

О СПЕКТРЕ ВОЗМУЩЕНИЙ И КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

Д. Л. Шварцблат
(Пермь)

Конвективная устойчивость жидкости, подогреваемой снизу, исследуется обычно в предположении, что стенки полости непроницаемы для вещества и вдувание или отсасывание жидкости на границах отсутствует. Между тем, вдувание и отсасывание жидкости через проницаемые границы может оказывать существенное влияние на условия возникновения конвекции и служить одним из способов управления конвективной неустойчивостью. Это делает рассмотрение подобных задач интересным.

Ниже рассматривается плоский горизонтальный бесконечный слой вязкой жидкости, ограниченный нагретыми до разной температуры проницаемыми плоскостями, между которыми происходит стационарное поперечное движение с однородной вертикальной скоростью. Эта задача представляет собой обобщение известной задачи Рэлея об устойчивости подогреваемого плоского горизонтального слоя жидкости на случай, когда между проницаемыми границами слоя происходит поперечное движение.

Получены спектры декрементов малых нормальных возмущений скорости и температуры, исследована конвективная устойчивость жидкости. Найденные спектры декрементов позволили получить критические числа Рэлея в зависимости от числа Пекле, характеризующего интенсивность вдувания. Оказывается, в частности, что поперечное движение в слое приводит к значительному увеличению критических чисел Рэлея, т. е. к повышению конвективной устойчивости жидкости. В расчетах использовался метод Бубнова — Галеркина с большим числом базисных функций.

1. Рассмотрим плоский горизонтальный бесконечный слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный плоскостями $z = \pm h$, нагретыми до разных температур $\mp \theta$ (ось z направлена вертикально вверх, оси x и y расположены горизонтально, начало координат выбрано в середине слоя). Пусть на поверхности $z = -h$ имеется однородное вдувание со скоростью v_0 , а на поверхности $z = h$ — однородное отсасывание с такой же скоростью. В этом случае в слое происходит стационарное поперечное движение жидкости с однородной скоростью

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = v_0 \quad (1.1)$$

Для нахождения соответствующего стационарного распределения температуры $T_0 = T_0(z)$ запишем в безразмерном виде уравнение теплопроводности, приняв за единицу расстояния полуширину слоя h , а за единицу температуры θ :

$$aT_0' = T_0'', \quad a = \frac{v_0 h}{\chi} \quad (1.2)$$

Здесь a — число Пекле, определенное по полуширине слоя и скорости стационарного движения, χ — коэффициент температуропроводности.

Из (1.2) с учетом граничных условий для температуры

$$T_0(-1) = 1, \quad T_0(1) = -1 \quad (1.3)$$

найдем распределение температуры в слое при стационарном поперечном движении жидкости

$$T_0 = \frac{1}{\operatorname{sh} a} (\operatorname{ch} a - e^{az}) \quad (1.4)$$

В предельном случае отсутствия поперечного движения жидкости ($a = 0$) из (1.4) получается $T_0 = -z$, т. е. линейное по вертикали распределение температуры, соответствующее покоящемуся слою жидкости. С увеличением скорости поперечного движения, т. е. числа Пекле a , распределение температуры «сдвигается» к верхней (при $a > 0$), либо к нижней (при $a < 0$) границе. При больших значениях параметра a возле границы возникает температурный пограничный слой толщины $1/a$.

2. Для исследования конвективной устойчивости слоя жидкости запишем уравнения малых возмущений стационарного распределения скорости v и температуры. Исключая из уравнений конвекции обычным образом давление и x, y — компоненты скорости, получим для вертикальной компоненты скорости возмущений $v_z(x, y, z, t)$ и возмущения температуры $T(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z + \frac{a}{P} \frac{\partial}{\partial z} \Delta v_z &= \Delta^2 v_z + \Delta_1 T & \left(P = \frac{\nu}{\chi} \right) \\ P \frac{\partial T}{\partial t} + a \frac{\partial T}{\partial z} + RT_0' v_z &= \Delta T & \left(R = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu\chi} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь Δ и Δ_1 — пространственный и плоский лапласианы; β, ν, χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, g — ускорение силы тяжести. Уравнения (2.1) записаны в безразмерном виде, причем в качестве единиц времени, скорости и температуры выбраны, соответственно, h^2/ν , $g\beta\theta h^2/\nu$ и θ (единица расстояния указана выше). В уравнения (2.1) входят три безразмерных параметра: числа Рэлея R , Прандтля P и Пекле a .

Рассмотрим нормальные возмущения вида

$$v_z = v(z) \exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)] \quad T = \theta(z) \exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)] \quad (2.2)$$

Здесь $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — комплексный декремент возмущений, k_1 и k_2 — вещественные волновые числа. Подставляя (2.2) в (2.1), получим уравнения для амплитуд возмущений $v(z)$ и $\theta(z)$:

$$\begin{aligned} -\lambda(v'' - k^2 v) + \frac{a}{P}(v''' - k^2 v') &= (v^{IV} - 2k^2 v'' + k^4 v) - k^2 \theta \\ -\lambda P \theta + a \theta' + RT_0' v &= \theta'' - k^2 \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

На границах слоя должны выполняться условия

$$v = v' = \theta = 0 \quad \text{при } z = \pm 1 \quad (2.4)$$

Комплексный декремент нормальных возмущений λ определяется как собственное значение краевой задачи (2.3), (2.4). Амплитуды возмущений $v(z)$ и $\theta(z)$ являются собственными функциями этой краевой задачи.

3. Краевую задачу (2.3), (2.4) будем решать приближенно методом Галеркина. Для этого аппроксимируем решение следующим образом:

$$v = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n v_n, \quad \theta = \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m \theta_m \quad (3.1)$$

В качестве базисных функций v_n и θ_m возьмем систему амплитуд нормальных возмущений скорости и температуры в покоящейся жидкости. Базисные функции v_n и θ_m будут решениями краевых задач

$$\Delta^2 v_n + \mu_n \Delta v_n = 0, \quad v_n(\pm 1) = v_n'(\pm 1) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{P} \Delta \theta_m + \nu_m \theta_m = 0, \quad \theta_m(\pm 1) = 0 \quad (3.3)$$

Явный вид v_n и θ_m можно найти, например, в [1]. Нормировочные интегралы K_l и J_i имеют вид

$$K_l = \int_{-1}^{+1} \theta_l^2 dz = 1 \quad (3.4)$$

$$J_i = \int_{-1}^{+1} v_i \Delta v_i dz = \begin{cases} \mu_i [(\mu_i - k^2)^{-1/2} k \operatorname{th} k (1 - k \operatorname{th} k) - 1], & i = 2S \\ \mu_i [(\mu_i - k^2)^{-1/2} k \operatorname{cth} k (1 - k \operatorname{cth} k) - 1], & i = 2S + 1 \end{cases}$$

Подставляя в (2.3) v и θ из (3.1), умножая оба уравнения (2.3), соответственно, на v_i и θ_l и интегрируя по z в пределах от -1 до 1 , получим систему линейных однород-

ных алгебраических уравнений для коэффициентов разложений (3.1)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \left[(\mu_n - \lambda) \delta_{in} + \frac{a}{P} B_{in} \right] + k^2 \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m D_{im} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (3.5)$$

$$R \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n C_{ln} + \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m [(v_m - P\lambda) \delta_{lm} + a E_{lm}] = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, M-1)$$

Матричные элементы B_{in} , E_{lm} определены следующим образом

$$B_{in} = \frac{1}{J_i} \int_{-1}^{+1} v_i v_n' dz, \quad E_{lm} = \frac{1}{K_l} \int_{-1}^{+1} \theta_l \theta_m' dz \quad (3.6)$$

Если оба индекса одинаковой четности, $B_{in} = E_{lm} = 0$. В случае индексов разной четности

$$B_{in} = \frac{1}{J_i} \frac{2\mu_i \mu_n}{\mu_n - \mu_i}, \quad E_{lm} = (-1)^{\frac{l+m+1}{2}} \frac{2(l+1)(m+1)}{(l-m)(l+m+2)} \quad (3.7)$$

Матричные элементы D_{im} и C_{ln} определены так:

$$D_{im} = \frac{1}{J_i} \int_{-1}^{+1} v_i \theta_m dz, \quad C_{ln} = \frac{1}{K_l} \int_{-1}^{+1} T_0' \theta_l v_n dz \quad (3.8)$$

Элемент D_{im} равен нулю, если оба индекса имеют разную четность. Когда оба индекса четные или когда оба нечетные, то, соответственно

$$D_{im} = (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{J_i} \frac{2\rho_m \mu_i}{Pv_m (\mu_i - Pv_m)}, \quad D_{im} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{J_i} \frac{2\rho_m \mu_i}{Pv_m (\mu_i - Pv_m)} \quad (3.9)$$

В случае четных индексов

$$C_{ln} = q [r^{-1}(f-b) + t^{-1}(b-d)] 2\rho_l (-1)^{l/2} \quad (3.10)$$

Если оба индекса нечетные

$$C_{ln} = q [r^{-1}(c-f) + t^{-1}(d-c)] 2\rho_l (-1)^{1/2(l+1)} \quad (3.11)$$

Если n — четное, а l — нечетное, то

$$C_{ln} = q [r^{-1}(b-f \operatorname{th}^2 a) + t^{-1}(d \operatorname{th}^2 a - b)] 2 \operatorname{cth} a \rho_l (-1)^{1/2(l+1)} \quad (3.12)$$

Наконец, если n — нечетное, а l — четное

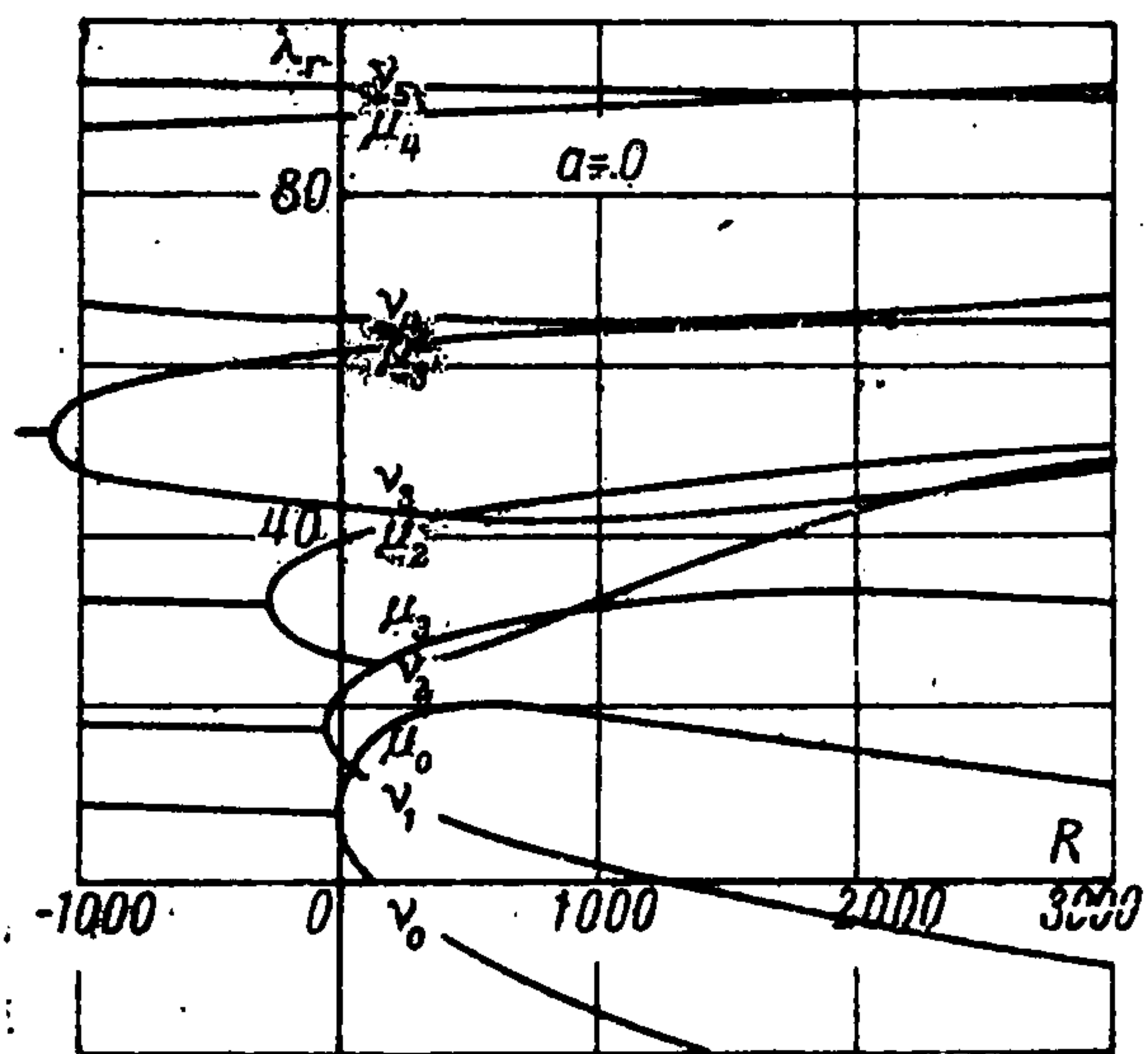
$$C_{ln} = q [r^{-1}(f \operatorname{th}^2 a - c) + t^{-1}(c - d \operatorname{th}^2 a)] 2 \operatorname{cth} a \rho_l (-1)^{1/2l} \quad (3.13)$$

В формулах матричных элементов введены обозначения

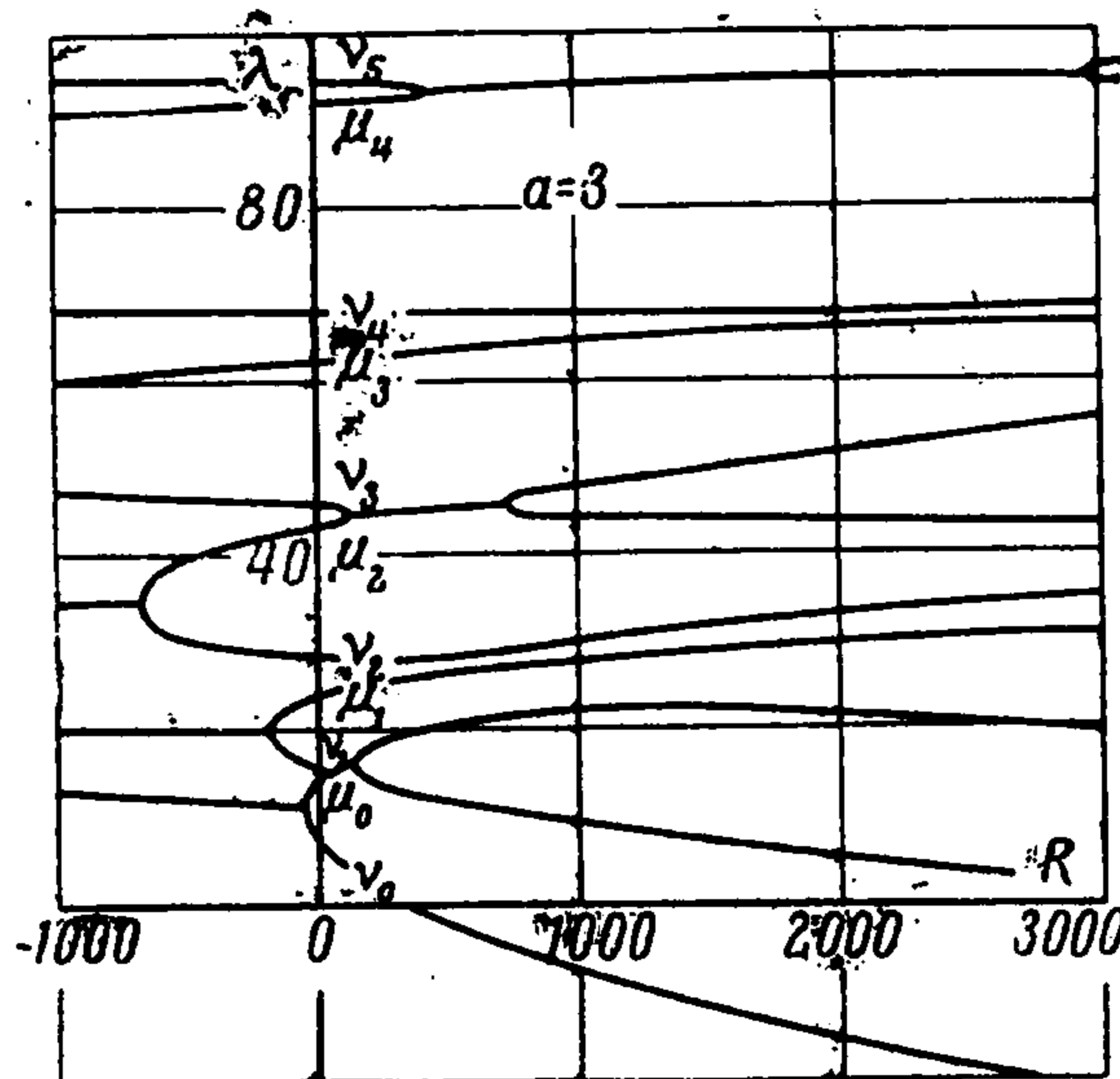
$$b = 2ak \operatorname{th} k, \quad c = 2ak \operatorname{cth} k, \quad \rho_l = 1/2\pi (l+1) \\ u_n^2 = \mu_n - k^2, \quad d = (a^2 + \rho_l^2 - u_n^2) \operatorname{cth} a, \quad t = d^2 + 4u_n^2 a^2 \\ f = (a^2 + k^2 + \rho_l^2) \operatorname{cth} a, \quad r = f^2 - 4k^2 a^2, \quad q = -a \operatorname{csch} a.$$

Условие существования нетривиального решения однородной системы (3.5) определяет спектр характеристических декрементов λ в зависимости от параметров задачи — чисел Рэля R , Пекле a , Прандтля P и волнового числа k . Задача определения спектра связана с нахождением собственных значений λ нормальной матрицы порядка $Q = N + M$, составленной из коэффициентов системы (3.5). Матрица приводилась к квазитреугольному виду ортогональностепенным методом [2]. Этот метод нахождения собственных значений матрицы уже использовался ранее для исследования спектров возмущений плоских изотермических течений [3,4] и конвективного движения жидкости [5]. Собственный вектор матрицы находился методом Гаусса. Все вычисления проведены на ЭВМ «Минск-2».

4. Для вычисления декрементов при $a = 0$ и $a = 3$ было использовано приближение, содержащее 20 базисных функций ($N = M = 10$); при $a = 5$ использовались 24 функции ($N = M = 12$). Эти приближения позволяют с достаточной точностью построить 10—12 нижних уровней спектра декрементов в интервале чисел Рэлея — $2000 < R < 4000$.



Фиг. 1



Фиг. 2

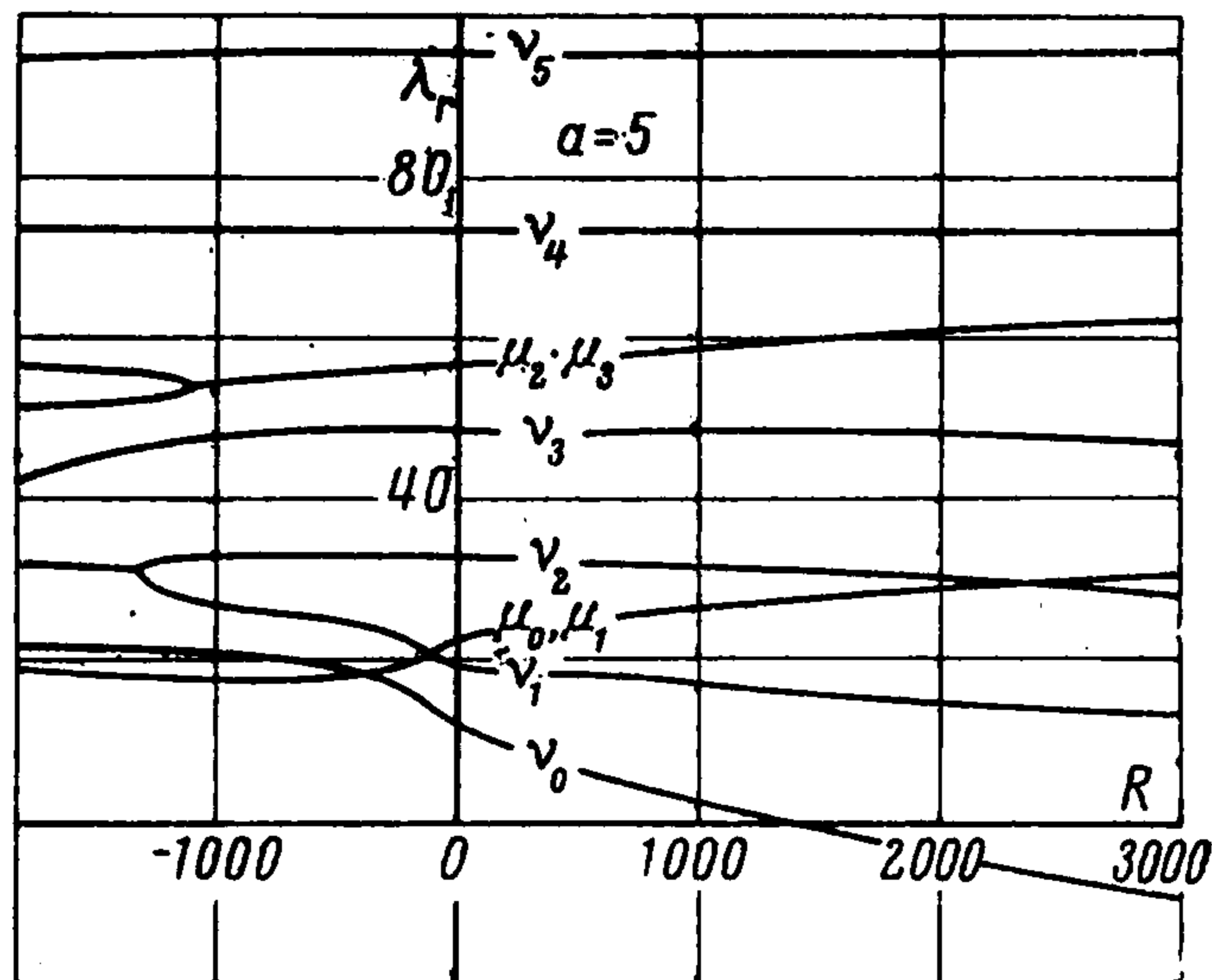
С увеличением R и a сходимость разложений (3.1) ухудшается. Для практической оценки сходимости декременты вычислялись с разным числом базисных функций (до 28). При значении числа Пекле $a = 3$ результаты, полученные при помощи 20 и 24 базисных функций, практически совпадают в указанном интервале значений R . При $a = 5$ аппроксимации, содержащие 24 и 28 базисных функций, также приводят к близким результатам.

Значения декрементов в частном случае отсутствия подогрева ($R = 0$) для $a = 3$ и 5, вычисленные приближенно, практически совпали со значениями, которые в этом частном случае удается найти из точных характеристических соотношений [6,7].

Рассмотрим полученные результаты. На фиг. 1—3 представлена для примера зависимость действительной части декремента λ_r возмущений с волновым числом $k = 2$ от числа Рэлея для трех значений числа Пекле: $a = 0, 3, 5$ при числе Прандтля $P = 1$. Положительные значения R соответствуют подогреву снизу, отрицательные — подогреву сверху.

На фиг. 1 изображены нижние уровни спектра декрементов для $a = 0$ (поперечное движение отсутствует; задача Рэлея). В этом случае при $R = 0$ в жидкости существуют затухающие возмущения двух типов — изотермические, спектр которых определяется краевой задачей (3.2) (μ — уровни), и неизотермические (краевая задача (3.3), ν — уровни).

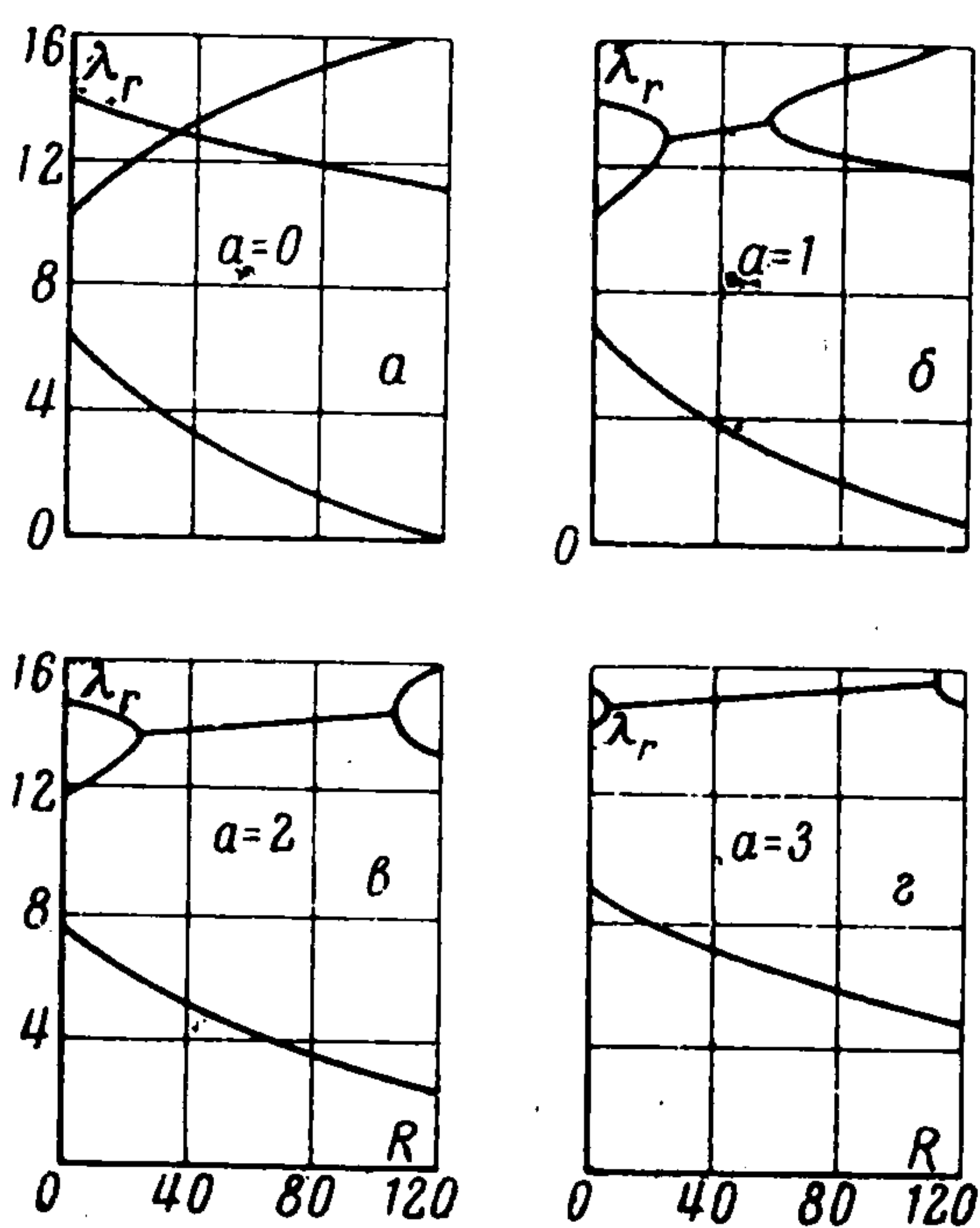
В области $R > 0$ все декременты остаются вещественными (монотонные возмущения), причем в спектре возможны только простые пересечения, при которых декременты остаются вещественными по обе стороны от точки пересечения. Некоторые декременты с увеличением R становятся отрицательными, т. е. возникает монотонная неустойчивость.



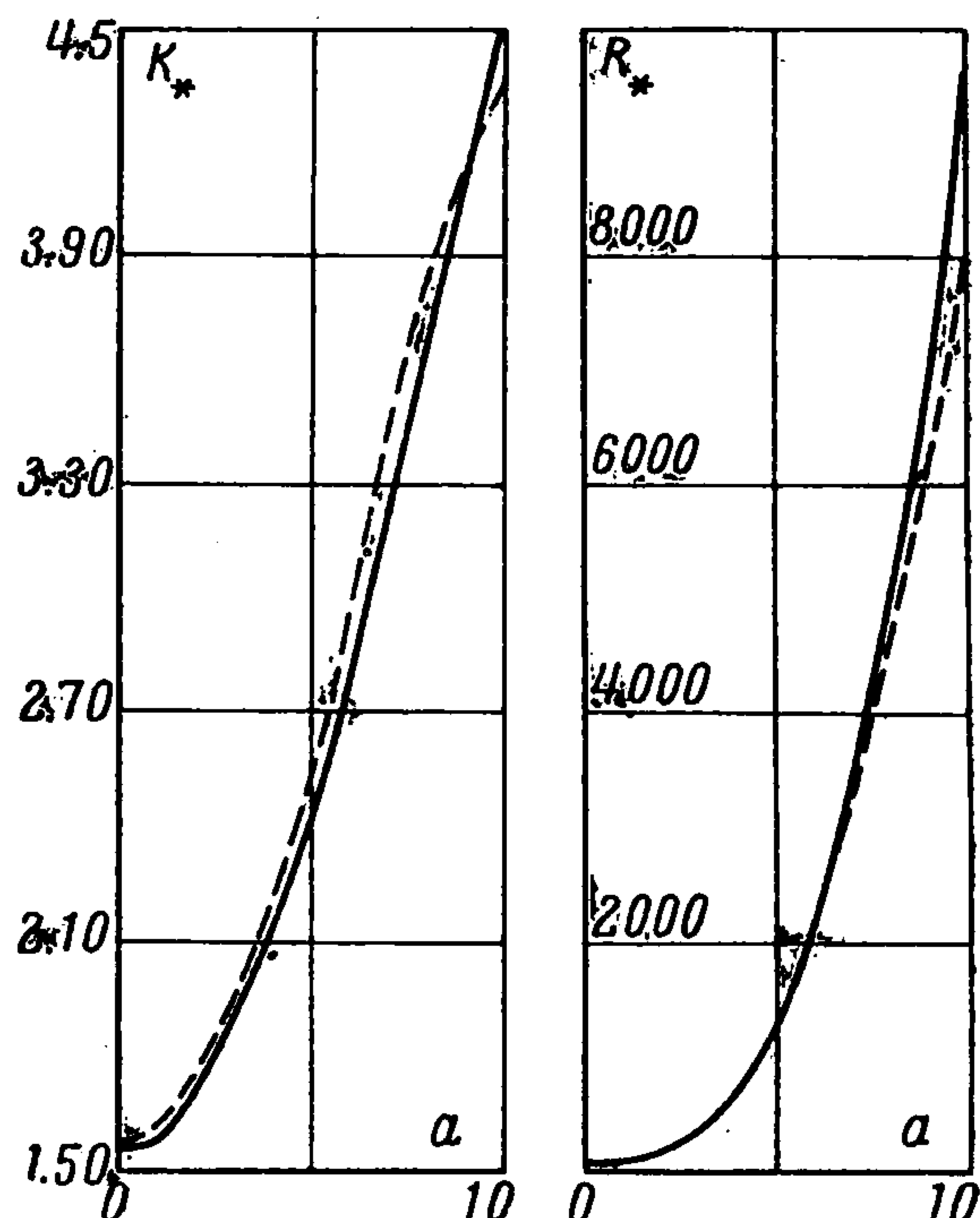
Фиг. 3

В области $R < 0$ происходит слияние вещественных декрементов разного типа с порождением комплексно-сопряженных пар, т. е. возникают колебательные возмущения. При этом вещественные части всех декрементов остаются положительными — все возмущения затухают.

На фиг. 2 и 3 представлен спектр декрементов при наличии поперечного движения жидкости. Наличие вдувания приводит, как видно, к изменению вида спектра. При сколь угодно малых значениях числа Пекле простые пересечения исчезают. Возникают



Фиг. 4



Фиг. 5

либо слияния двух вещественных уровней с образованием комплексно-сопряженных пар (при увеличении числа Рэлея эти пары распадаются снова на два вещественных уровня; фиг. 4), либо вещественные уровни расходятся, не пересекаясь. С ростом числа Пекле точки пересечения линий декрементов с осью R смещаются в область больших значений R , что свидетельствует о стабилизирующем действии вдувания на конвективную неустойчивость¹. В области $R < 0$ с увеличением чисел Пекле происходит смещение точек слияния вещественных уровней спектра в сторону больших по модулю значений R .

Заметим, что, как следует непосредственно из уравнений (2.3), при изменении знака числа Пекле a , т. е. при замене направления скорости вдувания v_0 на противоположное, вид спектра декрементов не изменяется. При этом амплитуды возмущений преобразуются: $v(z) \rightarrow v(-z)$, $\theta(z) \rightarrow \theta(-z)$, так что при $a > 0$ возмущения «прижимаются» к верхней границе, а при $a < 0$ — к нижней.

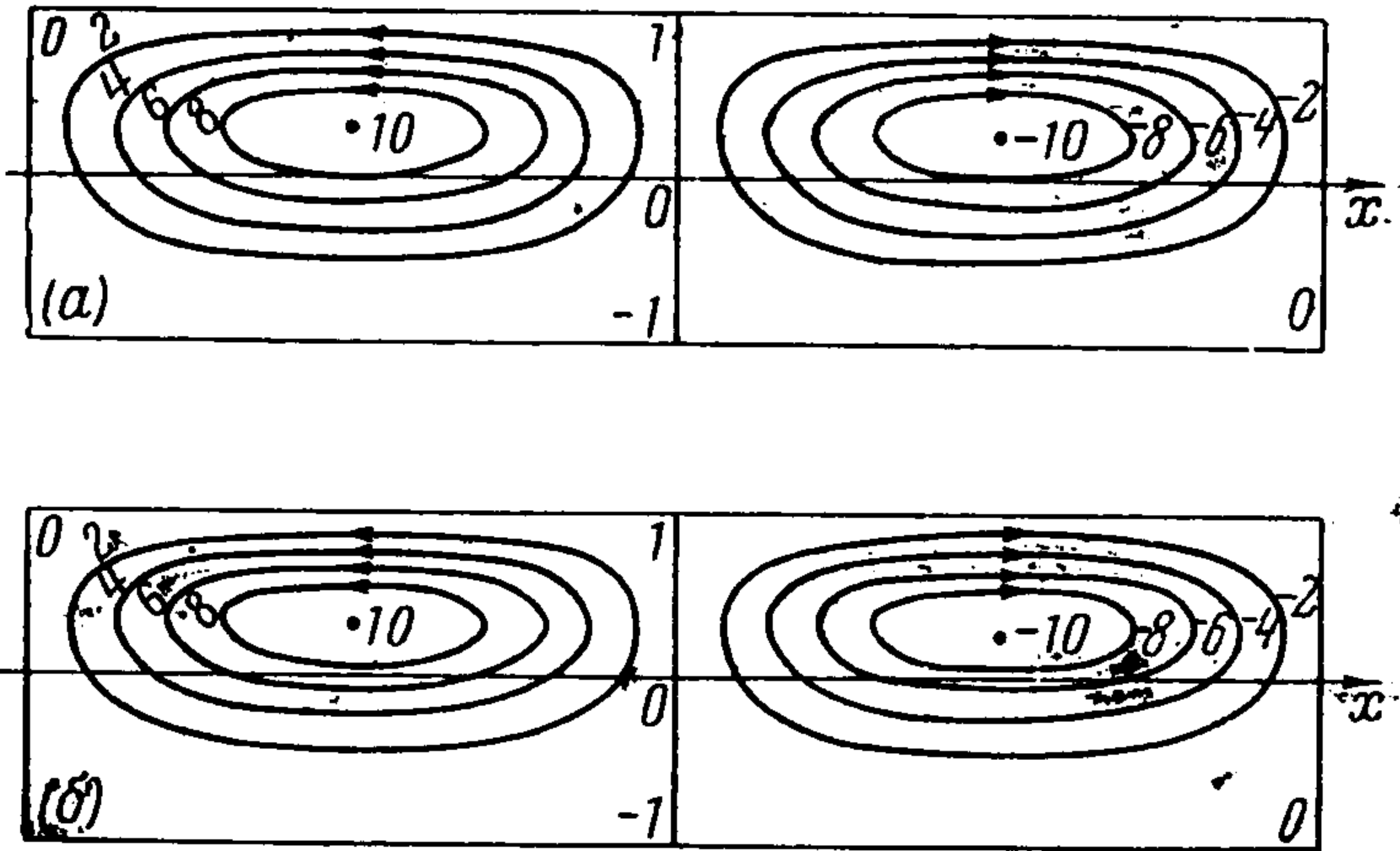
При исследовании конвективной неустойчивости плоского слоя с проницаемыми границами наибольший интерес представляет нижний уровень, ответственный за возникновение неустойчивости. Численные результаты, полученные при расчете спектра декрементов, позволяют построить (при фиксированных a и P) зависимость критического числа Рэлея от волнового числа возмущений k , т. е. нейтральную кривую монотонных возмущений. Эта кривая имеет минимум при значении $k = k_*$; соответствующее значение минимального критического числа Рэлея, определяющего границу монотонной неустойчивости, обозначим R_* .

По данным, найденным при расчете спектров и нейтральных кривых, можно получить зависимость R_* и k_* от числа Пекле. Эти зависимости для $P = 1$ представлены на фиг. 5. Сплошные линии соответствуют результатам, полученным при использовании 16 базисных функций; пунктирные линии — 8 базисных функций.

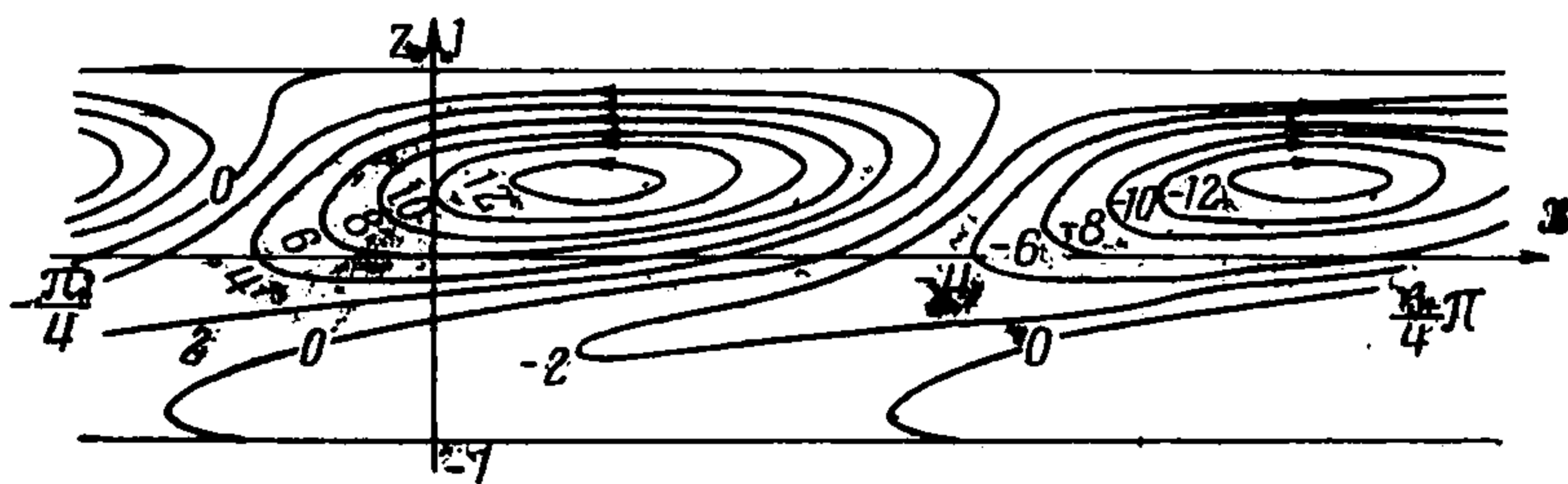
¹ Заметим, что аналогичный эффект стабилизации рэлеевской неустойчивости имеет место при движении одной из плоскостей, ограничивающих горизонтальный слой жидкости (см. [8]).

Как видно, поперечное течение оказывает сильное стабилизирующее действие, существенно повышая конвективную устойчивость жидкости. Возрастание критического числа R_* и волнового числа возмущений k_* по мере увеличения числа Пекле представляется физически понятным. В самом деле, поперечный поток жидкости «сдувает» возмущения, в результате чего они прижимаются к границе, локализуясь в области, высота которой уменьшается по мере роста числа Пекле. Это естественно приводит к увеличению критического числа R_* с ростом числа Пекле. Уменьшение вертикального размера области, в которой эффективно развиваются возмущения, сопровождается также уменьшением длины волны наиболее опасных возмущений, т. е. увеличением k_* .

На фиг. 6, 7 приведены линии тока характеристических возмущений с волновым числом $k=2$, $k_2=0$ при $a=3$, $P=1$. На фигурах изображена картина движения в интервале значений координаты x , равном длине волны возмущения.



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6 соответствует затухающим монотонным возмущениям с декрементами μ_0 (фиг. 6, а) и ν_1 (фиг. 6, б) до их слияния при $R = 5$ (λ_r соответственно, равно 14,176 и 16,000).

На фиг. 7 представлены линии тока затухающих колебательных возмущений с декрементом $\lambda = 20.257 + 9.4376i$ для пары

слившихся уровней μ_0 и ν_0 при $R = -1200$.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за постановку задачи и руководство, Г. З. Гершуни — за полезное обсуждение результатов и Р. В. Бириха — за помощь в работе.

Поступила 19 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудakov Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
3. Бирих Р. В. О спектре малых возмущений плоскопараллельного течения Куэтта. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
4. Бирих Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
5. Рудakov Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шварцблат Д. Л. Об устойчивости поперечного течения жидкости между проницаемыми границами. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудakov Р. Н. О спектре тепловых возмущений в потоках несжимаемой жидкости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
8. Gallagher A. P., Mercer A. McD. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow with a temperature gradient. Proc. Roy. Soc., 1965, vol. A 286, No 1404.