

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Е. И. Харламова (Донецк)

К решению, указанному ранее автором [1], применен разработанный недавно геометрический метод исследования движения тела, имеющего неподвижную точку [2]. Построены подвижный и неподвижный годографы угловой скорости тела для всех значений параметров системы.

Движение твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле силы тяжести описывается уравнениями

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr + (e_2 v_3 - e_3 v_2) \Gamma, \quad \frac{dv_1}{dt} = r v_2 - q v_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C \\ p & q & r \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

где e_1, e_2, e_3 — единичный вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела; Γ — произведение веса тела на расстояние между центром масс и точкой опоры; v_1, v_2, v_3 — единичный вектор направления силы тяжести.

Другие обозначения обычны.

При условиях (0.2)

$$e_2 = 0, \quad e_1 = \cos \delta, \quad e_3 = \sin \delta, \quad \operatorname{tg} \delta = - \left(\frac{A(C - B)(2C - A)^3}{C(A - B)(C - 2A)^3} \right)^{1/2} \quad (C > 2A > 2B)$$

в работе [1] показано, что последние условия выполняются, например, для случая твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, уравнения (0.1) имеют решение [1]

$$\begin{aligned} Ap &= \beta (\cos \mu + \chi \sin \mu \cos \sigma), \\ Cr &= \beta (\sin \mu - \chi \cos \mu \cos \sigma), \end{aligned} \quad q = \beta \left(\frac{(C - 2A)(2C - A)}{3ACH} \right)^{1/2} \sin \sigma$$

$$v_1 H = (3AC - 2AB + BC) \cos \mu + 3AC \chi \sin \mu \cos \sigma - 3A(C - B) \cos \mu \cos^2 \sigma \quad (0.3)$$

$$v_2 H^{3/2} = \sqrt{3AC(C - 2A)(2C - A)} \left[B - 3\chi \left(\frac{AC(A - B)(C - B)}{(C - 2A)(2C - A)} \right)^{1/2} \cos \sigma \right] \sin \sigma$$

$$v_3 H = (3AC - 2BC + AB) \sin \mu - 3AC \chi \cos \mu \cos \sigma - 3C(A - B) \sin \mu \cos^2 \sigma$$

$$\cos \mu = \left(\frac{C(A - B)(C - 2A)}{H(C - A)} \right)^{1/2}, \quad \sin \mu = \left(\frac{A(C - B)(2C - A)}{H(C - A)} \right)^{1/2}$$

$$\chi = \left(\frac{3AC - 2B(A + C)}{3AC} \right)^{1/2}$$

$$\beta^2 = \frac{9A^2 C^2 \Gamma \sqrt{C - A}}{\sqrt{H [A(C - B)(2C - A)^3 + C(A - B)(C - 2A)^3]}}, \quad H = 3AC - B(A + C)$$

Связь со временем устанавливается соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = u_* + \cos \sigma \quad (0.4)$$

$$\tau = t\beta \frac{A + C}{3AC} \left(\frac{3(A - B)(C - B)}{H} \right)^{1/2},$$

$$u_* = \left(\frac{(C - 2A)(2C - A)(3AC - 2AB - 2BC)}{3(A + C)^2(A - B)(C - B)} \right)^{1/2}$$

Дадим кинематическое истолкование этому решению.

§ 1. Введем безразмерные параметры

$$k = \frac{2B}{A+C}, \quad n = \frac{C-A}{C+A}$$

$$(k > 0, 1 > n > 0)$$

Тогда

$$A = \frac{1-n}{k} B, \quad C = \frac{1+n}{k} B$$

Условие (0.2) дает $1+n > 2(1-n) > 2k$.

Отсюда следует, что

$$1/3 < n < 1, \quad 0 < k < 2/3, \quad n+k < 1$$

Область параметров n, k , удовлетворяющих этим неравенствам, указана на фиг. 1.

В дальнейшем эту область будем сокращенно называть «треугольником».

В обозначениях n, k решение (0.3) примет вид

$$p = \frac{\beta}{B} \frac{k}{1-n} (\cos \mu + \chi \sin \mu \cos \sigma), \quad r = \frac{\beta}{B} \frac{k}{1+n} (\sin \mu - \chi \cos \mu \cos \sigma)$$
(1.1)

$$q = \frac{\beta}{B} k \left(\frac{9n^2 - 1}{3(1-n^2)h} \right)^{1/2} \sin \sigma$$

$$v_1 h = [3 - 3n^2 + k(3n - 1)] \cos \mu + 3(1-n^2) \chi \sin \mu \cos \sigma -$$

$$- 3(1-n)(1+n-k) \cos \mu \cos^2 \sigma$$

$$v_2 h \sqrt{h} = [k \sqrt{3(1-n^2)(9n^2-1)} - 3 \sqrt{(1-n^2)(3-3n^2-4k)(1-2k+k^2-n^2)} \times$$

$$\times \cos \sigma] \sin \sigma$$
(1.2)

$$v_3 h = [3 - 3n^2 - k(3n + 1)] \sin \mu - 3(1-n^2) \chi \cos \mu \cos \sigma - 3(1+n)(1-n-k) \sin \mu \cos^2 \sigma$$

$$\cos \mu = \left(\frac{(1+n)(3n-1)(1-n-k)}{2nh} \right)^{1/2}, \quad \sin \mu = \left(\frac{(1-n)(3n+1)(1+n-k)}{2nh} \right)^{1/2}$$

$$\chi = \left(1 - \frac{4k}{3(1-n^2)} \right)^{1/2}$$
(1.3)

$$\beta^2 = \frac{9\Gamma B (1-n^2)^2 \sqrt{2n}}{k \sqrt{h} [(1-n)(1+n-k)(3n+1)^3 + (1+n)(1-n-k)(3n-1)^3]}$$

$$\tau = \frac{v}{B} \frac{2k}{3-3n^2} \sqrt{3h^{-1}(1-2k+k^2-n^2)} t, \quad h = 3 - 3n^2 - 2k$$

$$u_* = \left(\frac{(9n^2-1)(3-3n^2-4k)}{12(1-2k+k^2-n^2)} \right)^{1/2}$$
(1.4)

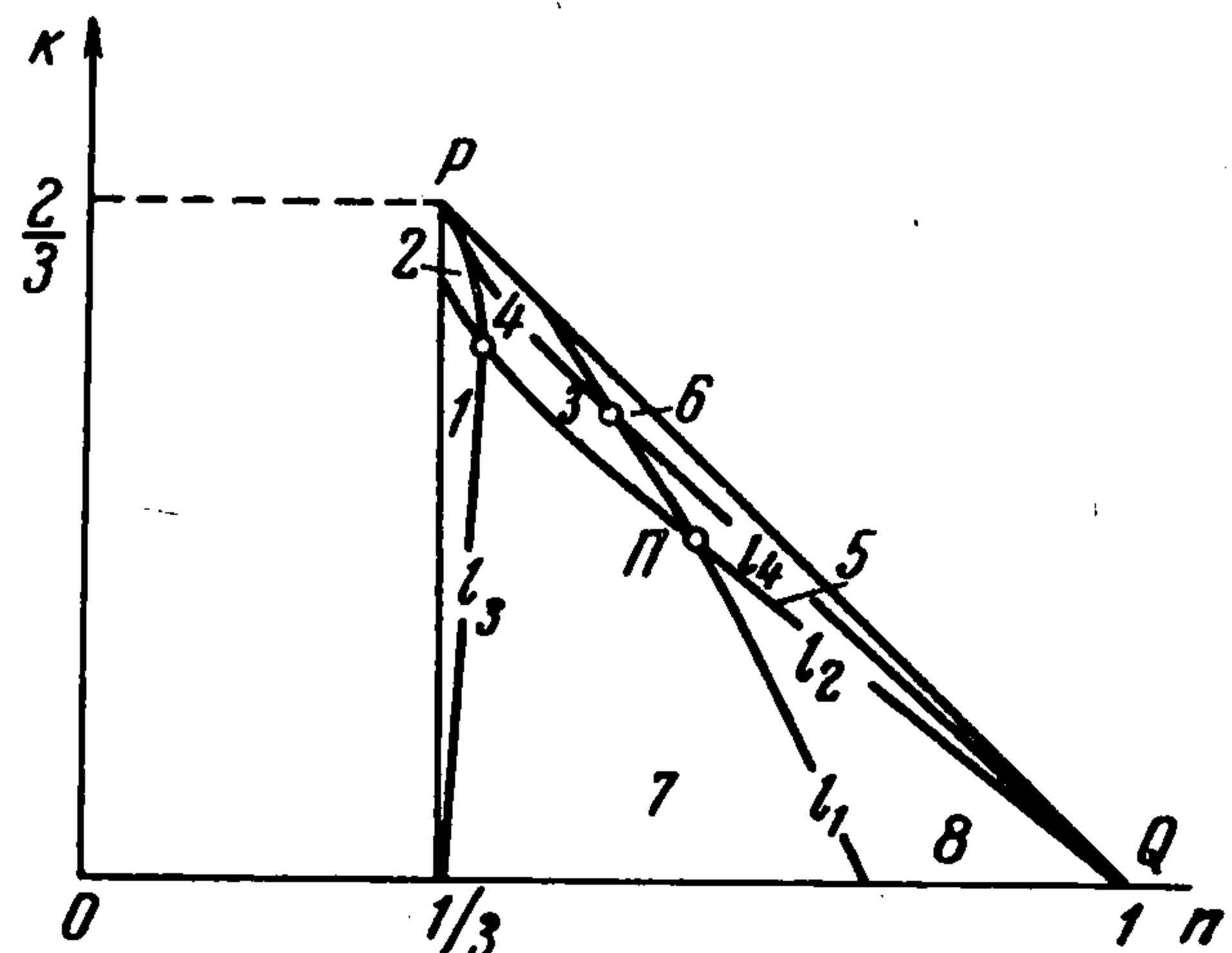
Отметим, что $u_* = 1$ для n, k , лежащих на кривой

$$l_1(n, k) \equiv 9n^2 + 6k - 5 = 0$$

Эта парабола (фиг. 1) касается гипотенузы в точке P и делит треугольник на две области: левее параболы $u_* < 1$, правее — $u_* > 1$.

§ 2. Отнесем p, q, r к величине $2vk / 3B(1-n^2)$, т. е. положим

$$(p, q, r) = \frac{2}{3} \frac{v}{B} \frac{k}{1-n^2} (p', q', r')$$



Фиг. 1

Опуская в дальнейшем штрихи, получим вместо (1.1)

$$p = \frac{3}{2} (1 + n) (\cos \mu + \chi \sin \mu \cos \sigma), \quad r = \frac{3}{2} (1 - n) (\sin \mu - \chi \cos \mu \cos \sigma) \quad (2.1)$$

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{3h^{-1} (9n^2 - 1) (1 - n^2)} \sin \sigma \quad (2.2)$$

Исключим σ из (2.1)

$$\frac{2}{3(1+n)} p \cos \mu + \frac{2}{3(1-n)} r \sin \mu = 1 \quad (2.3)$$

Следствием (2.1) является и такое выражение

$$\frac{2}{3(1+n)} p \sin \mu - \frac{2}{3(1-n)} r \cos \mu = \chi \cos \sigma \quad (2.4)$$

Исключим теперь σ из (2.4) и (2.2)

$$\left(\frac{2 \sin \mu}{3(1+n)\chi} p - \frac{2 \cos \mu}{3(1-n)\chi} r \right)^2 + \frac{4h}{3(9n^2 - 1)(1 - n^2)} q^2 = 1 \quad (2.5)$$

В связанном с телом пространстве переменных p, q, r уравнение (2.3) определяет плоскость, параллельную q , а (2.5) — эллиптический цилиндр. Подвижный годограф — линия пересечения этих поверхностей.

Поворот осей p, q, r вокруг q на угол ε :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1-n}{1+n} \operatorname{tg} \mu$$

приводит к осям s, q, s' , в которых (2.5) принимает вид

$$\frac{s'^2}{l^2 \chi^2} + \frac{q^2}{l_1^2} = 1 \quad (2.6)$$

$$l = \frac{3(1-n^2)}{2\sqrt{(1-n)^2 \sin^2 \mu + (1+n)^2 \cos^2 \mu}}$$

$$l_1 = \frac{1}{2} \sqrt{3h^{-1} (9n^2 - 1) (1 - n^2)}$$

(2.6) — эллиптический цилиндр, осью которого служит s .

На фиг. 2 изображен подвижный аксоид-конус, направляющей которого служит эллипс, получаемый в пересечении цилиндра (2.6) с плоскостью (2.3).

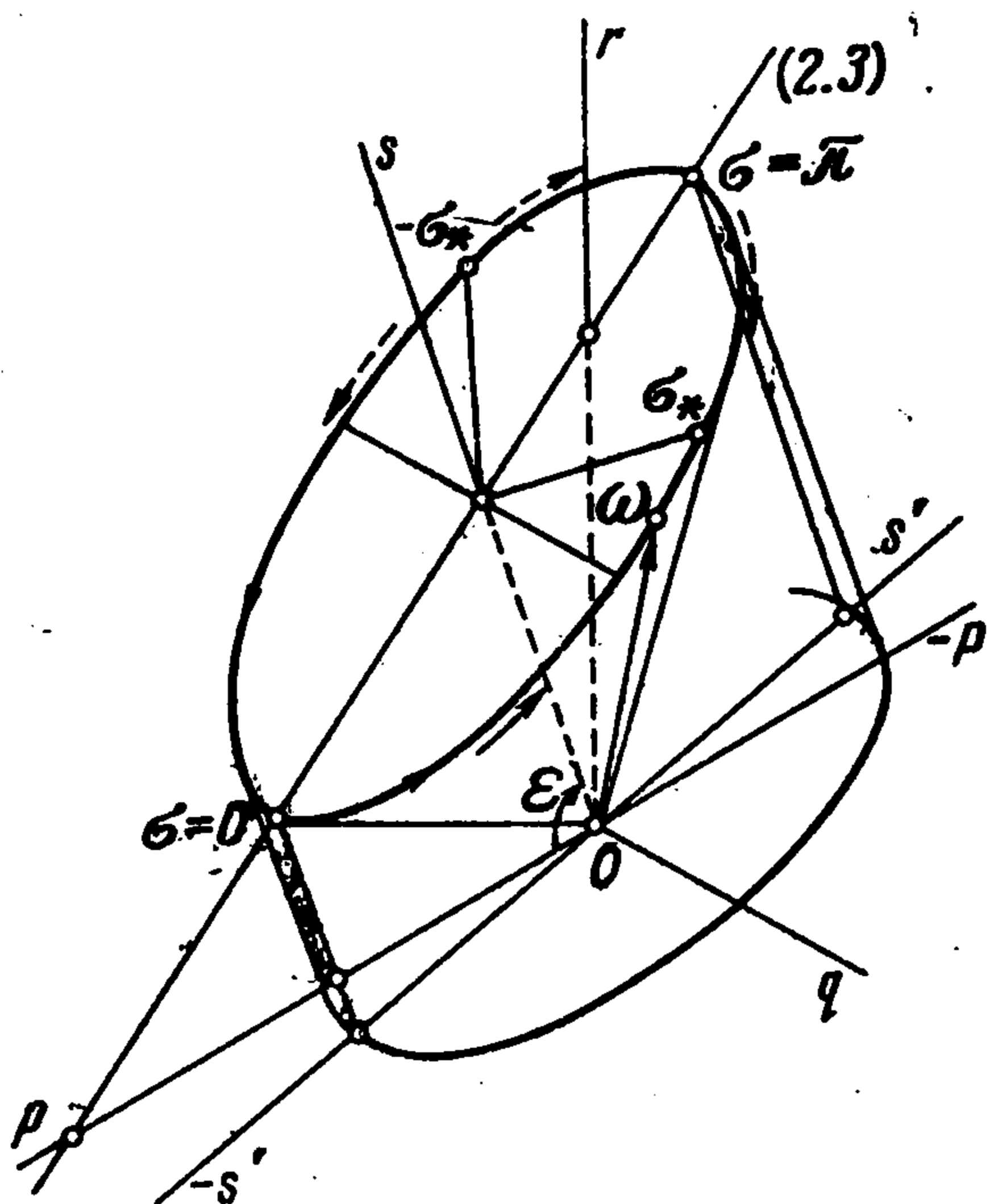
Заметим, что точки годографа, лежащие на прямой (2.3), удовлетворяют условию $q = 0$, что, в соответствии с (2.2), имеет место при $\sigma = 0, \pi$. Из (1.3) находим, что $\sin^2 \mu - \cos^2 \mu > 0$ и $\frac{1}{4}\pi < \mu < \frac{1}{2}\pi$.

Формулы (2.1) дают теперь $p > 0, r > 0$ для $\sigma = 0$ и $p < 0, r > 0$, для $\sigma = \pi$. Эти точки подвижного годографа отмечены на фиг. 2.

Из (0.4) имеем

$$\tau = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{u_* + \cos \sigma}$$

В случае $u_* > 1, d\sigma/d\tau > 0$, σ неограниченно возрастает, годографом служит весь эллипс. Можно считать поэтому, что в начальный момент $\sigma = 0$, затем возрастает, так что q от нулевого значения становится положительным.



Фиг. 2

В случае $u_* = 1$ конец вектора угловой скорости асимптотически приближается к значению $\sigma = \pi$. Из любого начального положения ω будет перемещаться в направлении, указанном на фиг. 2, так как $d\sigma / d\tau > 0$.

В случае $0 < u_* < 1$ в интервалах $(-\pi, -1/2\pi)$ и $(1/2\pi, \pi)$ найдутся значения $\pm\sigma_*$ такие, что $\cos(\pm\sigma_*) = -u_*$. Соответствующие этим значениям точки эллипса — асимптотические для конца ω . Если в начальный момент $u_* + \cos\sigma > 0$, то

$$\cos\sigma > -u_* = \cos\sigma_*, \quad -\sigma_* < \sigma < \sigma_*, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} > 0$$

при $u_* + \cos\sigma < 0$

$$\cos\sigma < -u_* = \cos\sigma_*, \quad -\pi < \sigma < -\sigma_*, \quad \sigma_* < \sigma < \pi, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} < 0$$

Направление движения ω указано на фиг. 2 пунктирными стрелками.

Характер движения, таким образом, зависит от того, где в треугольнике лежит точка (n, k) , соответствующая заданным A, B, C .

§ 3. В работе [2] показано, что для построения неподвижного годографа нужно знать $\omega_\zeta(\sigma) = \omega(\sigma) \nu(\sigma)$, $\omega_\rho^2(\sigma) = \omega^2(\sigma) - \omega_\zeta^2(\sigma)$ — осевую и радиальную составляющие угловой скорости и третью цилиндрическую координату α , определяемую уравнением

$$\omega_\rho^2 \frac{d\alpha}{d\sigma} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ p & q & r \\ dp/d\sigma & dq/d\sigma & dr/d\sigma \end{vmatrix}$$

Обозначив в дальнейшем

$$\cos\sigma = u \tag{3.1}$$

найдем, учитывая (1.1) — (1.3), необходимые величины

$$\omega^2 = \frac{12}{h} (1 - n^2 + k^2 - 2k) \left[u^2 + \frac{3}{2} u_* u + \frac{(1 - n^2)(1 + 9n^2) - 12kn^2}{8(1 - n^2 + k^2 - 2k)} \right] \tag{3.2}$$

$$\omega_\zeta = \frac{3}{h^2} (1 - n^2 + k^2 - 2k) \left[3(1 - n^2)u^2 + (h + 4k)u_* u + \frac{3(1 - n^2)^2(2 - 3k) + 4(1 - 3n^2)k^2}{2(1 - n^2 + k^2 - 2k)} \right] \tag{3.3}$$

$$\omega_\rho^2 = \omega^2 - \omega_\zeta^2 = N(u + u_*)^2(u + u_1)(u_2 - u) \tag{3.4}$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = L \frac{(u + u_3)(u_4 - u)}{(u + u_*)(u + u_1)(u_2 - u)} \tag{3.5}$$

Здесь

$$u_{1,2} = \frac{2}{3} \frac{u_*}{1 - n^2} \left[\frac{2h}{\sqrt{2(9n^2 - 1)}} \pm k \right], \quad u_{3,4} = \frac{u_*}{4} \left\{ \left(1 + 16 \frac{4 - 3k}{9n^2 - 1} \right)^{1/2} \pm 1 \right\} > 0 \tag{3.6}$$

$$N = \frac{81}{h^4} (1 - n^2)^2 (1 - n^2 + k^2 - 2k)^2, \quad L = \frac{h^{3/2}}{2\sqrt{3(1 - n^2 + k^2 - 2k)}}$$

Величина u_* определена (1.4); величины $u_{1,2}$ положительны в треугольнике.

Исключим u из (3.2), (3.3), записав предварительно левую часть соотношения (3.2) как $\omega_\rho^2 + \omega_\zeta^2$:

$$\begin{aligned} & [\omega_\rho^2 + (\omega_\zeta - c_1)^2 - c_2]^2 - c_3 (\omega_\zeta + c_4) = 0 \\ c_1 &= \frac{2}{3} \frac{h}{1-n^2}, \quad c_2 = \frac{(1+3n^2)(h-2k)^2}{12(1-n^2)^2} \\ c_3 &= \frac{(9n^2-1)(h-2k)^3}{27(1-n^2)^3} \\ c_4 &= \frac{3(5+3n^2)(h-2k) - 32h}{48(1-n^2)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Эта кривая в плоскости $\omega_\rho \omega_\zeta$ — меридиан поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф. Построим его. При $\omega_\rho = 0$ (3.7) дает многочлен

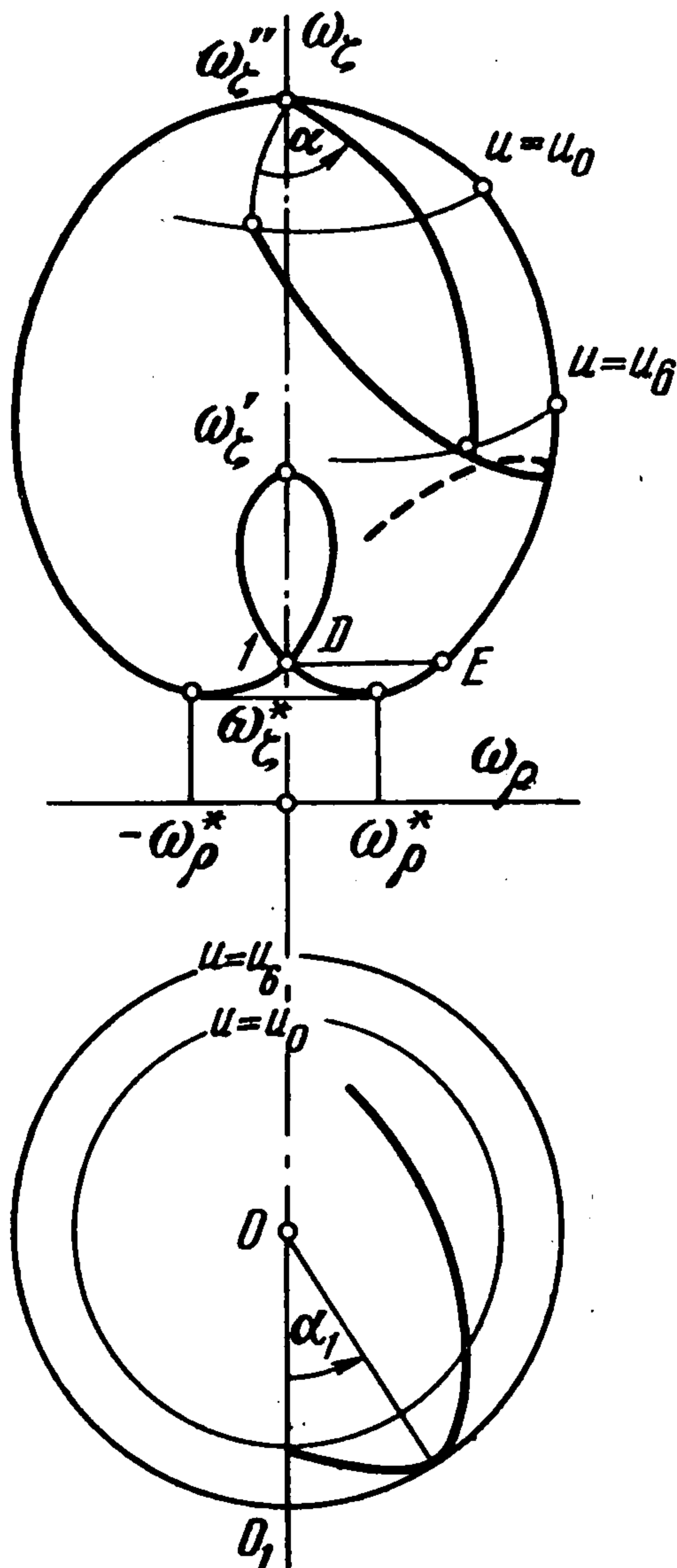
$$f(\omega_\zeta) \equiv (\omega_\zeta - 1)^2 (\omega_\zeta - \omega_\zeta') (\omega_\zeta - \omega_\zeta'')$$

Здесь (3.8)

$$\omega_\zeta', \omega_\zeta'' = \frac{3h-2k}{3(1-n^2)} \mp \frac{h-2k}{3(1-n^2)} \sqrt{\frac{9n^2-1}{2}} > 1$$

Производная $d\omega_\zeta / d\omega_\rho$, найденная из (3.7), обращается в нуль при $\omega_\rho = 0$ и $\omega_\rho = \pm \omega_\rho^*$, причем

$$\omega_\rho^* = \frac{h-2k}{16(1-n^2)} \sqrt{-9n^2 + 34n^2 - 11/3} \quad (3.9)$$



Фиг. 3

Исследования, проведенные при помощи второй производной, показывают, что в точках $(0, \omega_\zeta')$, $(0, \omega_\zeta'')$ — максимум, в точках $(\pm \omega_\rho^*, \omega_\zeta^*)$ — минимум. Значение ω_ζ^* находим из (3.7) при $\omega_\rho = \omega_\rho^*$:

$$\omega_\zeta^* = (1-n^2)^{-1} [2/3 h - 1/16 (5+3n^2)(h-2k)] < 1 \quad (3.10)$$

Кривая (3.7) изображена на фиг. 3. Пройдет ли годограф через точку D (фиг. 3)? Подставив $\omega_\zeta = 1$ в (3.3), получим два значения

$$u_{(1)} = -\frac{2k}{3(1-n^2)} u_*, \quad u_{(2)} = -u_*$$

Из (3.4) следует, что $\omega_\rho(u_{(1)}) \neq 0$, $\omega_\rho(u_{(2)}) = 0$, следовательно, найденные значения соответствуют точкам E и D . Неподвижный годограф пройдет через точку D , если $|u_{(2)}| = |u_*| < 1$, а это выполнено для n, k , лежащих левее кривой l_1 (фиг. 1). Рассуждения § 2 показывают, что точка D достигается асимптотически при $t \rightarrow \infty$.

Запишем еще такие выражения:

$$d\omega_\rho^2 / du = -4N (u + u_*) (u + u_5) (u - u_6) \quad (3.11)$$

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\omega_\rho d\alpha}{d\omega_\rho} = L \frac{(u + u_3)(u_4 - u)}{2(u + u_5)(u - u_6) \sqrt{1-u^2}} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

$$u_{5,6} = u_* \left[\left(\frac{(1-n^2+2k)^2}{16(1-n^2)^2} + \frac{2k^2 - k(3n^2+5) + 4(1-n)}{(1-n^2)(9n^2-1)} \right)^{1/2} \pm \frac{1-n^2+2k}{4(1-n^2)} \right] > 0$$

§ 4. Характер движения, естественно, зависит от того, каковы u_1, \dots, u_6 записанные формулами (3.6), (3.13).

Исследования показывают, что u_1, u_3 в треугольнике больше единицы; u_2 и u_4 обращаются в единицу на гиперболе

$$l_2(n, k) \equiv 9n^2 - 18(k - 2/3)^2 - 1 = 0$$

которая касается катета в точке P и подходит к Q с угловым коэффициентом $-3/4$ (l_2 и последующие кривые показаны на фиг. 1). За исключением точек кривой l_2 , $u_2 > 1$ в треугольнике; $u_4 > 1$ выше гиперболы, $u_4 < 1$ ниже ее.

На кривых $l_3(n, k) \equiv u_5(n, k) - 1 = 0$, $l_4(n, k) \equiv u_6(n, k) - 1 = 0$ обращаются в единицу u_5 и u_6 . Кривая l_4 касается гипотенузы в точке Q , а в точку P входит, образуя с вертикальным катетом угол, тангенс которого равен $2/3$. Кривая l_3 входит в P под тем же углом, но расположена вблизи вертикального катета и касается его при подходе к оси абсцисс; $u_6 > 1$ выше l_4 , $u_6 < 1$ — ниже, $u_5 > 1$ правее l_3 , $u_5 < 1$ — левее.

Указанные кривые разделили треугольник на восемь областей. Подвижный и неподвижный годографы, а следовательно и вся картина движения тела зависит от того, в какой области лежат n, k , известные для каждой конкретной задачи.

§ 5. Истолкование движения можно теперь проводить в таком порядке. По формулам § 2 строим подвижный годограф. Выражения (2.1), (2.2) дают возможность установить соответствие между σ и точками подвижного годографа. Если точка u_* лежит внутри интервала $(-1, 1)$, находим на годографе точку, соответствующую значению $\sigma_* = \arccos(-u_*)$: к этой точке будет асимптотически приближаться ω .

При помощи значений (3.8) — (3.10) можно построить для заданных n, k поверхность (3.7).

Зададим начальное значение u_0 ; $\omega_\zeta(u_0)$ найдем из (3.3). Этим устанавливается положение подвижного аксоида на неподвижном в начальный момент (начальная параллель на поверхности вращения показана на фигуре [3 а]; на фиг. 3 б — проекция поверхности на плоскость $\zeta = 0$. Производная (3.11) и вторая производная от ω_ρ^2 показывает, что ω_ρ^2 максимально при $u = u_6$: наружная окружность на фиг. 3 б соответствует параллели $u = u_6$. Изображена и параллель, соответствующая $u = u_0$.

Угол α будем отсчитывать от радиуса OO_1 (фиг. 3 б).

Имеющиеся формулы позволяют сделать некоторые выводы о характере кривой — неподвижного годографа.

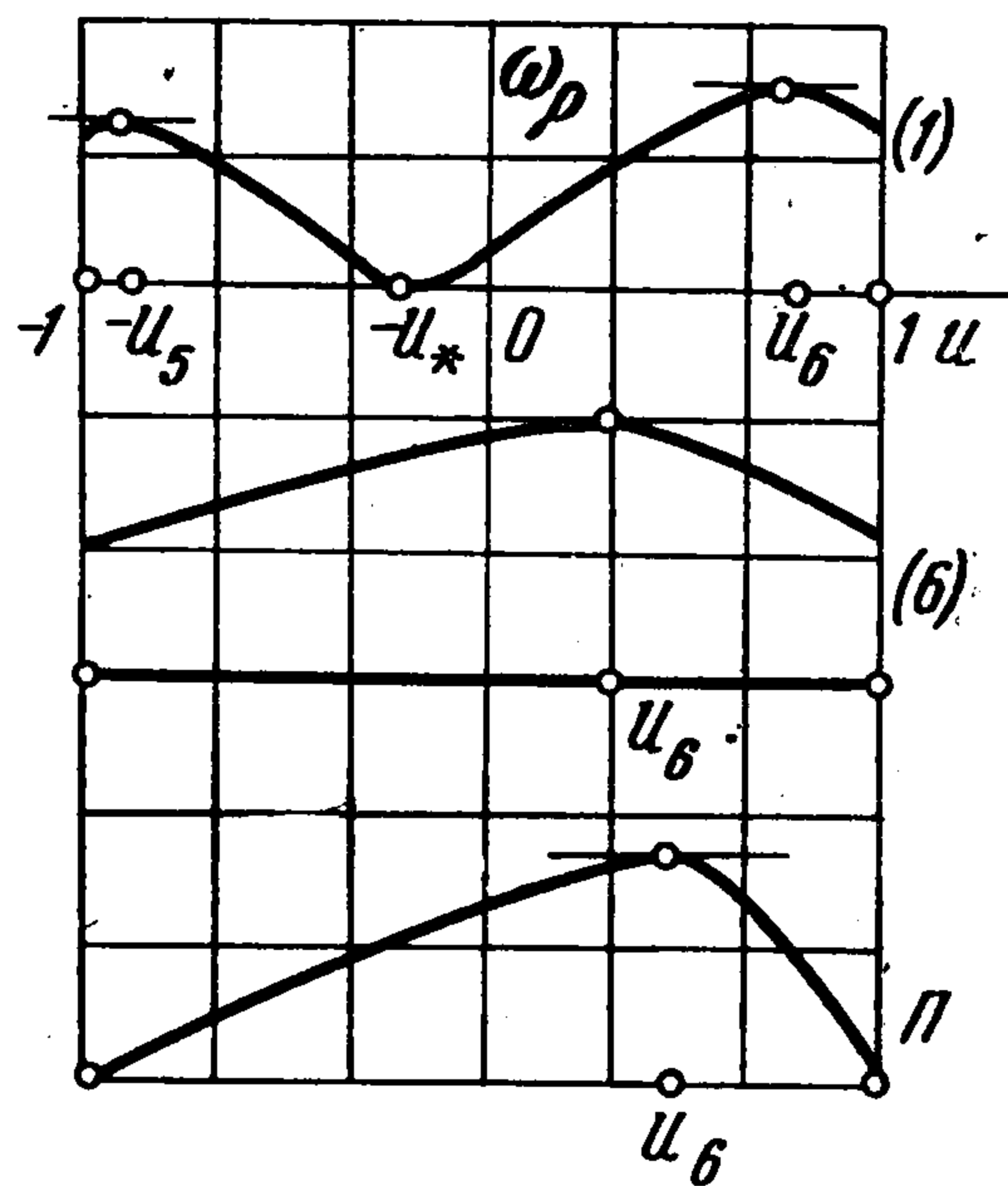
Из (3.12) следует, что $\operatorname{tg} \kappa$ обращается в бесконечность при $u = u_6$, $u = \pm 1$ — исследуемая кривая подходит к этим параллелям, касаясь их. При $u = u_4$ $\kappa = 0$ — кривая касается радиуса на этой параллели. (Речь идет об общем случае; случай, когда, например, $u = u_4 = u_6$ надо исследовать особо.)

Кривая пойдет от вертикального радиуса вправо или влево в зависимости от знака производной $d\alpha/d\sigma|_{u=u_0}$; который установим из (3.5).

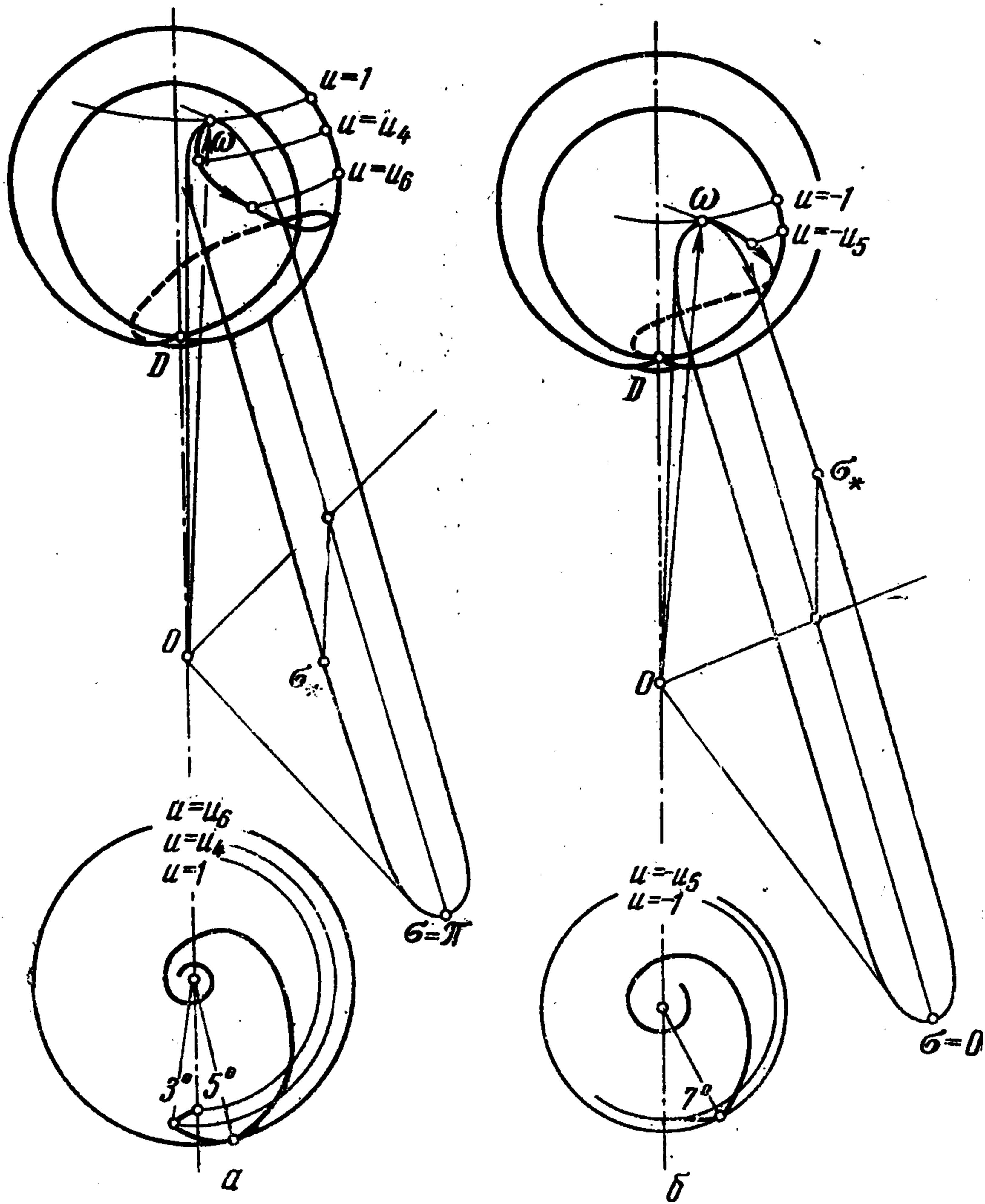
На фиг. 3 изображена часть кривой, соответствующей случаю, когда $d\alpha/d\sigma|_0 > 0$ и $\operatorname{tg} \kappa|_0$ отличен от нуля и бесконечности угол α_1 можно найти так (учтем (3.1)):

$$\alpha_1 = L \int_{\arccos u_0}^{\arccos u_*} \frac{(\cos \sigma + u_3)(u_4 - \cos \sigma) d\sigma}{(\cos \sigma + u_*)(\cos \sigma + u_1)(u_2 - \cos \sigma)}$$

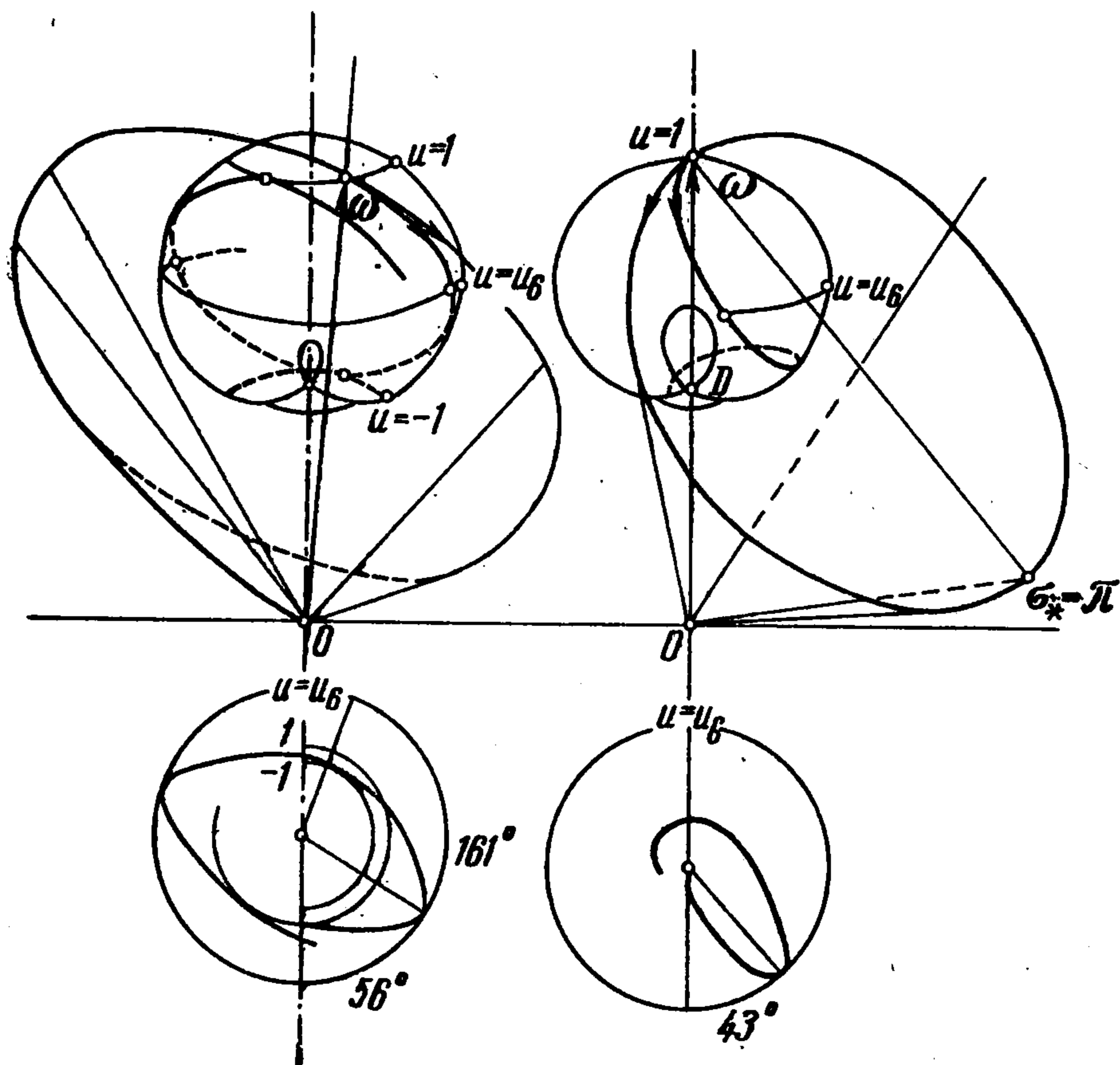
В зависимости от величины u_* кривая в дальнейшем либо будет навиваться на центр окружности на фиг. 3 б и приближаться к точке D на фиг. 3 а ($u_* < 1$), либо останется в кольце между параллелями $u = \pm 1$ ($u_* > 1$).



Фиг. 4



Фиг. 5а, б



Фиг. 6

Фиг. 7

Проследим за движением подвижного аксоида по неподвижному в трех конкретных наиболее характерных случаях. Возьмем точки 1 (0.34, 0.37), 4 (0.74, 0.23): номер точки указывает, в какой области треугольника она лежит, в скобках координаты n, k ; 2 (0.57, 0.33) — точка пересечения кривых l_1 и l_2 . Приводим значения величин, необходимых для построения.

	пл. (2.3)	$l\chi$	l_1	ε	ω_ζ'	ω_ζ''	ω_ζ^*	ω_ρ^*
1	$0.05p + 1.01r = 1$	1.32	0.16	78°	1.79	1.96	0.99	0.04
6	$0.08p + 2.52r = 1$	0.87	1.23	36°	1.18	2.04	0.92	0.20
II	$0.11p + 1.52r = 1$	1.00	0.86	45°	1.33	2.00	0.96	0.16

	c_1	c_2	c_3	c_4	u_*	u_1	u_2	u_3	u_4
1	1.44	0.19	0.01	0.99	0.16	1.25	1.16	1.05	0.96
6	1.31	0.19	0.11	0.92	1.92	2.44	1.12	2.29	1.34
II	1.33	0.16	0.07	0.96	1.00	1.66	1.00	1.49	1.00

	u_3	u_6	N	L	χ	$\omega_\rho(-1)$	$\omega_\rho(1)$	$\omega_\rho(u_6)$
1	0.93	0.77	0.37	1.44	0.66	0.37	0.42	0.50
6	2.27	0.32	0.03	1.24	0.56	0.31	0.36	0.64
II	1.45	0.45	0.14	1.33	0.58	0.00	0.00	0.59

На фиг. 4 показаны графики $\omega_\rho(u)$ в этих случаях.

Точка 1. Величина $u_* < 1$. Возьмем в качестве начального значения $u_0 = 1$ ($\sigma_0 = 0$); производная $d\alpha/d\sigma|_{u=1} < 0$ и продолжает оставаться отрицательным, пока u , убывая от единицы, не станет равным u_4 , $d\alpha/d\sigma|_{u=u_4} > 0$. Кривая (фиг. 5, а) пересекает параллель $u = u_4$ под прямым углом ($\text{tg } \kappa|_{u=u_4} = 0$) при $\alpha \approx -3^\circ$ и поворачивает вправо. Максимального значения ω_ρ достигает при $\alpha \approx 5^\circ$ (касание с параллелью $u = u_6$). При приближении u к $-u_*$ кривая начнет навиваться на центр окружности. На этой же фигуре показаны подвижный и неподвижный годографы. Точка подвижного годографа, соответствующая значению $\sigma_* = 100^\circ$ асимптотически приближается при качении подвижного аксоида по поверхности вращения к точке D .

На фиг. 5б показано то же для случая $u_0 = -1$. Подвижный аксоид обкатывается в этом случае по внутренней части поверхности вращения.

В точке 6 величина $u_* > 1$, следовательно, вектор угловой скорости обегает весь подвижный годограф. На фиг. 6 в качестве начального значения принято $u_0 = 1$. Неподвижный годограф лежит в поясе между параллелями $u = \pm 1$.

В точке 2 имеем $u_* = 1, u_2 = 1, u_4 = 1$, поэтому $\omega_\rho \pm(1) = 0$. При $u_0 = 1$ неподвижный годограф выходит из вершины поверхности (фиг. 7), пересекает параллель $u = u_6$ при $\alpha \approx 43^\circ$ и при $u \rightarrow -1$ асимптотически приближается к точке D . Конец вектора ω на подвижном годографе подходит при этом к точке $\sigma_* = \pi$.

Поступила 29 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламова Е. И. Один частный случай интегрируемости уравнений Эйлера Пуассона. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 5.
2. Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1964, т. 28, в. 3.