ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОСТОЯННЫХ ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЖИДКОСТИ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО МНОГОСВЯЗНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. М. Ковалев (Донецк)

Устойчивость стационарных движений твердого тела изучалась неоднократно. Р. Граммель [1], а затем В. В. Румянцев [2] рассматривали устойчивость равномерных вращений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. П. А. Кузьмин [3] и В. Д. Иртегов [4] учитывали влияние ньютоновского поля сил. Г. В. Мозалевская [5] рассмотрела устойчивость равномерных вращений гиростата в потенциальном силовом поле. Устойчивость винтовых движений твердого тела в простирающейся беспредельно идеальной несжимаемой жидкости изучил А. М. Ляпунов [6], полагая, что ограничивающая тело поверхность односвязна.

П. В. Харламов преобразовал уравнения движения твердого тела в жидкости для общего случая, когда ограничивающая поверхность тела многосвязна [7] и обобщил аналогию, отмеченную В. А. Стекловым [8]. Вследствие этой аналогии из уравнений П. В. Харламова следуют в качестве частных случаев уравнения движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, и более общие уравнения движения гиростата в центральном ньютоновском поле сил, поэтому и условия устойчивости в рассмотренных выше случаях должны вытекать как следствия условий устойчивости движения тела в жидкости, в предположении работы [7]. Это обобщение делает небезинтересным анализ устойчивости винтовых движений в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения возьмем в форме [7]:

$$dP_1/dt = (P_2 + \lambda_2)\omega_3 - (P_3 + \lambda_3)\omega_2 + (u_3 - \mu_3)R_2 - (u_2 - \mu_2)R_3 \tag{1.1}$$
$$dR_1 / dt = \omega_3 R_2 - \omega_2 R_3 \qquad (123)$$

четыре остальных уравнения получаются круговой перестановкой индексов. Это отмечено символом (123). Причем

$$\omega_i = \frac{\partial T}{\partial P_i}, \qquad u_j = \frac{\partial T}{\partial R_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Для уравнений (1.1) известны три интеграла:

$$T - \mu_i R_i = h \tag{1.3}$$

$$(P_1 + \lambda_1) R_1 + (P_2 + \lambda_2) R_2 + (P_3 + \lambda_3) R_3 = m, \qquad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2 \tag{1.4}$$

Если поместить начало подвижной системы координат, неизменно связанной с телом, в центральной точке тела, а оси совместить с главными осями эллипсоида импульсных моментов, то кинетическая энергия системы запишется в виде:

$$2T = \mathrm{S}\,[a_{11}P_1^2 + 2c_{11}P_1R_1 + 2c_{12}(P_1R_2 + P_2R_1) + 2b_{12}R_1R_2 + b_{11}R_1^2] \tag{1.5}$$

Здесь S означает суммирование трех слагаемых, получаемых из члена, находящегося под знаком S, круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

§ 2. Согласно критерию Рауса [9], для отыскания достаточных условий устойчивости движения тела в жидкости, требуется найти минимум интеграла (1.3) при условиях (1.4). Будем исследовать устойчивость движения по отношению к P_1, P_2, P_3, R_1, R_2, R_3. Составим функцию Лагранжа:

$$F = h - sm - {}^1/_2\sigma R^2 \tag{2.1}$$

где s, σ —множители Лагранжа, и выпишем необходимые условия экстремума функции F по переменным P_1, P_2, P_3, R_1, R_2, R_3:

$$\partial F / \partial P_i = 0, \qquad \partial F / \partial R_j = 0$$

Отсюда, с учетом (1.2), получаем

$$\omega_i = sR_i, \qquad u_i - \mu_i = s(P_i + \lambda_i) + \sigma R_i \tag{2.2}$$

Подставив следующие отсюда величины ω_i, $u_i - \mu_i$ в уравнения (1.1), замечаем, что движениями, при которых функция F принимает экстремальное значение, являются постоянные винтовые движения.

Из первых трех уравнений (2.2) можно выразить переменные P_i через R_j:

$$P_1 = -1/a_{11}\left[(c_{11} - s)R_1 + c_{12}R_2 + c_{13}R_3\right] \qquad (123) \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем символ (123) означает, что два других равенства получаются круговой перестановкой индексов.

Примем ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 за приращение величин P_1, P_2, P_3, R_1, R_2, R_3 в возмущенном движении соответственно. Из (2.1), (1.3), (1.4), (1.5) найдем:

$$2\delta^2 F = \mathrm{S}\left[a_{11}\xi^2_1 + (b_{11} - \sigma)\eta^2_1 + 2c_{12}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + 2\,b_{12}\eta_1\eta_2 + 2(c_{11} - s)\xi_1\eta_1\right] + \ldots$$

$$(P_1 + \lambda_1)\eta_1 + (P_2 + \lambda_2)\eta_2 + (P_3 + \lambda_3)\eta_3 + R_1\xi_1 + R_2\xi_2 + R_3\xi_3 + \ldots = \delta m$$

$$R_1\eta_1 + R_2\eta_2 + R_3\eta_3 + \ldots = {}^1/_2\delta R^2$$

Сделаем замену:

$$\zeta_1 = \xi_1 + \frac{c_{11} - s}{a_{11}}\eta_1 + \frac{c_{12}}{a_{11}}\eta_2 + \frac{c_{13}}{a_{11}}\eta_3 \qquad (123)$$

и положим для сокращения:

$$A_{11} = b_{11} - \frac{(c_{11} - s)^2}{a_{11}} - \frac{c_{12}^2}{a_{22}} - \frac{c_{13}^2}{a_{33}} \qquad (123)$$

$$\frac{1}{2}A_{12} = b_{12} - \frac{(c_{11} - \sigma)\,c_{12}}{a_{11}} - \frac{(c_{21}\,c_{22} - s)}{a_{22}} - \frac{c_{31}c_{32}}{a_{33}} \qquad (123)$$

$$X_1 = 2\,\frac{c_{11} - s}{a_{11}}R_1 + \left(\frac{c_{12}}{a_{11}} + \frac{c_{12}}{a_{22}}\right)R_2 + \left(\frac{c_{13}}{a_{11}} + \frac{c_{13}}{a_{33}}\right)R_3 - \lambda_1 \qquad (123)$$

здесь учтено (2.3). Тогда получим:

$$2\delta^2 F = \mathrm{S}\left[(A_{11} - \sigma)\eta_1^2 + A_{12}\eta_1\eta_2 + a_{11}\zeta_1^2\right] - \tag{2.4}$$

$$-X_1\eta_1 - X_2\eta_2 - X_3\eta_3 + R_1\zeta_1 + R_2\zeta_2 + R_3\zeta_3 = \delta m$$

$$R_1\eta_1 + R_2\eta_2 + R_3\eta_3 = {}^1/_2\delta R^2 \tag{2.5}$$

Достаточные условия устойчивости винтовых движений получим из условий положительной определенности квадратичной формы (2.4) при условиях (2.5). Форма $\delta^2 F$ при условиях (2.5) будет положительно определенной, если положительны главные диагональные миноры выше третьего порядка определителя [10]:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & -X_1 & -X_2 & -X_3 & R_1 & R_2 & R_3 & \delta m \\
0 & 0 & R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2\delta R^2 \\
-X_1 & R_1 & (A_{11} - \sigma) & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-X_2 & R_2 & A_{21} & (A_{22} - \sigma) & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-X_3 & R_3 & A_{31} & A_{32} & (A_{33} - \sigma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\
R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33} & 0 \\
\delta m & {}^1/_2\delta R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Приводим выражения для этих миноров:

$$\Delta_5 = M > 0, \qquad \Delta_8 = a_{11}a_{22}a_{33}\left[M + \Theta N\right) > 0$$

$$\Delta_6 = a_{11}M + R_1^2 N > 0, \qquad \Delta_9 = a_{11}a_{22}a_{33}\left[N(\delta m)^2 + L\delta m\delta R^2 + {}^1/_4 K(\delta R^2)^2\right] > 0$$

$$\Delta_7 = a_{11}a_{22}M + (a_{11}R_2^2 + a_{22}R_1^2)N > 0$$

$$\Theta = R_1^2 / a_{11} + R_2^2 / a_{21} + R_3^2 / a_{33}$$

$$M = \mathrm{S}\left[(A_{11} - \sigma)(R_2X_3 - R_3X_2)^2 + 2A_{12}(R_2X_3 - R_3X_2)(R_3X_1 - R_1X_3)\right]$$

$$N = \mathrm{S}\,\{[(A_{22}-\sigma)(A_{33}-\sigma)-A_{23}{}^2]R_1{}^2+2[A_{31}A_{23}-A_{12}(A_{33}-\sigma)]R_1R_2\}$$

$$L = \mathrm{S}\,\{[(A_{22}-\sigma)(A_{33}-\sigma)-A_{23}{}^2]R_1X_1+2[A_{31}A_{23}-A_{12}(A_{33}-\sigma)](R_1X_2+R_2X_1)\}$$

$$K = \mathrm{S}\,\{[(A_{22}-\sigma)(A_{33}-\sigma)-A_{23}{}^2]X^2{}_1+2[A_{31}A_{23}-A_{12}(A_{33}-\sigma)]X_1X_2\}+$$
$$+\{(A_{11}-\sigma)[(A_{22}-\sigma)(A_{33}-\sigma)-A_{23}{}^2]+A_{12}[A_{31}A_{23}-A_{12}(A_{33}-\sigma)]+$$
$$+A_{31}[A_{23}A_{12}-A_{31}(A_{22}-\sigma)]\}\,\theta$$

В зависимости от ограничений, накладываемых на возмущения, условия устойчивости будут различны.

1. Возмущения не изменяют интегралов (1.4): для устойчивости достаточно, чтобы

$$M>0, \qquad M+\Theta N>0$$

2. Если $\delta m \neq 0$, $\delta R^2 = 0$, то условия будут

$$M>0, \qquad N>0$$

3. Если $\delta m = 0$, $\delta R^2 \neq 0$, то достаточно, чтобы

$$M>0, \qquad M+\Theta N>0, \qquad K>0$$

4. Рассмотрим теперь случай, когда на возмущения не наложено никаких ограничений (изменяются величины обоих интегралов m и R^2).

Условие $\Delta_9>0$ преобразуем, введя $\varkappa = \delta m \,/\, \delta R^2$, так:

$$N\varkappa^2+L\varkappa+{}^1/_4K>0 \tag{2.6}$$

При $N>0$ условие (2.6) выполняется при любом $\varkappa$, если:

$$L^2-KN<0$$

При $N<0$, условию (2.6) можно удовлетворить, если $\varkappa$ находится в интервале $(\varkappa_1, \varkappa_2)$, где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — корни уравнения

$$N\varkappa^2+L\varkappa+{}^1/_4K=0$$

Но если на вариации интегралов (1.4) условий не накладывать, то следует ограничиться случаем $N>0$, при этом достаточными условиями устойчивости будут:

$$M>0, \qquad N>0, \qquad L^2-KN<0$$

§ 3. В работе [7] П. В. Харламов отметил одну аналогию. Если положить в (1.5)

$$a_{ij}=\begin{cases}A_i^{-1} & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}, \qquad b_{ij}=\begin{cases}\varepsilon A_i & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}, \qquad c_{ij}=0, \qquad P_i=A_i\omega_i$$

то из (1.1) получим уравнения:

$$A_1 d\omega_1 \,/\, dt = (A_2-A_3)(\omega_2\omega_3-\varepsilon R_2R_3)+\lambda_2\omega_3-\lambda_3\omega_2+\mu_2R_3-\mu_3R_2$$
$$dR_1 \,/\, dt = \omega_3R_2-\omega_2R_3 \qquad (123)$$

которые по форме совпадают с уравнениями движения гиростата в центральном ньютоновском поле сил. Для этих уравнений известны интегралы:

$$T-\mu_iR_i=H, \qquad (A_1\omega_1+\lambda_1)R_1+(A_2\omega_2+\lambda_2)R_2+(A_3\omega_3+\lambda_3)R_3=m$$
$$R_1{}^2+R_2{}^2+R_3{}^2=R^2=1$$

Очевидно, что условия устойчивости равномерных вращений гидростата можно получить из условий устойчивости постоянных винтовых движений тела в жидкости.

При произвольных возмущениях для устойчивости перманентных вращений гиростата достаточно выполнения двух условий:

$$M>0, \qquad N>0$$

Для возмущений, не изменяющих величины интеграла площадей, достаточно:

$$M>0, \qquad M+(A_1R_1{}^2+A_2R_2{}^2+A_3R_3{}^2)N>0 \tag{3.1}$$

$$M=\Omega\mathrm{S}\,(\rho-A_1)[2\omega(A_2-A_3)R_2R_3-R_2\lambda_3+R_3\lambda_2]^2, \quad N=\Omega^2\mathrm{S}\,(\rho-A_2)(\rho-A_3)R_1{}^2 \tag{3.2}$$

Здесь $\omega = s$ — угловая скорость вращения тела вокруг вертикали, Ω, ρ введены следующим образом:

$$\Omega = \omega^2 - \varepsilon, \qquad \sigma = -\Omega\rho$$

Для твердого тела ($\lambda_i = 0$) условия устойчивости, получающиеся из (3.1), совпадают с условиями П. А. Кузьмина [3]. При произвольных возмущениях достаточные условия устойчивости для твердого тела будут более жесткими

$$M > 0, \qquad N > 0 \qquad (M = 4\Omega\omega^2 S\,(\rho - A_1)(A_2 - A_3)^2 R_2^2 R_3^2)$$

где N имеет вид (3.2), и совпадают с условиями, получающимися из условий работы [5].

Поступила 10 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение. т. I, М., Изд-во иностр. лит., 1952.
2. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
3. Кузьмин П. А. Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1964.
4. Иртегов В. Д. К вопросу об устойчивости стационарных движений твердого тела в потенциальном силовом поле. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
5. Мозалевская Г. В. Об устойчивости равномерных вращений тела, имеющего неподвижную точку. Сб. «Математическая физика». 1968, вып. 5. изд. «Наукова думка».
6. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Сочинения, т. I, Изд-во АН СССР, 1954.
7. Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. ПМТФ, 1963, № 4.
8. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
9. Routh E. The advanced part of a treatise on the dinamics of a system of rigid bodies. 4th Edition, London, 1884, pp. 52, 53.
10. Шостак Р. Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n-переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n-переменных. Усп. матем. наук, 1954, т. 9, вып. 2 (60).

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В. Н. Диесперов, О. С. Рыжов

(Москва)

Первое решение задачи о затухании возмущений вдали от конечного тела, на которое набегает звуковой поток идеального, т. е. лишенного вязкости и теплопроводности газа, принадлежит Гудерлею, Йошихара и Баришу [1,2]. Для полного определения параметров течения им пришлось применить численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя параметрическое представление искомых функций, С. В. Фалькович и И. А. Чернов записали их в замкнутой форме и нашли точный вид автомодельной переменной [3]. Аналогичные результаты получили также Мюллер и Мачат [4].

В указанных работах предполагалось, что как обтекаемое тело, так и поле скоростей возмущенного течения обладают осевой симметрией. Для существенно трехмерных движений газа главный член решения, задающий асимптотические законы затухания возмущений, остается неизменным, но к нему нужно добавить поправки, которые позволяют учесть изменения параметров среды в направлении угловой координаты [5]. В области, расположенной впереди ударного фронта, вид этих поправок был указан Эвраром [6]. Ниже строится решение, относящееся к потоку за скачком уплотнения, и устанавливается связь между ним и действующими на тело подъемной и боковой силами.