \omega_0[2E - 2g/a(1-\cos x)]^{-3/2}\}\,dx$$

$$dh_1/dt = h_2, \quad dh_2/dt = -k^2h_1 - \lambda h_2 + \varepsilon(1 + \varepsilon\sin^2\theta_0)^{-1}\ \times$$
$$\times\ [g_0\sin(\nu t + \delta) + (k^2h_1 + (\lambda - \alpha)h_2)\sin^2\theta_0 - h_2\theta_0^{\cdot}\sin 2\theta_0 - \sigma h_1^3]$$

и исследовать ее на основании методики, развитой в § 2, 3. Однако систему (4.1) можно исследовать непосредственно. Подставляя ряды

$$\theta = \theta_0(\psi_0, E_0) + \varepsilon\theta_1(t) + \ldots, \qquad \varphi = \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \ldots$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим, в частности,

$$\theta_1^{\cdot\cdot} + (g/a)\theta_1\cos\theta_0(\psi_0, E_0) = f_0\sin\nu t - \alpha\theta_0^{\cdot}(\psi_0, E_0)$$
$$\varphi_1^{\cdot\cdot} + \lambda\varphi_1^{\cdot} + k^2\varphi_1 = g_0\sin(\nu t + \delta)$$

Периодическое решение этой линейной системы оказывается возможным найти в явном виде методом вариации постоянных интегрирования

$$\theta_1 = M_1\theta_0^{\cdot} + \frac{1}{\Delta}\left\{\theta_0^{\cdot}\int_0^t\left[\int_0^{t_1}(f_0\sin\nu t_2 - \alpha\theta_0^{\cdot})\theta_0^{\cdot}dt_2 - \omega_0\frac{\partial\theta_0}{\partial\omega_0}(f_0\sin\nu t_1 - \alpha\theta_0^{\cdot}) - N_1\right]dt_1 + {}\right.$$
$$\left. + \omega_0\frac{\partial\theta_0}{\partial\omega_0}\left[\int_0^t(f_0\sin\nu t_1 - \alpha\theta_0^{\cdot})\theta_0^{\cdot}dt_1 - N_1\right]\right\} \equiv M_1\theta_0^{\cdot} + \theta_1^*$$

$$N_1 = \frac{1}{T}\int_0^T\left[\int_0^t(f_0\sin\nu t_1 - \alpha\theta_0^{\cdot})\theta_0^{\cdot}dt_1 - \omega_0\frac{\partial\theta_0}{\partial\omega_0}(f_0\sin\nu t - \alpha\theta_0^{\cdot})\right]dt$$

$$\varphi_1 = [g_0(k^2 - \nu^2)\sin(\nu t + \delta) - g_0\lambda\nu\cos(\nu t + \delta)]\,/\,[(k^2 - \nu^2)^2 + (\lambda\nu)^2]$$

Здесь M_1 и N_1 — постоянные интегрирования, $\Delta = \Delta(0)$ — определитель Вронского для уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + (g / a)\cos\theta_0 x = 0 \qquad (x_1 = \theta^{\cdot}_0, \quad x_2 = \theta^{\cdot}_0 t + \omega_0 \partial\theta_0 / \partial\omega_0)$$

(в скобках указана его фундаментальная система решений). Для простоты рассматривается резонанс вида $m : 1$. Тогда уравнение фазового баланса записывается следующим образом:

$$P(\tau) \equiv -\frac{4\pi m}{\nu}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\sin\nu\tau - \frac{8\alpha\nu}{\pi m}\frac{G(\gamma_2)}{K(\gamma_2)} = 0$$

Здесь G — полный эллиптический интеграл второго рода. При выполнении неравенства

$$\beta = 2\nu^2\alpha G(\gamma_2)(1 + q^{2m}) / \pi^2 m^2 K(\gamma_2) q^m \leqslant 1$$

это уравнение допускает вещественные корни

$$\tau_1 = -(1/\nu)\arcsin\beta, \qquad \tau_2 = (1/\nu)(\pi + \arcsin\beta) \pmod{2\pi}$$

Если $\beta < 1$ (случай $\beta = 1$ является критическим), то $\partial P / \partial\tau^* \neq 0$ и на основании теоремы 2.1 существует резонансное решение возмущенной системы при достаточно малых значениях ε. В частности, для $t \in [0, \infty)$ справедливы выражения

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon(M_1^* \theta_0^{\cdot} + \theta_1^*) + O(\varepsilon^2), \qquad \varphi = \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + O(\varepsilon^3)$$

Здесь введены обозначения

$$M_1^* = \left(\frac{\partial P}{\partial\tau^*}\right)^{-1}\int_0^T \left(2\alpha\theta_1^{\cdot *} - \theta_1^{\cdot *} f_0 \sin\nu t - \frac{1}{2}\sin 2\theta_0 \varphi_1^{\cdot 2}\right)\theta_0^{\cdot}\, dt$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{p_1 - p_2}\int_{-\infty}^{t} [e^{p_1(t-t_1)} - e^{p_2(t-t_1)}]\{-\theta_0^{\cdot}\varphi_1^{\cdot}\sin 2\theta_0 +$$

$$+ \sin^2\theta_0[(\lambda - \alpha)\varphi_1^{\cdot} + k^2\varphi_1 - g_0\sin(\nu t_1 + \delta)]\}\, dt_1$$

$$(p_{1,2} = -\lambda/2 \pm \sqrt{\lambda^2/4 - k^2}, \qquad \partial P / \partial\tau^* = \mp 4\pi m q^m \sqrt{1-\beta^2}/(1+q^{2m}))$$

Далее, на основании теоремы 3.1 можно установить, что возмущенное решение асимптотически устойчиво для $\tau^* = \tau_1$, если $\alpha > 0$.

Поступила 29 III 1967 Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. наук, 1962, т. 17, № 6, стр. 3—126.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3, М., Физматгиз, 1963.
3. Лыкова О. Б. О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит. Укр. матем. ж., 1957, т. 9, № 4, стр. 419.
4. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
5. Кац А. М. Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1, стр. 13—32.
6. Акуленко Л. Д., Волосов В. М. Резонансные вращения высших степеней. Вестн. Моск. ун-та, Математика, механика, 1967, вып. 2, стр. 10—14.