ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, В СИЛОВОМ ПОЛЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ПРИТЯГИВАЮЩИХ ЦЕНТРОВ

В. Н. Рубановский (Москва)

Получены достаточные условия устойчивости кругового движения центра масс системы, состоящей из твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, а также ее относительного равновесия по отношению к некоторым известным параметрам. При исследовании используются предложенные В. В. Румянцевым постановка и метод решения задач об устойчивости движения твердых тел с жидким наполнением [1].

Для случая лишь одного притягивающего центра достаточные условия устойчивости твердого тела с жидким наполнением были найдены П. Н. Колесниковым [2], а для одного твердого тела — В. В. Белецким [3].

1. Исследуем задачу о движении свободной механической системы, представляющей собой твердое тело, имеющее полость произвольной формы, полностью заполненную однородной несжимаемой вязкой жидкостью, в силовом поле двух неподвижных притягивающих центров, закон притяжения которых обратно пропорционален квадрату расстояния до притягиваемой точки.

Пусть $O\xi_1\xi_2\xi_3$ — неподвижная прямоугольная система осей координат. Неподвижные притягивающие центры N_1 и N_2 с массами m_1 и m_2 (одна из этих масс может быть отрицательной, соответствующий центр будет тогда отталкивающим) и постоянными тяготения f_1 и f_2 будем считать расположенными на оси $O\xi_3$ в точках с координатами $\xi_3 = \xi_3^{(1)}$ и $\xi_3 = \xi_3^{(2)}$.

Введем в рассмотрение еще две подвижные прямоугольные системы осей координат, имеющие начала в центре масс G системы: первую — $G\,x_1\,x_2\,x_3$, ось Gx_3 которой имеет одинаковое направление с осью $O\xi_3$, ось Gx_2 перпендикулярна оси $O\xi_3$ и направлена от точки G к оси $O\xi_3$, а ось Gx_1 перпендикулярна осям Gx_2 и Gx_3 и направлена так, что системы осей $O\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ и $Gx_1\,x_2\,x_3$ имеют одинаковую ориентацию, и вторую — $Gy_1y_2y_3$, оси которой направим по главным осям центрального эллипсоида инерции рассматриваемой системы для точки G, причем оси последнего пусть будут также главными осями инерции как для тела, так и для жидкости.

Итак, если A_1, A_2, A_3, I_1, I_2, I_3 и J_1, J_2, J_3 суть главные моменты инерции относительно осей y_1, y_2, y_3, соответственно, всей системы, твердого тела и жидкости, то

$$A_1 = I_1 + J_1 \qquad (123)$$

Направление осей x_i ($i = 1,\ 2,\ 3$) и радиусов-векторов R_1 и R_2, проведенных из точки G, соответственно, в притягивающие центры N_1 и N_2, относительно системы осей координат $Gy_1\,y_2\,y_3$ будем определять направляющими косинусами α_{i1}, α_{i2}, α_{i3}, β_1, β_2, β_3 и γ_1, γ_2, γ_3, соответственно.

Пусть r, φ, ξ_3 — цилиндрические координаты центра масс G системы, M_1 и M_2, соответственно, массы твердого тела и жидкости, $M = M_1 + M_2$ — масса всей системы.

Функция сил, действующих на систему, определяется интегралом

$$U = \int\limits_M \left(\frac{f_1 m_1}{\rho_{1m}} + \frac{f_2 m_2}{\rho_{2m}}\right) dm$$

Здесь

$$\rho_{1m}^2 = R_1^2 - 2R_1(y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + y_3\beta_3) + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \qquad R_1^2 = r^2 + (\xi_3^{(1)} - \xi_3)^2$$

$$\rho_{2m}^2 = R_2^2 - 2R_2(y_1\gamma_1 + y_2\gamma_2 + y_3\gamma_3) + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \qquad R_2^2 = r^2 + (\xi_3^{(2)} - \xi_3)^2$$

Будем рассматривать задачу в ограниченной постановке в том смысле, что примем вместо указанной силовой функции U ее приближенное значение, получающееся разложением подынтегрального выражения в ряд по степеням y_1 / R_i, y_2 / R_i, y_3 / R_i

($i = 1,\ 2$) и пренебрежением членами выше второго порядка малости. Тогда получим

$$U = \sum_{i=1}^{2} \sigma_i \left[\frac{M}{R_i} - \frac{3}{2R_i^5} \left(A_1 y_1^{(i)2} + A_2 y_2^{(i)2} + A_3 y_3^{(i)2}\right) + \frac{A_1 + A_2 + A_3}{2R_i^3} \right]$$

$$(\sigma_i = f_i m_i,\ i = 1, 2)$$

Здесь $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$, $y_3^{(1)}$ и $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$, $y_3^{(2)}$ — координаты притягивающих центров N_1 и N_2 в системе осей $Gy_1\, y_2\, y_3$:

$$y_1^{(i)} = r\alpha_{21} + (\xi_3^{(i)} - \xi_3)\,\alpha_{31}, \qquad y_2^{(i)} = r\alpha_{22} + (\xi_3^{(i)} - \xi_3)\,\alpha_{32}$$

$$y_3^{(i)} = r\alpha_{23} + (\xi_3^{(i)} - \xi_3)\,\alpha_{33} \qquad (i = 1,\ 2)$$

Обозначим через Ω_1, Ω_2, Ω_3 и ω_1, ω_2, ω_3 проекции на оси y_1, y_2, y_3, соответственно, векторов абсолютной и относительной (относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$) мгновенной угловой скорости твердого тела; при этом, очевидно,

$$\Omega_1 = \varphi^{\cdot}\alpha_{31} + \omega_1, \qquad \Omega_2 = \varphi^{\cdot}\alpha_{32} + \omega_2, \qquad \Omega_3 = \varphi^{\cdot}\alpha_{33} + \omega_3 \qquad (\varphi^{\cdot} = d\varphi/dt)$$

Тогда для кинетической энергии всей системы T, твердого тела T_1 и жидкости T_2 будем иметь выражения

$$T = T_1 + T_2, \qquad 2T_1 = M_1 (r^{\cdot 2} + r^2\varphi^{\cdot 2} + \xi_3^{\cdot 2}) + I_1\Omega_3^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2$$

$$2T_2 = M_2 (r^{\cdot 2} + r^2\varphi^{\cdot 2} + \xi_3^{\cdot 2}) + J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 + 2\,(g_1\Omega_1 + g_2\Omega_2 + g_3\Omega_3) +$$

$$+ \rho \int_\tau (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\, d\tau$$

Здесь

$$g_1 = \rho \int_\tau (y_2 u_3 - y_3 u_2)\, d\tau \qquad (123)$$

обозначают проекции на оси y_1, y_2, y_3 вектора момента относительно центра масс G системы количеств движения частиц жидкости в их движении относительно системы осей координат $Gy_1\, y_2\, y_3$, u_1, u_2, u_3 — проекции на те же оси вектора скорости частиц жидкости относительно системы осей координат $Gy_1\, y_2\, y_3$, ρ — плотность жидкости; τ — объем полости.

Теперь можно записать уравнения движения рассматриваемой механической системы

$$M (r^{\cdot\cdot} - r\varphi^{\cdot 2}) = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad M\xi_3^{\cdot\cdot} = \frac{\partial U}{\partial \xi_3}$$

$$\frac{d}{dt}\, [Mr^2\varphi^{\cdot} + (A_1\Omega_1 + g_1)\,\alpha_{31} + (A_2\Omega_2 + g_2)\,\alpha_{32} + (A_3\Omega_3 + g_3)\,\alpha_{33}] = 0 \qquad (1.1)$$

$$A_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (A_3 - A_2)\,\Omega_2\Omega_3 + \frac{dg_1}{dt} + \Omega_2 g_3 - \Omega_3 g_2 = L_1 \qquad (123) \qquad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt}\,(V_1 + \Omega_2 y_3 - \Omega_3 y_2 + u_1) + \Omega_2\,(V_3 + \Omega_1 y_2 - \Omega_2 y_1 + u_3) - \Omega_3\,(V_2 + \Omega_3 y_1 - \Omega_1 y_3 + u_2) =$$

$$= F_1^{(1)} + F_1^{(2)} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_1} + \nu\Delta u_1 \qquad (123) \qquad (1.3)$$

$$\frac{d\alpha_{21}}{dt} = \Omega_3\alpha_{22} - \Omega_2\alpha_{23} + \varphi^{\cdot}\,(\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{33}\alpha_{22}) \quad (123), \qquad \frac{d\alpha_{31}}{dt} = \Omega_3\alpha_{32} - \Omega_2\alpha_{33} \quad (123)(1.4)$$

Здесь L_1, L_2, L_3 — проекции на оси y_1, y_2, y_3 моментов внешних сил, которые для выбранного приближения имеют вид

$$L_1 = \frac{3\sigma_1}{R_1^3}\,(A_3 - A_2)\,\beta_2\beta_3 + \frac{3\sigma_2}{R_2^3}\,(A_3 - A_2)\,\gamma_2\gamma_3 \qquad (123)$$

V_1, V_2, V_3 — проекции на оси y_1, y_2, y_3 вектора скорости центра масс G системы; $F_1^{(1)}$, $F_2^{(1)}$, $F_3^{(1)}$ и $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$, $F_3^{(2)}$ — проекции на те же оси сил притяжения, действующих на частицу жидкости со стороны притягивающих центров N_1 и N_2, соответственно; p — гидродинамическое давление; $\nu = \mu\ /\ \rho$ — кинематический коэффициент вязкости; μ — коэффициент вязкости; Δ — оператор Лапласа.

К уравнениям (1.1) — (1.4) следует добавить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+\frac{\partial u_2}{\partial y_2}+\frac{\partial u_3}{\partial y_3}=0 \tag{1.5}$$

граничные условия на стенках S полости $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, а также соотношения:

$$\beta_1=\frac{r}{R_1}\alpha_{21}+\frac{\xi_3^{(1)}-\xi_3}{R_1}\alpha_{31},\quad \beta_2=\frac{r}{R_1}\alpha_{22}+\frac{\xi_3^{(1)}-\xi_3}{R_1}\alpha_{32},\quad \beta_3=\frac{r}{R_1}\alpha_{23}+\frac{\xi_3^{(1)}-\xi_3}{R_1}\alpha_{33}$$

$$\gamma_1=\frac{r}{R_2}\alpha_{21}+\frac{\xi_3^{(2)}-\xi_3}{R_2}\alpha_{31},\quad \gamma_2=\frac{r}{R_2}\alpha_{22}+\frac{\xi_3^{(2)}-\xi_3}{R_2}\alpha_{32},\quad \gamma_3=\frac{r}{R_2}\alpha_{23}+\frac{\xi_3^{(2)}-\xi_3}{R_2}\alpha_{33}$$

Уравнения движения рассматриваемой механической системы (1.1) — (1.5) допускают энергетическое соотношение (1.6)

$$\frac{d}{dt}(T-U)=-\mu\int_\tau\left[2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y_3}+\frac{\partial u_3}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial y_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_2}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\right)^2\right]d\tau$$

и следующие первые интегралы:

$$Mr^2\varphi^{\cdot}+(A_1\Omega_1+g_1)\alpha_{31}+(A_2\Omega_2+g_2)\alpha_{32}+(A_3\Omega_3+g_3)\alpha_{33}=\mathrm{const} \tag{1.7}$$

$$\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2=1,\qquad \alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2=1 \tag{1.8}$$

2. Установим некоторые соотношения. Обозначим через G_1, G_2, G_3 проекции на оси y_1, y_2, y_3 вектора кинетического момента относительно начала G системы координат $Gy_1y_2y_3$ частиц жидкости в их движении вокруг центра масс G системы; тогда,

$$G_1=J_1\Omega_1+g_1 \quad (123)$$

Используем преобразования [1]

$$\omega_1^*=G_1/J_1\ (123),\qquad v_1=u_1+\Omega_2y_3-\Omega_3y_2+\omega_3^*y_2-\omega_2^*y_3 \quad (123)$$

Выражение кинетической энергии T_2 жидкости приведем к виду

$$2T_2=M_2(r^{\cdot 2}+r^2\varphi^{\cdot 2}+\xi_3^{\cdot 2})+\frac{G_1^2}{J_1}+\frac{G_2^2}{J_2}+\frac{G_3^2}{J_3}+\rho\int_\tau(v_1^2+v_2^2+v_3^2)\,d\tau$$

Далее, из (1.6) следует, что

$$T-U\leqslant T_0-U_0\qquad (T_0=T|_{t=0},\ U_0=U|_{t=0}) \tag{2.1}$$

Окончательно соотношение (2.1) и интеграл площадей (1.7) можно представить, соответственно, в виде

$$M(r^{\cdot 2}+r^2\varphi^{\cdot 2}+\xi_3^{\cdot 2})+I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2+\frac{G_1^2}{J_1}+\frac{G_2^2}{J_2}+\frac{G_3^2}{J_3}+$$
$$+\rho\int_\tau(v_1^2+v_2^2+v_3^2)\,d\tau\leqslant\mathrm{const}$$

$$Mr^2\varphi^{\cdot}+(I_1\Omega_1+G_1)\alpha_{31}+(I_2\Omega_2+G_2)\alpha_{32}+(I_3\Omega_3+G_3)\alpha_{33}=\mathrm{const}$$

3. Уравнения (1.1) — (1.5) допускают частное решение

$$\Omega_1=\Omega_2=0,\quad \Omega_3=\omega=\mathrm{const},\quad \alpha_{21}=\alpha_{23}=\alpha_{31}=\alpha_{32}=0,\quad \alpha_{22}=\alpha_{33}=1$$
$$g_1=g_2=g_3=0,\quad u_1=u_2=u_3=0,\quad r=r_0,\quad r^{\cdot}=0,\quad \xi_3=\xi_{30}$$
$$\xi_3^{\cdot}=0,\quad \varphi^{\cdot}=\omega \tag{3.1}$$

в котором величины r_0 и ξ_{30} определяются из уравнений

$$\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\left\{\frac{M}{R_{i0}^3}-\frac{15}{2R_{i0}^5}\left[\frac{A_2r_0^2}{R_{i0}^2}+\frac{A_3(\xi_3^{(i)}-\xi_{30})^2}{R_{i0}^2}\right]+\frac{3(A_1+A_2+A_3)}{2R_{i0}^5}-\frac{3A_3}{R_{i0}^5}\right\}(\xi^{(i)}-\xi_{30})=0$$

$$\left[\frac{\sigma_1(\xi_3^{(1)}-\xi_{30})}{R_{10}^5}+\frac{\sigma_2(\xi_3^{(2)}-\xi_{30})}{R_{20}^5}\right](A_3-A_2)=0 \tag{3.2}$$

$$R_{10}^2=r_0^2+(\xi_3^{(1)}-\xi_{30})^2,\qquad R_{20}^2=r_0^2+(\xi_3^{(2)}-\xi_{30})^2$$

а угловая скорость ω движения центра масс системы определяется соотношением

$$\omega^2 = -\frac{1}{Mr_0}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\sigma_i}{MR_{i0}^3}\left\{M - \frac{15}{2R_{i0}^4}\left[A_2 r_0^2 + A_3(\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{3(A_1 + A_2 + A_3)}{2R_{i0}^2} + \frac{3A_2}{2R_{i0}^2}\right\} \qquad (3.3)$$

Это частное решение соответствует движению системы по круговой орбите $r = r_0$, $\xi_3 = \xi_{30}$ с постоянной угловой скоростью ω так, что главные центральные оси y_1, y_2, y_3 эллипсоида инерции системы направлены, соответственно, по касательной, главной нормали и бинормали невозмущенной орбиты; при этом жидкость покоится относительно тела, т. е. система движется как одно твердое тело.

Исследуем устойчивость невозмущенного движения (3.1) системы по отношению к переменным

$$\Omega_i, \quad G_i, \quad \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, r, r^\cdot, \xi_3, \xi_3^\cdot, \varphi^\cdot, \rho\int_\tau v_i^2 d\tau \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (3.4)$$

В возмущенном движении положим

$$\Omega_3 = \omega + \Omega_3^*, \qquad G_3 = J_3\omega + G_3^*, \qquad \alpha_{22} = 1 + \alpha_{22}^*, \qquad \alpha_{33} = 1 + \alpha_{33}^*$$
$$r = r_0 + r^*, \qquad \xi_3 = \xi_{30} + \xi_3^*, \quad \varphi^\cdot = \omega + \omega^*$$

а для остальных переменных сохраним прежние обозначения.

Уравнения возмущенного движения рассматриваемой задачи допускают первые интегралы

$$W_1 = 4Mr_0\omega^2 r^* + 2I_3\omega\Omega_3^* + 2\omega G_3^* + 2Mr_0^2\omega\omega^* + 6A_2P\alpha_{22}^* + 6A_3Q\alpha_{33}^* +$$
$$+ M(4r_0\omega r^*\omega^* + r_0^2\omega^{*2} + r^{\cdot 2} + \xi_3^{\cdot 2}) + 3P(A_1\alpha_{21}^2 + A_2\alpha_{22}^{*2} + A_3\alpha_{23}^2) +$$
$$+ 3Q(A_1\alpha_{31}^2 + A_2\alpha_{32}^2 + A_3\alpha_{33}^{*2}) + I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^{*2} +$$
$$+ \frac{G_1^2}{J_1} + \frac{G_2^2}{J_2} + \frac{G_3^{*2}}{J_3} + \rho\int_\tau (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)\,d\tau +$$
$$+ [M\omega^2 - (U_{rr})_0]\, r^{*2} - (U_{\xi_3\xi_3})_0\, \xi_3^{*2} - 2(U_{r\xi_3})_0\, r^*\xi_3^* - 2(U_{r\alpha_{22}})_0\, r^*\alpha_{22}^* - 2(U_{r\alpha_{33}})_0\, r^*\alpha_{33}^* -$$
$$- 2(U_{r\alpha_{32}})_0\, r^*\alpha_{32} - 2(U_{r\alpha_{23}})_0\, r^*\alpha_{23} - 2(U_{\xi_3\alpha_{22}})_0\, \xi_3^*\alpha_{22}^* - 2(U_{\xi_3\alpha_{33}})_0\, \xi_3^*\alpha_{33}^* -$$
$$- 2(U_{\xi_3\alpha_{23}})_0\, \xi_3^*\alpha_{23} - 2(U_{\xi_3\alpha_{32}})_0\, \xi_3^*\alpha_{32} + O(3) \leqslant \text{const}$$

$$W_2 = M(2r_0\omega r^* + r_0^2\omega^*) + I_3\Omega_3^* + G_3^* + A_3\omega\alpha_{33}^* +$$
$$+ M(\omega r^{*2} + 2r_0 r^*\omega^*) + (I_1\Omega_1 + G_1)\alpha_{31} + (I_2\Omega_2 + G_2)\alpha_{32} + (I_3\Omega_3^* + G_3^*)\alpha_{33}^* = \text{const}$$

$$W_3 = 2\alpha_{22}^* + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^{*2} + \alpha_{23}^2 = 0, \qquad W_4 = 2\alpha_{33}^* + \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^{*2} = 0$$

Здесь

$$(U_{rr})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_0 = -M\omega^2 + 3MP + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i\left[-\frac{105}{2}A_2 r_0^4 R_{i0}^{-9} - \frac{105}{2}A_3 r_0^2(\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-9} + \right.$$
$$\left. + 30A_2 r_0^2 R_{i0}^{-7} + \frac{15}{2}(A_1 + A_2 + A_3)\, r_0^2 R_{i0}^{-7}\right]$$

$$(U_{\xi_3\xi_3})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3^2}\right)_0 = -M\omega^2 + 3MQ + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i\left[-\frac{105}{2}A_2 r_0^2(\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-9} - \right.$$
$$- \frac{105}{2}A_3 r_0^2(\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-9} + 3(A_2 - A_3)R_{i0}^{-5} + \frac{15}{2}(A_1 + A_2 + A_3)(\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-7} +$$
$$\left. + 30A_3(\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-7}\right]$$

$$(U_{r\xi_3})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial \xi_3}\right)_0 = \sum_{i=1}^{2} \sigma_i \left[\frac{105}{2} A_2 r_0^3 (\xi_3^{(i)} - \xi_{30}) R_{i0}^{-9} + \frac{105}{2} A_3 r_0 (\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^3 R_{i0}^{-9} - \right.$$

$$\left. - \frac{15}{2} (A_1 + A_2 + A_3) r_0 (\xi_3^{(i)} - \xi_{30}) R_{i0}^{-7} - 15 (A_2 + A_3) r_0 (\xi_3^{(i)} - \xi_{30}) R_{i0}^{-7}\right] \tag{3.5}$$

$$(U_{r\alpha_{22}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \alpha_{22}}\right)_0 = 3A_2 r_0 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i (5 r_0^2 R_{i0}^{-2} - 2) R_{i0}^{-5}$$

$$(U_{r\alpha_{23}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \alpha_{23}}\right)_0 = 15 A_3 r_0^2 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i (\xi_{30} - \xi_3^{(i)}) R_{i0}^{-7}$$

$$(U_{r\alpha_{32}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \alpha_{32}}\right)_0 = 15 A_2 r_0^2 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i (\xi_3^{(i)} - \xi_{30}) R_{i0}^{-7}$$

$$(U_{r\alpha_{33}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \alpha_{33}}\right)_0 = 15 A_3 r_0 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i (\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-7}$$

$$(U_{\xi_3\alpha_{22}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3\, \partial \alpha_{22}}\right)_0 = 15 A_2 r_0^2 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i (\xi_{30} - \xi_3^{(i)}) R_{i0}^{-7}$$

$$(U_{\xi_3\alpha_{23}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3\, \partial \alpha_{23}}\right)_0 = 3 A_3 r_0 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i [1 + 5 (\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-2}] R_{i0}^{-5}$$

$$(U_{\xi_3\alpha_{32}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3\, \partial \alpha_{32}}\right)_0 = 3 A_2 r_0 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i [1 - 5 (\xi_3^{(i)} - \xi_{30})^2 R_{i0}^{-2}] R_{i0}^{-5}$$

$$(U_{\xi_3\alpha_{33}})_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3\, \partial \alpha_{33}}\right)_0 = 15 A_3 \sum_{i=1}^{2} \sigma_i (\xi_{30} - \xi_3^{(i)})^3 R_{i0}^{-7}$$

$$P = r_0^2 (\sigma_1 R_{10}^{-5} + \sigma_2 R_{20}^{-5}), \qquad Q = \sigma_1 (\xi_3^{(1)} - \xi_{30})^2 R_{10}^{-5} + \sigma_2 (\xi_3^{(2)} - \xi_{30})^2 R_{20}^{-5}$$

а через O (3) обозначены члены не ниже третьего порядка малости относительно возмущений. Для возмущенного движения, в силу (1.6), $dW_1 / dt \leqslant 0$.

Рассмотрим функцию от переменных задачи, построенную по методу Н. Г. Четаева [4] в виде связки первых интегралов уравнений движения

$$W = W_1 - 2\omega W_2 - 3A_2 P W_3 + A_3 (\omega^2 - 3Q) W_4 + \lambda W_2^2 + {}^1/_4\, \nu W_3^2 + {}^1/_4\, \varkappa W_4^2 =$$
$$= W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)} + O(3) \tag{3.6}$$

Здесь

$$W^{(1)} = M (r^{\cdot 2} + \xi_3^{\cdot 2}) + 3 (A_1 - A_2) P \alpha_{21}^2 + \rho \int_\tau (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)\, d\tau$$

$$W^{(2)} = I_1 \Omega_1^2 + G_1^2 / J_1 + [A_3 \omega^2 - 3 (A_3 - A_1) Q] \alpha_{31}^2 - 2 I_1 \omega \Omega_1 \alpha_{31} - 2\omega G_1 \alpha_{31}$$

$$W^{(3)} = I_2 \Omega_2^2 - 2 I_2 \omega \Omega_2 \alpha_{32} + I_3 (1 + \lambda I_3) \Omega_3^{*2} + 2\lambda I_3 \Omega_3^* G_3^* + 2 I_3 \omega (\lambda A_3 - 1) \Omega_3^* \alpha_{33}^* +$$
$$+ 2\lambda M I_3 r_0^2 \Omega_3^* \omega^* + 4\lambda M I_3 r_0 \omega \Omega_3^* r^* + G_2^2 / J_2 - 2\omega G_2 \alpha_{32} + (1 + \lambda J_3) G_3^{*2} / J_3 +$$
$$+ 2\omega (\lambda A_3 - 1) G_3^* \alpha_{33}^* + 2\lambda M r_0^2 G_3^* \omega^* + 4\lambda M r_0 \omega G_3^* r^* + \nu \alpha_{22}^{*2} - 2 (U_{\xi_3\alpha_{22}})_0 \xi_3^* \alpha_{22}^* -$$
$$- 2 (U_{r\alpha_{22}})_0 r^* \alpha_{22}^* + 3 (A_3 - A_2) P \alpha_{23}^2 - 2 (U_{\xi_3\alpha_{23}})_0 \xi_3^* \alpha_{23} - 2 (U_{r\alpha_{23}})_0 r^* \alpha_{23} +$$
$$+ [A_3 \omega^2 - 3 (A_3 - A_2) Q] \alpha_{32}^2 - 2 (U_{\xi_3\alpha_{32}})_0 \xi_3^* \alpha_{32} - 2 (U_{r\alpha_{32}})_0 r^* \alpha_{32} + (A_3 \omega^2 + \lambda A_3^2 \omega^2 +$$
$$+ \varkappa) \alpha_{33}^{*2} + 2\lambda M A_3 r_0^2 \omega \omega^* \alpha_{33}^* - 2 (U_{\xi_3\alpha_{33}})_0 \xi_3^* \alpha_{33}^* + 2 [2\lambda M A_3 r_0 \omega^2 - (U_{r\alpha_{33}})_0] r^* \alpha_{33}^* +$$
$$+ M r_0^2 (1 + \lambda M r_0^2) \omega^{*2} + 4\lambda M^2 r_0^3 \omega \omega^* r^* - (U_{\xi_3\xi_3})_0 \xi_3^{*2} - 2 (U_{r\xi_3})_0 \xi_3^* r^* +$$
$$+ [4\lambda M^2 r_0^2 \omega^2 - M\omega^2 - (U_{rr})_0] r^{*2}$$

а λ, ν, $\varkappa$ — достаточно большие положительные величины, выбираемые из условия определенной положительности функции W.

Согласно критерию Сильвестра для определенной положительности квадратичных форм $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$, а следовательно, и функции W, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(A_1 - A_2)\ P > 0, \qquad (A_3 - A_1)(\omega^2 - 3Q) > 0$$

$$(A_3 - A_2)P > 0, \qquad (A_3 - A_2) \cdot (\omega^2 - 3Q) > 0 \tag{3.7}$$

$$3(A_3 - A_2)(\omega^2 - 3Q)\,P\,(U_{\xi_3\xi_3})_0 + 3P\,(U_{\xi_3\alpha_{32}})_0\,(U_{r\alpha_{33}})_0 + (\omega^2 - 3Q)\,(U_{\xi_3\alpha_{23}})_0^2 < 0 \tag{3.8}$$

$$(Mr_0^2 + A_3)(\Phi_{11}^\circ\Phi_{22}^\circ - \Phi_{12}^{\circ 2}) + 4M^2r_0^2\omega^2\Phi_{11}^\circ > 0 \tag{3.9}$$

Здесь

$$\Phi_{11}^\circ = -(U_{\xi_3\xi_3})_0 - [3(A_3 - A_2)P]^{-1}(U_{\xi_3\alpha_{23}})_0 - [(A_3 - A_2)(\omega^2 - 3Q)]^{-1}(U_{\xi_3\alpha_{32}})_0^2$$

$$\Phi_{12}^\circ = -(U_{r\xi_3})_0 - [3(A_3 - A_2)P]^{-1}(U_{r\alpha_{23}})_0\,(U_{\xi_3\alpha_{23}})_0 - $$
$$-[(A_3 - A_2)(\omega^2 - 3Q)]^{-1}(U_{r\alpha_{32}})_0\,(U_{\xi_3\alpha_{32}})_0$$

$$\Phi_{22}^\circ = -[M\omega^2 + (U_{rr})_0] - [3(A_3 - A_2)P]^{-1}(U_{r\alpha_{23}})_0^2 - [(A_3 - A_2)(\omega^2 - 3Q)]^{-1}(U_{r\alpha_{32}})_0^2$$

При выполнении условий (3.7) — (3.9) функция W, определяемая по формуле (3.6), и будет функцией Ляпунова нашей задачи. В самом деле, dW/dt, взятая в силу уравнений возмущенного движения, будет, в силу (1.6), неположительной, а это, согласно теореме В. В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных [5], позволяет заключить об устойчивости невозмущенного движения (3.1) твердого тела с полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, по отношению к величинам (3.4). Невозмущенное движение системы (3.1), как известно, можно рассматривать как результирующее двух движений: движения ее центра масс и движения вокруг центра масс; при этом условия (3.7) являются условиями устойчивости движения нашей системы вокруг центра масс, а условия (3.8) и (3.9) — условиями устойчивости движения ее центра масс.

Отметим еще, что, если всю массу системы считать сосредоточенной в ее центре масс, то условия (3.8) и (3.9) переходят в известный критерий [4] устойчивости круговых орбит материальной точки, находящейся в осесимметричном силовом поле с силовой функцией $U = U(r, \xi_3)$:

$$(U_{\xi_3\xi_3})_0 < 0, \qquad \left[(U_{rr})_0 + \frac{3}{r_0}(U_r)_0\right](U_{\xi_3\xi_3})_0 - (U_{r\xi_3})_0^2 > 0$$

В заключение отметим, что для случая одного притягивающего центра условия (3.7) переходят в известные [2,3] условия $A_3 > A_1 > A_2$.

4. *Пример.* Исследование устойчивости движения космического аппарата с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, в нормальном поле земного тяготения.

Как известно [6], потенциальная энергия точки единичной массы, притягиваемой двумя неподвижными центрами с равными массами $M/2$, расстояние между которыми равно $2ci$ $(i = \sqrt{-1})$

$$\Pi = -\frac{1}{2} fM\left\{\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_3 - ic)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_3 + ic)^2}}\right\} \tag{4.1}$$

представляется в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\Pi = -\frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{r}\right)^{2n} P_{2n}\left(\frac{\xi_3}{r}\right)\right\} \qquad (r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2)$$

Если положить M равным массе Земли и $c \approx 210$ *км*, то первые два члена ряда (4.1) будут равны соответствующим членам разложения потенциала Земли в ряд по полиномам Лежандра, причем и третьи члены этих рядов будут также достаточно близки. Поэтому разложение (4.1) вполне удовлетворительно представляет потенциал нормального поля Земли.

Если положить $\xi_3^{(1)} = -ic$, $\xi_3^{(2)} = ic$, $m_1 = m_2 = M / 2$, $f_1 = f_2 = f$, то уравнения (3.2) будут иметь решение $\xi_3 = \xi_{30} = 0$, $r = r_0$, причем угловая скорость ω движения центра масс космического аппарата будет связана с r_0 соотношением (3.3), которое в рассматриваемом случае примет вид

$$\omega^2 = \frac{f}{R_0^3}\left[M - \frac{15}{2R_0^4}(A_2 r_0^2 - A_3 c^2) + \frac{3(A_1 + A_2 + A_3)}{2R_0^2} + \frac{3A_2}{R_0^2}\right] \qquad (R_0^2 = r_0^2 - c^2)$$

Решению (3.1) будет соответствовать движение космического аппарата по круговой орбите $r = r_0$, $\xi_3 = 0$, расположенной в плоскости экватора, с постоянной угловой скоростью ω так, что главные центральные оси y_1, y_2, y_3 эллипсоида инерции динамической системы направлены, соответственно, по касательной, главной нормали и бинормали невозмущенной орбиты; при этом жидкость покоится относительно стенок полости космического аппарата, т. е. вся система движется как одно твердое тело.

Для введенных ранее по формулам (3.5) величин P и Q будем иметь выражения

$$P = r_0^2 (f_1 m_1 R_{10}^{-5} + f_2 m_2 R_{20}^{-5}) = \frac{fMr_0^2}{(r_0^2 - c^2)^{5/2}} > 0$$

$$Q = f_1 m_1 (\xi_3^{(1)} - \xi_{30})^2 R_{10}^{-5} + f_2 m_2 (\xi_3^{(2)} - \xi_{30})^2 R_{20}^{-5} = -\frac{fMc^2}{(r_0^2 - c^2)^{5/2}} < 0$$

Тогда условия (3.7) приведут к следующим:

$$A_3 > A_1 > A_2 \qquad (4.2)$$

Далее, так как отношение $c^2 / (r_0^2 - c^2)$ очень мало по сравнению с единицей, то условие (3.8) приближенно запишется в виде $(U_{\xi_3\xi_3})_0 < 0$, или $-(\omega^2 - 3Q)M < 0$. Так как $Q < 0$, то это условие будет выполнено. По тем же причинам условие (3.9) приближенно можно записать в виде

$$[(U_{rr})_0 + 3 / r_0 (U_r)_0] (U_{\xi_3\xi_3})_0 - (U_{r\xi_3})_0^2 > 0$$

Здесь второе слагаемое, в силу (3.5), значительно меньше первого и поэтому приближенно имеем $[(U_{rr})_0 + 3 / r_0 (U_r)_0] (U_{\xi_3\xi_3})_0 > 0$. Так как $(U_{\xi_3\xi_3})_0 < 0$, то

$$(U_{rr})_0 + \frac{3}{r_0 (U_r)_0} = -\frac{fM^2}{(r_0^2 - c^2)^{3/2}}\left(4 - \frac{3r_0^2}{r_0^2 - c^2}\right) < 0$$

Так как $c \approx 210$ *км*, а r_0 больше величины радиуса Земли, то это условие будет выполнено для всех реальных спутниковых движений космических аппаратов.

Таким образом показано, что условия устойчивости (3.7) — (3.9) невозмущенного движения (3.1) космического аппарата приводятся к условиям (4.2). Тем самым показано, что условия устойчивости рассматриваемого движения космического аппарата в нормальном гравитационном поле Земли и в центральном силовом поле Земли имеют один и тот же вид [2,3].

Поступила 3 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
2. Колесников Н. Н. Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Белецкий В. В. О либрации спутника. В сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, 1959, вып. 3.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2, М., Гостехиздат, 1955.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. Моск. ун-та, Математика и механика, 1957, № 4.
6. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. В сб.: «Искусственные спутники Земли», М., Изд-во АН СССР, 1961, вып. 8.