

ИССЛЕДОВАНИЕ ОКРЕСТНОСТИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ГАЗА ЗА РАСХОДЯЩЕЙСЯ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С ВЫРЕЗАННЫМ КОНУСОМ

Я. М. Каждан (Москва)

В пространстве, заполненном ВВ, вырезан полый конус с вершиной в точке O . В результате воспламенения в точке O возникают детонационная волна и движущиеся за ней продукты взрыва. Наличие полого конуса создает волну разрежения, ограниченную свободной поверхностью. В работе изучается поведение газодинамических функций в возникшей волне разрежения в зависимости от угла раствора конуса и показателя адиабаты продуктов взрыва.

Продукты взрыва, возникающие при воспламенении точки O в пространстве, заполненном ВВ, с вырезанным полым конусом S , с вершиной в точке O , ограничены фронтом детонационной волны и свободной поверхностью. Фронт детонационной волны распространяется с постоянной скоростью D . В момент t фронт детонационной волны представляет собой часть сферы Q радиуса Dt с центром в точке O , ограниченной окружностью M_t — линия пересечения сферы Q и конуса S . Ниже определяется форма свободной поверхности, которая зависит от показателя адиабаты продуктов взрыва κ и угла раствора γ конуса S .

Для каждого показателя адиабаты κ определяется критическая величина угла $\gamma_k(\kappa)$. Если показатель $\kappa \geq 2$ и угол $\gamma \geq \gamma_k(\kappa)$ (соответственно $\kappa \leq 2$ и $\gamma \leq \gamma_k(\kappa)$), то свободная поверхность представляет собой в момент t конус, основание которого совпадает с окружностью M_t , а вершина лежит на оси конуса S . В остальных случаях свободная поверхность состоит из усеченного конуса, примыкающего к фронту детонационной волны и поверхности вращения, образующая которой имеет кривизну, отличную от нуля. Последнее обстоятельство указывает на возникновение струи с расширяющимся со временем основанием.

1. Постановка задачи. Движение газа за детонационной волной, расходящейся от точки начального воспламенения O (начало координат), в пространстве, заполненном ВВ, с вырезанным полым конусом (ось конуса $x=0, y=0, z \leq 0, \gamma$ — угол между осью конуса и образующей), обладает цилиндрической симметрией и автомодельно. В силу цилиндрической симметрии достаточно рассмотреть течение в плоскости $rz (r = \sqrt{x^2 + y^2})$. Число независимых переменных в уравнениях газодинамики, определяющих течение, в силу автомодельности, может быть сведено к двум: $\xi = r/t, \eta = z/t$. Искомые функции: плотность ρ и две компоненты скорости V_r и V_z , направленные соответственно по осям r и z . Давление продуктов взрыва p определяется из уравнения состояния

$$p = \kappa \rho^\kappa \quad (1.1)$$

где κ — показатель адиабаты. В начальный момент до взрыва

$$t = 0, \quad p = 0, \quad v_r = v_z = 0, \quad \rho = \kappa / (\kappa + 1) \quad (1.2)$$

Детонационная волна удовлетворяет условию Жуге и в момент t представляет собой часть сферы радиуса $Dt (D = \kappa + 1)$, ограниченную соответствующим сечением конуса. В плоскости $\xi\eta$ фронту детонационной волны соответствует дуга окружности AA' радиуса D с центром в O , симметричная относительно оси η . Очевидно, что угол между радиусом OA (или OA') и полуосью $\eta = (\eta \leq 0)$ равен γ . Для исследования удобно ввести полярные координаты α и δ с вершиной в точке A :

$$\begin{aligned} \xi &= D \sin \gamma + \alpha \cos (\gamma + \sqrt{h} \delta), \\ \eta &= -D \cos \gamma + \alpha \sin (\gamma + \sqrt{h} \delta) \quad (h = (\kappa + 1) / (\kappa - 1)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

и компоненты скорости v_α и v_δ :

$$\begin{aligned} v_r &= D \sin \gamma + v_\alpha \cos (\gamma + \sqrt{h} \delta) - v_\delta \sin (\gamma + \sqrt{h} \delta) \\ v_z &= -D \cos \gamma + v_\alpha \sin (\gamma + \sqrt{h} \delta) + v_\delta \cos (\gamma + \sqrt{h} \delta) \end{aligned}$$

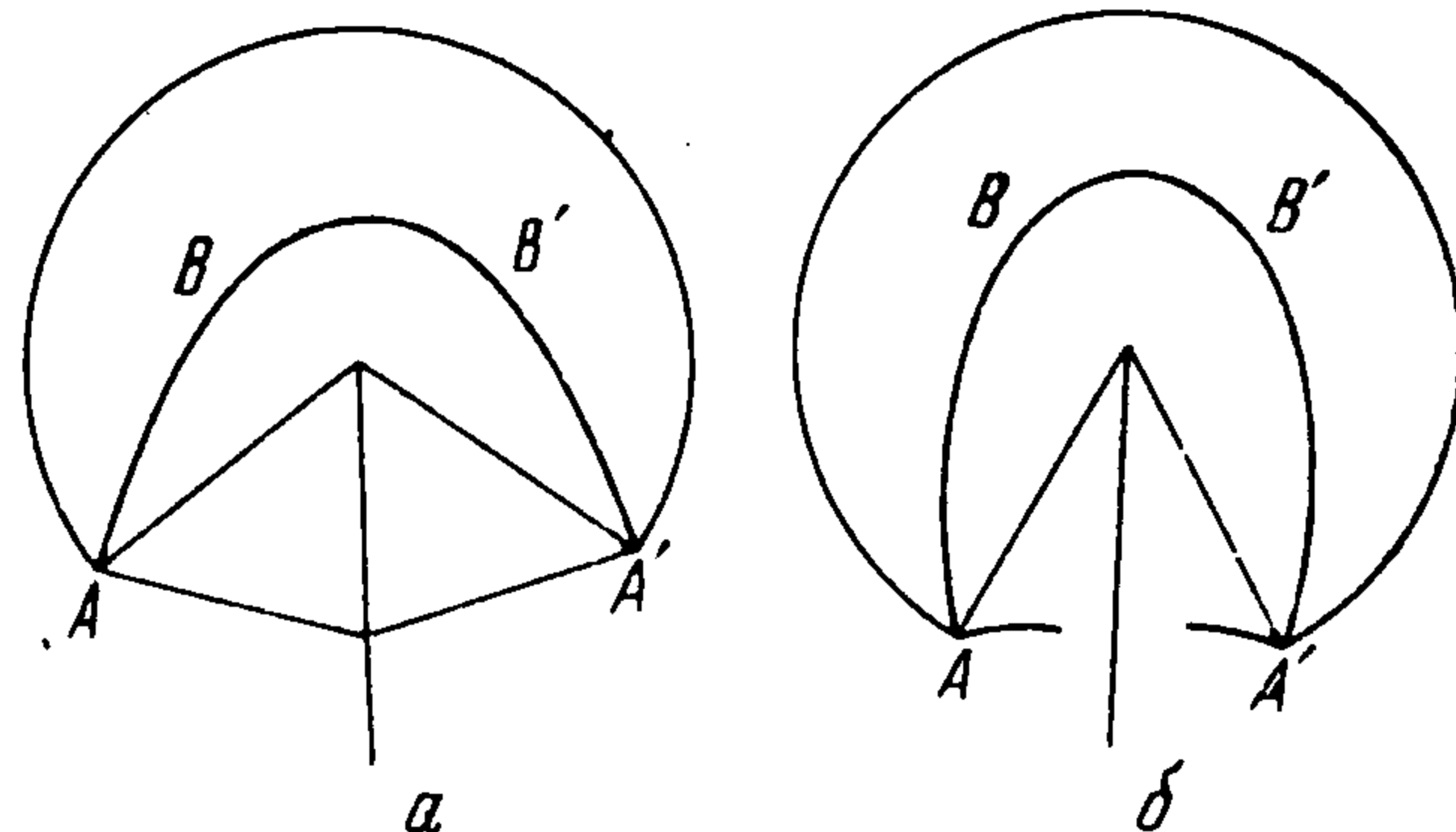
где $\sqrt{h} \delta$ — угол, образованный лучом, исходящим из точки A с направлением фронта детонационной волны в точке A , α — расстояние по лучу от точки A , а v_α и v_δ суть компоненты скорости, направленные соответственно по лучу, исходящему из точки A , и перпендикулярно ему.

Уравнения газодинамики в этих переменных выглядят так:

$$\begin{aligned} (v_\alpha - \alpha) \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\delta}{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \delta} - v_\delta \right) + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= 0 \\ (v_\alpha - \alpha) \frac{\partial v_\delta}{\partial \alpha} + \frac{v_\delta}{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} + v_\alpha \right) + \frac{1}{(\kappa - 1) \sqrt{h} \alpha} \frac{\partial f}{\partial \delta} &= 0 \\ (v_\alpha - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{v_\delta}{\sqrt{h} \alpha} \frac{\partial f}{\partial v_\delta} + (\kappa - 1) f \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{h} \alpha} \frac{\partial v_\delta}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{v_\alpha \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) - v_\delta \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta) + D \sin \gamma}{\alpha \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) + D \sin \gamma} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь f — квадрат скорости звука.

В работе [1] была определена область G в плоскости $\xi\eta$, где возникшее за волной течение совпадает со сферически симметричным решением, найденным Я. Б. Зельдовичем [2]. Эта область ограничена фронтом детонационной волны AA' и двумя симметричными отрезками характеристик AB и $A'B'$. При достаточно больших углах γ ($\gamma > \gamma_x$) точки B и B' совпадают и лежат на оси η . В противном случае ($\gamma < \gamma_x$) в границу области G входят также фронт ударной волны BB' , соединяющей точки B и B' (фиг. 1, а и б). Величина угла γ_x зависит только от κ и определяется численным интегрированием.



Фиг. 1

Ниже исследуется асимптотика газодинамических функций вне области G : в окрестности точки A и свободной границы, выходящей из точки A (в силу симметрии нет необходимости повторять это исследование для точки A'). Наличие полого конуса создает в точке A центрированную волну разрежения, оканчивающуюся свободной границей, т. е. линией где $p = 0$. В главном члене эта волна соответствует решению Прандтля — Майера.

$$v_\alpha = \kappa \sqrt{h} \sin \delta, \quad v_\delta = \kappa \cos \delta, \quad f = \kappa^2 \cos^2 \delta \quad (1.6)$$

и свободной границе соответствует луч, выходящий из точки A под углом $1/2 \sqrt{h} \pi$ к фронту детонационной волны¹ в плоскости $\xi\eta$. Однако характеристика AB , ограничивающая область G , не принадлежит центрированной волне разрежения, ибо значения вдоль характеристики AB совпадают со значениями (1.6) лишь в одной точке A . Это означает, что в непосредственной близости к характеристике AB , когда α порядка δ^3 (уравнение характеристики AB $\alpha \approx \frac{64}{81} \kappa h^{1.5} \delta^3$) структура решения несколько иная. Именно, в окрестности точки A существует промежуточная зона между характеристикой AB и волной разрежения, где решение представляется в виде:

$$\begin{aligned} v_\alpha &= v_{\alpha_0}(\psi) \delta + v_{\alpha_1}(\psi) \delta^3 + \dots, \quad v_\delta = v_{\delta_0}(\psi) + v_{\delta_1}(\psi) \delta^2 + \dots \\ f &= f_0(\psi) + f_1(\psi) \delta^2 + \dots, \quad \psi = \alpha / \delta^3 \quad (\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

¹ Предполагается, что $h < 9$ (т. е. $\kappa > 1.25$), при этом $1/2 \sqrt{h} \pi < 1.5\pi$ и волна разрежения не «догоняет» фронт детонационной волны.

Представление (1.7) соответствует расщеплению особенности в окрестности точки $\alpha = 0, \delta = 0$ в плоскости $\alpha\delta$: верхний край $\psi = \psi_0 = \frac{64}{81} \kappa h^{1.5}$ — характеристика AB , нижний край $\psi = 0$ означает переход к конечным значениям δ (фиг. 2). Асимптотика (1.7) была найдена и исследована в [1]: при $\psi = \psi_0$ значения, вычисленные по формулам (1.7), совпадают со значениями сферически симметричного решения на характеристике AB ; при ψ , близких к ψ_0 ($\psi - \psi_0 < 0$) образуется волна сжатия, переходящая при $\gamma < \gamma_x$ в ударную волну; при $\psi \rightarrow 0$ представление (1.7) склеивается с Прандтль — Майеровским решением (1.6).

Используя асимптотику (1.7) при $\psi \rightarrow 0$, в п. 2 будет исследовано решение в окрестности точки A и при конечных значениях δ ($0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$). Таким образом, полная окрестность точки A (α мало) состоит из трех областей:

первая, где решение совпадает со сферически симметричным решением; она ограничена фронтом детонационной волны

$$\alpha \approx 2(\kappa + 1) \sqrt{h} \delta$$

и характеристикой AB

вторая, где α порядка δ^3

$$\frac{64}{81} \kappa h^{1.5} > \psi = \alpha / \delta^3 > 0$$

переход от волны сжатия к волне разрежения;

третья область — волна разрежения, оканчивающаяся свободной границей — соответствует конечным значениям δ ($0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$)

Изученная в п. 2 газодинамика окрестности точки A определяет конечную часть свободной границы AK . Из решения Прандтля — Майера (1.6) следует, что при малых значениях α свободная граница в плоскости $\xi\eta$ совпадает с лучом $\delta = \frac{1}{2}\pi$. Пусть N — точка пересечения этого луча с осью η , координаты точки N будут $\delta = \frac{1}{2}\pi, \alpha = \alpha_k$, где

$$\alpha_k = - \frac{(\kappa + 1) \sin \gamma}{\cos(\gamma + \frac{1}{2} \sqrt{h} \pi)} \quad (1.8)$$

Очевидно, AK совпадает с прямолинейной частью свободной границы в плоскости $\xi\eta$. В зависимости от угла γ и показателя κ точка K совпадает с N , либо лежит внутри отрезка AN .

В п. 3 показано, что при $\kappa \geq 2$ и $\gamma \geq \gamma_k(\kappa)$ (соответственно $\kappa \leq 2$ и $\gamma \leq \gamma_k(\kappa)$) точка K совпадает с точкой N . В противном случае точка K лежит строго внутри отрезка AN (фиг. 1, а и б). Угол $\gamma_k(\kappa)$ определяется уравнением

$$\alpha_k = \kappa \sqrt{h} \quad (1.9)$$

Замечание. Если в сколь угодно малую окрестность точки P попадают характеристики, не пересекающие достаточно малую окрестность точки A , то точка P не принадлежит AK . В точку N приходит линия тока — ось η . Поэтому точка N не может принадлежать AK и совпадение AN с AK следует понимать, как совпадение полуинтервалов AN и AK . Положение свободной границы и газодинамика в ее окрестности вне AK могут быть определены лишь в результате численного счета уравнений в частных производных.

2. Асимптотика газодинамических функций в окрестности точки A . В точке A значение $\alpha = 0$, а величина угла δ меняется от нуля до некоторого значения δ_0 , при котором f обращается в нуль. Поэтому исследование асимптотики в окрестности точки A предполагает, что α мало, а угол δ конечен. Непосредственно за областью G (в области G решение сферически симметричное) существует в окрестности точки A зона, где α порядка δ^3 , решение в которой представляется в виде (1.7)

$$v_\alpha = v_{\alpha_0}(\psi) \delta + v_{\alpha_1}(\psi) \delta^3 + \dots, \quad v_\delta = v_{\delta_0}(\psi) + v_{\delta_1}(\psi) \delta^2 + \dots$$

$$f = f_0(\psi) + f_1(\psi) \delta^2 + \dots, \quad \psi = \alpha / \delta^3 \quad (\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0)$$

В [1] были выписаны и исследованы уравнения, определяющие функции от ψ . Было показано, что при малых δ и $\psi \rightarrow 0$ значения газодинамических функций определены формулами

$$v_{\alpha} \approx \kappa \sqrt{h} \delta + [-1/6 \kappa \sqrt{h} + C\psi^{3/7} - \psi / (\kappa + 1)] \delta^3, \dots$$

$$v_{\delta} \approx \kappa + \left(-1/2 \kappa + \frac{3C\psi^{3/7}}{13 \sqrt{h}} \right) \delta^2, \quad f \approx \kappa^2 - \left(\kappa^2 + \frac{3\kappa(\kappa - 1)C\psi^{3/7}}{13 \sqrt{h}} \right) \delta^2 \quad (2.1)$$

Здесь C — константа интегрирования (2.1). Стремление $\psi \rightarrow 0$ означает переход к конечным значениям δ . Поэтому асимптотику газодинамических функций в области конечных значений следует искать в виде

$$v_{\alpha} = v_{\alpha_0}(\delta) + \alpha^{3/7} v_{\alpha_1}(\delta) + \alpha v_{\alpha_2}(\delta) + \dots, \quad v_{\delta} = v_{\delta_0}(\delta) + \alpha^{3/7} v_{\delta_1}(\delta) + \alpha v_{\delta_2}(\delta) + \dots \quad (2.2)$$

$$f = f_0(\delta) + \alpha^{3/7} f_1(\delta) + \alpha f_2(\delta) + \dots$$

Способ получения систем дифференциальных уравнений, определяющих функции с одним и тем же числовым индексом, один и тот же на протяжении всей работы: подстановка асимптотических формул в систему (1.5) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра. Значения функций при $\delta = 0$ определяются асимптотикой (2.1). Система и начальные данные, определяющие функции с индексом 0

$$v_{\delta_0} (v_{\alpha_0}' / \sqrt{h} - v_{\delta_0}) = 0, \quad v_{\delta_0} (v_{\alpha_0}' / \sqrt{h} + v_{\alpha_0}) + f_0' / (\kappa - 1) \sqrt{h} = 0$$

$$v_{\delta_0} f_0' / \sqrt{h} + (\kappa - 1) f_0 [v_{\alpha_0} + v_{\delta_0}' / \sqrt{h}] = 0$$

$$v_{\alpha_0} = 0, \quad v_{\delta_0} = \kappa, \quad f = \kappa^2 \quad \text{при } \delta = 0 \quad (2.3)$$

Решение системы (2.3) представляет собой волну разрежения (Прандтль — Майер)

$$v_{\delta_0} = \kappa \sqrt{h} \sin \delta, \quad v_{\alpha_0} = \kappa \cos \delta, \quad f = \kappa^2 \cos^2 \delta \quad (2.4)$$

Свободной границе соответствует значение δ , равное $1/2\pi$. Уравнения, определяющие функции с индексом 1

$$7\kappa \cos \delta (v_{\alpha_1}' - \sqrt{h} v_{\delta_1}) + 6\kappa h \sin \delta v_{\alpha_1} + 3(h - 1) \sqrt{h} f_1 = 0$$

$$7\kappa \cos \delta (v_{\delta_1}' + \sqrt{h} v_{\alpha_1}) + \kappa (13h - 7) \sin \delta v_{\delta_1} + 3.5 f_1' = 0 \quad (2.5)$$

$$\kappa(\kappa - 1) \cos^2 \delta (7v_{\delta_1}' + 13 \sqrt{h} v_{\alpha_1}) + 7 \cos \delta f_1' - 14\kappa \sin \delta \cos \delta v_{\delta_1} + (6h + 12) \sin \delta f_1 = 0$$

$$v_{\alpha_1} \approx C\delta^{3/7}, \quad v_{\delta_1} \approx 3C\delta^{-4/7} / 13 \sqrt{h}, \quad f_1 \approx -3\kappa(\kappa - 1)C\delta^{-4/7} / 13 \sqrt{h} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0$$

При $\delta = 1/2\pi$ все функции с индексом 1 обращаются в нуль, причем справедлива следующая асимптотика:

$$v_{\alpha_1} \approx -\frac{13 \sqrt{h}}{7 + 3h} C_1 \beta^{1+3h/7}, \quad v_{\delta_1} \approx C_1 \beta^{3h/7}, \quad f_1 \approx \frac{\kappa(\kappa - 1)(10h - 7)}{3h + 7} C_1 \beta^{1+3h/7} \quad (2.6)$$

Здесь $\beta = 1/2\pi - \delta$, а C_1 — константа интегрирования.

Уравнения, определяющие функции с индексом 2

$$2\kappa \sqrt{h} \cos \delta v_{\alpha_2}' - 2\kappa \cos \delta v_{\delta_2} + 2\kappa \sqrt{h} \sin \delta v_{\alpha_2} + (h - 1) f_2 = 0$$

$$\kappa(\kappa - 1) \cos \delta v_{\delta_2}' + f_2' + \kappa(\kappa + 3) \sin \delta v_{\delta_2} + \kappa(\kappa - 1) \sqrt{h} \cos \delta v_{\alpha_2} = 0$$

$$v_{\alpha_2} - \frac{(\kappa + 5)}{(\kappa - 1) \sqrt{h}} \operatorname{tg} \delta v_{\delta_2} + \frac{(h - 1)(h + 2)}{2\kappa \sqrt{h}} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \delta} f_2 + 1 +$$

$$\diamond \frac{\kappa \sqrt{h} \sin \delta \cos(\gamma + \sqrt{h} \delta) - \kappa \cos \delta \sin(\gamma + \sqrt{h} \delta)}{(\kappa + 1) \sin \gamma} \quad (2.7)$$

$$v_{\alpha_2} = -1 / (\kappa + 1), \quad v_{\delta_2} = 0, \quad f_2 = 0 \quad \text{при } \delta = 0$$

Асимптотика этих функций при $\delta \rightarrow 1/2\pi$ выглядит следующим образом:

$$v_{\alpha_2} \approx \frac{C_2}{h-2} \beta^2, \quad v_{\delta_2} \approx -\frac{C_2}{\sqrt{h}(h-2)} \beta, \quad f_2 \approx -\frac{2\kappa C_2}{\sqrt{h}(h-2)} \beta^2 \quad (2.8)$$

$$C_2 = 1 + \frac{\kappa \sqrt{h} \cos(\gamma + 1/2\pi \sqrt{h})}{(\kappa + 1) \sin \gamma}$$

Таким образом, при $\beta \rightarrow 0$ и малых α газодинамические величины определены формулами

$$v_{\alpha} \approx \kappa \sqrt{h} \cos \beta - \frac{13 \sqrt{h}}{7+3h} C_1 \beta^{1+3h/7} \alpha^{6/7} + \frac{C_2}{h-2} \beta^2 + \dots$$

$$v_{\delta} \approx \kappa \sin \beta + C_1 \beta^{3h/7} \alpha^{6/7} - \frac{C_2}{\sqrt{h}(h-2)} \beta \alpha + \dots \quad (2.9)$$

$$f \approx \kappa^2 \sin^2 \beta + \frac{\kappa(\kappa-1)(10h-7)}{3h+7} C_1 \beta^{1+3h/7} \alpha^{6/7} - \frac{2\kappa}{\sqrt{h}(h-2)} C_2 \beta^2 \alpha$$

Асимптотические формулы (2.9) были получены из разложения газодинамических функций по степеням α . Поэтому они справедливы в той области малых α и β , где отношение последующего члена к предыдущему стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$. Из отношения третьего члена ко второму в любой из формул (2.9) получается, что они справедливы при малых значениях величины ζ :

$$\zeta = \alpha \beta^{7-3h} \quad (2.10)$$

Заметим¹, что свободной границе $\beta = 0$ ($\delta = 1/2\pi$) соответствует $\zeta = \infty$.

Однако формулы (2.9) справедливы в полной окрестности точки $\beta = 0$, $\alpha = 0$, т. е. при любом значении ζ . Это можно легко получить из представления функций в этой окрестности

$$v_{\alpha} \approx \kappa \sqrt{h} \cos \beta + \beta^{3h-5} V_{\alpha_1}(\zeta) + \dots, \quad v_{\delta} \approx \kappa \sin \beta + \beta^{3h-6} V_{\delta_1}(\zeta) + \dots,$$

$$f \approx \kappa^2 \sin^2 \beta + \beta^{3h-5} F_1(\zeta) + \dots \quad (2.11)$$

(Представление (2.11) индуцировано формулами (2.9) и (2.10)).

Уравнения, определяющие функции $V_{\alpha_1}(\zeta)$, $V_{\delta_1}(\zeta)$, $F_1(\zeta)$ интегрируются в элементарных функциях. Формулы (2.11) с подставленными выражениями функций $V_{\alpha_1}(\zeta)$, $V_{\delta_1}(\zeta)$, $F_1(\zeta)$ в точности совпадают с формулами (2.9).

3. Асимптотика газодинамических функций в окрестности свободной границы. Из полученных в п. 2 асимптотических формул следует, что при малых α свободная граница в плоскости $\xi\eta$ совпадает с лучом $\beta = 0$ ($\delta = 1/2\pi$). Для того, чтобы определить, какая часть отрезка AN (N — точка пересечения луча $\beta = 0$ с осью η) совпадает со свободной границей, необходимо исследовать поведение газодинамических функций при $\beta \rightarrow 0$ и конечных α , т. е. надо найти разложение газодинамических функций по степеням β :

$$v_{\alpha} = \kappa \sqrt{h} + \beta^2 v_{\alpha_0}(\alpha) + \beta^{1+3h/7} v_{\alpha_1}(\alpha) + \dots \quad v_{\delta} = \beta v_{\delta_0}(\alpha) + \beta^{3h/7} v_{\delta_1}(\alpha) + \dots,$$

$$f = \beta^2 f_0(\alpha) + \beta^{1+3h/7} f_1(\alpha) + \dots \quad (3.1)$$

Степени β и асимптотики функций от α при $\alpha \rightarrow 0$ получены из (2.9).

Прямолинейный участок свободной границы в плоскости $\xi\eta$ совпадает с полуинтервалом значений α ($0 \leq \alpha \leq \alpha_0$),¹ при котором функции от α в формулах (3.1) конечны. В дальнейшем будет показано, что обращение в ∞ какой-либо функции от α внутри интервала ($0 < \alpha < \alpha_k$) ведет к искривлению свободной границы в плоскости $\xi\eta$. Значение величины α в точке N — α_k было определено формулой (1.8).

¹ В окрестности свободной границы можно считать, что $\kappa < 2.5$ ($h > 7/3$). В дальнейшем рассматриваются значения, принадлежащие интервалу $1.5 < \kappa < 2.5$.

Утверждение 3.1°. Если $\kappa \geq 2$ и угол $\gamma \geq \gamma_k(\kappa)$ (угол $\gamma_k(\kappa)$ определен уравнением (1.9)) или, соответственно, $\kappa \leq 2$ и угол $\gamma \leq \gamma_k(\kappa)$, то функции от α в представлении (3.1) конечны на всем интервале $(0 < \alpha < \alpha_k)$. В противном случае существует значение α_0 ($0 < \alpha_0 < \alpha_k$), при котором обращаются в ∞ все функции α из (3.1).

Доказательство утверждения 3.1° будет подробно проведено для функций с индексом 0, после чего справедливость утверждения 3.1° для функций с индексом 1 усматривается непосредственно.

Уравнения для функций с индексом 0:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{h}\alpha(\kappa\sqrt{h}-\alpha)v_{\alpha_0}' - 4v_{\delta_0}v_{\alpha_0}' - 2\sqrt{h}v_{\delta_0}^2 + (h-1)\sqrt{h}\alpha f_0' &= 0 \\ \sqrt{h}\alpha(\kappa\sqrt{h}-\alpha)v_{\delta_0}' - v_{\delta_0}^2 + \kappa hv_{\delta_0} - (h-1)f_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\alpha(\kappa\sqrt{h}-\alpha)f_0' + (\kappa-1)f_0[-\sqrt{h}v_{\delta_0} + \kappa\sqrt{h} + \alpha(\kappa\sqrt{h}-\alpha_k)(\alpha-\alpha_k)] = 0$$

$$v_{\alpha_0} \approx -\frac{\kappa\sqrt{h}}{2} + \frac{C_2\alpha}{h-2} + \dots, \quad v_{\delta_0} \approx \kappa - \frac{C_2\alpha}{(h-2)\sqrt{h}} + \dots$$

$$f_0 \approx \kappa^2 - \frac{2\kappa C_2}{(h-2)\sqrt{h}}\alpha + \dots, \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0$$

Система из второго и третьего уравнения может быть решена независимо от первого уравнения, после чего решение первого уравнения получается простой квадратурой. Поэтому качественную картину решения можно получить, исследуя последние два уравнения.

Из уравнений легко усматривается, что при любом значении $\alpha < \alpha_k$ величины v_{δ_0} и f_0 одновременно либо конечны, либо бесконечны. Особыми точками системы будут $\alpha = \kappa\sqrt{h}$ и $\alpha = \alpha_k$. Точка $\alpha = \kappa\sqrt{h}$ принадлежит участку интегрирования $(0, \alpha_k)$ тогда и только тогда, когда угол γ больше угла $\gamma_k(\kappa)$. Система (3.2) обладает решением $f_0(\alpha) \equiv 0$; оно не удовлетворяет асимптотике при $\alpha \rightarrow 0$, поэтому, в силу единственности при $\alpha < \kappa\sqrt{h}$ ($\gamma > \gamma_k(\kappa)$) или при $\alpha < \alpha_k$ ($\gamma < \gamma_k(\kappa)$), всегда $f_0(\alpha) > 0$.

При $\gamma > \gamma_k(\kappa)$ и $\alpha < \kappa\sqrt{h}$ функции v_{δ_0} и f_0 ограничены и в точке $\alpha = \kappa\sqrt{h}$ обращаются в нуль. Действительно, при $\gamma > \gamma_k$ коэффициент $C_2 > 0$, следовательно, v_{δ_0} и f_0 при малых α убывают. Для того чтобы функция f_0 стала расти, необходимо, чтобы функция v_{δ_0} стала больше κ . Но в точке, где $v_{\delta_0} = \kappa$, значение f_0 меньше κ^2 и $v_{\delta_0}' < 0$, т. е. v_{δ_0} все время меньше κ . Из ограниченности функций v_{δ_0} и f_0 следует, что в точке $\alpha = \kappa\sqrt{h}$ их значения равны нулю, причем

$$v_{\delta_0} \approx A_1(\kappa\sqrt{h}-\alpha), \quad f_0 \approx A_2(\alpha-\kappa\sqrt{h})^{2(\kappa-1)} \quad (3.3)$$

Легко видеть, что константы интегрирования A_1 и A_2 должны быть положительны. Из первого уравнения системы (3.2) следует, что при $\alpha \rightarrow \kappa\sqrt{h}$ функция $v_{\alpha_0} \rightarrow \text{const}$.

Доказательство утверждения 3.1°. При $\gamma = \gamma_k(\kappa)$ коэффициент C_2 обращается в нуль, $\alpha_k = \kappa\sqrt{h}$, и искомым решением системы (3.2) будет

$$v_{\delta_0} = \kappa, \quad f_0 = \kappa^2 \quad (3.4)$$

Выписывается также искомое решение системы (3.2) при $\kappa = 2$ (γ — произвольно)

$$v_{\delta_0} = \frac{\alpha_k(\alpha-\kappa\sqrt{h})}{\sqrt{h}(\alpha-\alpha_k)}, \quad f_0 = v_{\delta_0}^2 \quad (3.5)$$

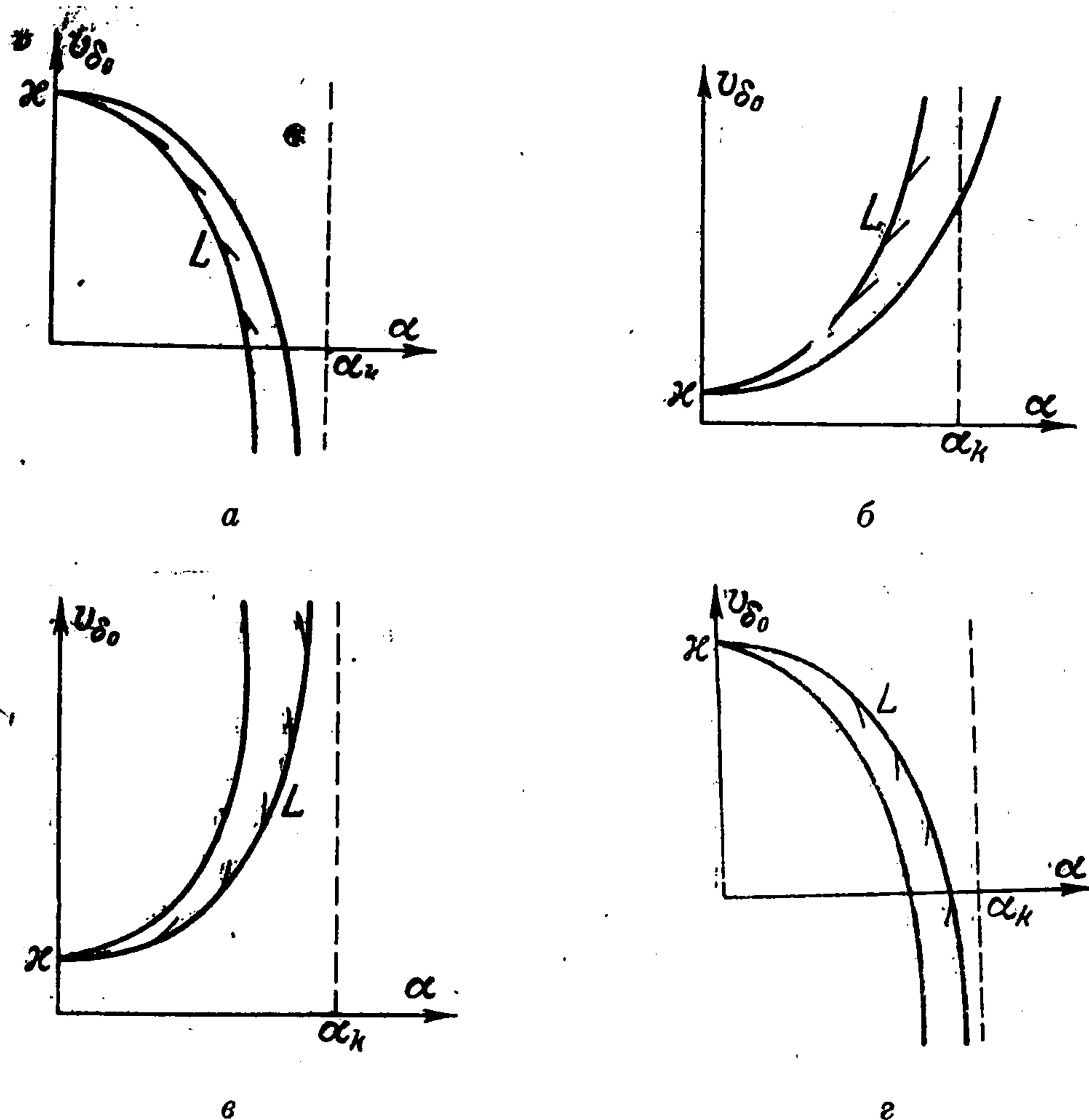
В общем случае достаточно исследовать поле интегральных кривых вдоль кривой (L) , задаваемой уравнениями

$$v_{\delta_0} = \kappa + \frac{(\kappa-1)(\kappa\sqrt{h}-\alpha_k)}{\sqrt{h}(\kappa-3)(\alpha-\alpha_k)}\alpha, \quad f = v_{\delta_0}^2 \quad (L) \quad (3.6)$$

Пусть $dv_{\delta_0}/d\alpha$ определяет направление кривой (L) в точке α , v_{δ_0}' — направление поля интегральных кривых в этой же точке и

$$\Delta = v_{\delta_0}' - \frac{dv_{\delta_0}}{d\alpha} = \frac{2(\kappa - 1)(\kappa - 2)(\kappa \sqrt{h} - \alpha_k) \alpha_k \alpha}{(\kappa - 3)^2 (\alpha - \alpha_k)^2 (\kappa \sqrt{h} - \alpha) \sqrt{h}} \quad (3.7)$$

Случай $\kappa \geq 2$, $\gamma > \gamma_k(\kappa)$. Функция v_{δ_0} убывает с ростом α , обращается в нуль при $\alpha = \kappa \sqrt{h}$ и при $\alpha > \kappa \sqrt{h}$ отрицательна: равенство нулю v_{δ_0} при $\alpha = \kappa \sqrt{h}$ сопровождалось бы отрицательной производной v_{δ_0}' , что невозможно. Вдоль кривой L



Фиг. 3а, б, в, г

функция v_{δ_0} монотонно убывает, отрицательна при $\alpha = \kappa \sqrt{h}$ и обращается в бесконечность при $\alpha = \alpha_k$. Так как разность Δ при $\alpha > \kappa \sqrt{h}$ положительна, то ни при каком $\alpha < \alpha_k$ функция v_{δ_0} , а следовательно, и f_0 , не обращаются в бесконечность (фиг. 3, а)¹. Непосредственно из уравнений легко видеть, что при $\alpha \rightarrow \alpha_k$ справедливы асимптотики:

$$v_{\delta_0} \sim (\alpha - \alpha_k)^{2-\kappa}, \quad f \sim (\alpha - \alpha_k)^{1-\kappa} \quad (3.8)$$

Случай $\kappa \leq 2$, $\gamma < \gamma_k(\kappa)$. Величина $\kappa \sqrt{h}$ больше α_k , поэтому вдоль кривой (L) функция v_{δ_0} монотонно растет и обращается в ∞ при $\alpha = \alpha_k$. Вдоль интегральной кривой величина v_{δ_0} больше нуля, ибо равенство v_{δ_0} нулю в некоторой точке сопровождалось бы положительной производной v_{δ_0}' в этой же точке. Так как разность Δ отрицательна, то искомая интегральная кривая лежит под кривой (L), следовательно, v_{δ_0} и f конечны при любом $\alpha < \alpha_k$ (фиг. 3, б). Легко видеть, что при $\alpha \rightarrow \alpha_k$:

$$v_{\delta_0} \sim \text{const}, \quad f_0 \sim (\alpha - \alpha_k)^{1-\kappa} \quad (3.9)$$

¹ Все исследования будут производиться в плоскости αv_{δ_0} и рассмотрению подлежат проекции кривых на эту плоскость. В дальнейшем под словом «кривая» понимается проекция кривой на плоскость αv_{δ_0} .

Случай $\kappa > 2$, $\gamma < \gamma_k(\kappa)$. Величина $\kappa\sqrt{h}$ больше α_k , поэтому разность Δ положительна на всем интервале $(0, \alpha_k)$. Кривая L обращается в ∞ при $\alpha = \alpha_k$. Так как точка $(\alpha = 0, v_{\delta_0} = \kappa, f = \kappa^2)$ общая для кривой L и искомой интегральной кривой, то последняя должна лежать выше кривой L и, следовательно, должна обратиться в ∞ при некотором значении α_0 ($0 < \alpha_0 \leq \alpha_k$). Величина α_0 не может совпасть с α_k , ибо при $\alpha \rightarrow \alpha_k$ значение v_{δ_0} вдоль интегральной кривой может расти не быстрее, чем $(2-h)(\kappa\sqrt{h} - \alpha_k)\alpha_k h^{-1/2}(\alpha - \alpha_k)^{-1}$ в то время, как вдоль кривой L при $\alpha \rightarrow \alpha_k$ функция v_{δ_0} растет, как $(2-h)^{-1}(\kappa h^{1/2} - \alpha_k)\alpha_k h^{-1/2}(\alpha - \alpha_k)^{-1}$ и разность коэффициентов при $(\alpha - \alpha_k)^{-1}$ отрицательна (фиг. 3, в).

Случай $\kappa < 2$, $\gamma > \gamma_k(\kappa)$. Функция v_{δ_0} убывает с ростом α , обращается в нуль при $\alpha = \kappa\sqrt{h}$, после чего становится отрицательной. Вдоль кривой (L) функция v_{δ_0} монотонно убывающая функция α , положительна при $\alpha = \kappa\sqrt{h}$ и обращается в ∞ при $\alpha = \alpha_k$. Так как разность Δ отрицательна при $\alpha > \kappa\sqrt{h}$, то искомая интегральная кривая лежит под кривой L и, следовательно, должна обратиться в ∞ при некотором значении α_0 ($\kappa\sqrt{h} < \alpha_0 \leq \alpha_k$).

Значение $\alpha_0 < \alpha_k$, ибо единственная интегральная кривая l , проходящая через точку $\alpha = \alpha_k, v_{\delta_0} = -\infty$ не удовлетворяет начальным данным (3.2). Действительно, кривая, определенная системой уравнений с начальными данными (3.2), проходит через точку P ($\alpha = \kappa\sqrt{h}, v_{\delta_0} = 0, f_0 = 0$) и в окрестности точки P удовлетворяет (3.3) с положительными коэффициентами A_1 и A_2 . Точка P узел и все интегральные кривые, проходящие через точку P , удовлетворяют в окрестности точки P уравнениям (3.3) при различных значениях коэффициентов A_1 и A_2 . Если кривая l проходит через точку P , то соответствующий ей коэффициент A_1 отрицателен, иначе существовала бы интегральная кривая, расположенная между кривыми l и L и, в силу единственности, принимающая конечное значение при $\alpha = \alpha_k$, что невозможно (фиг. 3, в).

Итак, при $\kappa > 2$, $\gamma < \gamma_k(\kappa)$ и $\kappa < 2$, $\gamma > \gamma_k(\kappa)$ значение α_0 , где обращается в ∞ функция v_{δ_0} , меньше α_k . Поэтому значение α_0 может быть определено лишь численным интегрированием. Из системы (3.2) следует, что при $\alpha \rightarrow \alpha_0$:

$$v_{\delta_0} \approx \frac{2\sqrt{h}\alpha_0(v_{\alpha_0} - \alpha_0)}{(\kappa + 1)(\alpha_0 - \alpha)}, \quad f_0 \approx \frac{\Gamma(\kappa - 1)^2}{4} v_{\delta_0}^2, \quad v_{\alpha_0} \approx \frac{h\alpha_0^2(v_{\alpha_0} - \alpha_0)}{(\kappa + 1)(\alpha_0 - \alpha)^2} \quad (3.10)$$

Доказательство для функций с индексом 0 завершено.

Линейная система (3.11) определяет функции с индексом 1

$$14\sqrt{h}\alpha(\kappa\sqrt{h} - \alpha)v_{\alpha_1}' + 7\sqrt{h}\alpha(h-1)f_1' - 2v_{\delta_0}[(3h+7)v_{\alpha_1} + 7\sqrt{h}v_{\delta_1}] - \\ - 14v_{\delta_1}(2v_{\alpha_0} + \sqrt{h}v_{\delta_0}) = 0$$

$$14\sqrt{h}\alpha(\kappa\sqrt{h} - \alpha)v_{\delta_1}' - 2v_{\delta_1}[(3h+7)v_{\delta_0} - 7\kappa h] - (h-1)(3h+7)f_1 = 0 \quad (3.11)$$

$$7\sqrt{h}\alpha(\kappa\sqrt{h} - \alpha)f_1' - f_1\{(3h+7\kappa)v_{\delta_0} - (3\kappa+17)f_0 - \\ - 7(\kappa-1)\sqrt{h}[\kappa\sqrt{h} + \alpha(\kappa\sqrt{h} - \alpha_k)/(\alpha - \alpha_k)]\} = 0$$

$$v_{\alpha_1} \approx -\frac{13\sqrt{h}}{7+3h}C_1\alpha^{3/2}, \quad v_{\delta_1} \approx C_1\alpha^{3/2}, \quad f_1 \approx \frac{2\kappa(10h-7)}{(h-1)(3h+7)}C_1\alpha^{3/2}$$

Коэффициенты системы зависят от функций с индексом 0. Поэтому особые значения α в системах (3.2) и (3.11) совпадают, и легко видеть, что функции с индексом 0 и функции с индексом 1 одновременно конечны или бесконечны. Так при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ (третий и четвертый случай) получена следующая асимптотика:

$$v_{\delta_1} \approx A(\alpha_0 - \alpha)^{-(1+3h/7)}, \quad f_1 \approx B(\alpha_0 - \alpha)^{-(2+3h/7)}, \quad v_{\alpha_1} \approx C(\alpha_0 - \alpha)^{-(2+3h/7)} \quad (3.12)$$

Здесь A — константа интегрирования системы (3.11)

$$\frac{B}{A} = - \frac{2 \sqrt{h} \alpha (\kappa \sqrt{h} - \alpha)}{h(h-1)}, \quad \frac{C}{A} = \frac{4 \sqrt{h} \alpha (5h+7)}{(\kappa+1)(10h+7)}$$

Таким образом, установлена справедливость утверждения 3.1° и для функций с индексом 1.

Утверждение 3.2°. Если $\kappa \geq 2$ и $\gamma \geq \gamma_k(\kappa)$ (соответственно $\kappa \leq 2$ и $\gamma \leq \gamma_k(\kappa)$), то, свободная граница совпадает с полуинтервалом AN луча $\beta = 0$, где N — точка пересечения луча $\beta = 0$ с осью η (фиг. 1, а).

Действительно, из утверждения 3.1° следует, что функции α с индексами 0 и 1 конечны на полуинтервале $(0, \alpha_k)$, поэтому f равно нулю на полуинтервале AN .

Утверждение 3.3°. Если $\kappa > 2$ и $\gamma < \gamma_k(\kappa)$ (соответственно $\kappa < 2$ и $\gamma > \gamma_k(\kappa)$), свободная граница совпадает с полуинтервалом AK луча $\beta = 0$, где K — точка, лежащая строго внутри интервала AN (фиг. 1, б). В точке K ($\beta = 0, \alpha = \alpha_0 < \alpha_k$) свободная граница искривляется

$$\beta \approx g_0^* (\alpha - \alpha_0)^{1/k} \quad (g_0^* < 0, \quad k = (3h-7)/3h) \quad (3.13)$$

ее уравнение в окрестности точки K при $\alpha - \alpha_0 > 0$ ($\beta \rightarrow 0, \alpha - \alpha_0 \rightarrow 0$), α_0 — значение α , лежащее внутри интервала $(0, \alpha_k)$, при котором обращается в ∞ функции от α в представлении (3.1).

На интервале $(0, \alpha_0)$ функции от α в представлении (3.1) конечны, поэтому полуинтервал AK принадлежит свободной границе. Точка K особая и определение свободной границы непосредственно за точкой K требует подробного исследования газодинамики в полной окрестности этой точки. Отправным пунктом при этом будут формулы (3.10) и (3.12), полученные при доказательстве утверждения 3.1°. Подставляя их в (3.1), получим,

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha_0) v_\delta &\approx \beta [-(h-1) h^{-1/2} \alpha_0 (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0) + A g^{3h/7}] + \dots \\ (\alpha - \alpha_0)^2 f &\approx \beta^2 [\alpha_0^2 h^{-1} (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0)^2 + B g^{3h/7}] + \dots \\ (\alpha - \alpha_0)^2 (v_{\alpha_0} - \kappa \sqrt{h}) &\approx \beta^2 [-\alpha^2 (\kappa - 1)^{-1} (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0) + C g^{3h/7}] + \dots \\ [k = (3h-7)/3h, \quad g = \beta^k / (\alpha_0 - \alpha)] &\quad \text{при } \alpha_0 - \alpha \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Формулы (3.1) — это разложение по степеням β . Формулы (3.10) и (3.12) получены при $\alpha < \alpha_0$. Следовательно, формулы (3.14) справедливы лишь при малых отрицательных значениях дроби $g = \beta^k / (\alpha_0 - \alpha)$. Величина g в полной окрестности точки K пробегает всю действительную ось, поэтому функции, определяющие газодинамику в этой окрестности представлены в виде

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha_0) v_\delta &\approx \beta V_\delta(g), \quad (\alpha - \alpha_0)^2 (v_\alpha - \kappa \sqrt{h}) \approx \beta^2 V_\alpha(g) \\ (\alpha - \alpha_0)^2 f &\approx \beta^2 F(g) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Система, определяющая функции $V_\delta(g)$, $V_\alpha(g)$ и $F(g)$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dV_\delta} &= \frac{\{\chi [(\kappa-3)k - (\kappa+1)] V_\delta + 2k(F - V_\delta^2) - 2\chi^2\} F}{[(h-1)(k-1)\chi + kV_\delta] F - V_\delta [\chi + kV_\delta][\chi + V_\delta]} \\ \frac{dV_\delta}{dg} g &= \frac{-[2\chi + (\kappa+1)V_\delta] F}{[\chi + kV_\delta] dF/dV_\delta + (\kappa-1)kF} \\ \frac{dV_\alpha}{dg} g &= - \frac{[(dF/dV_\delta)(dV_\delta/dg)g + 2F] \sqrt{h} \alpha_0 + 2(\kappa-1)(\chi + V_\delta) V_\alpha}{(\chi + kV_\delta)(\kappa-1)} \\ (\chi &= \sqrt{h} \alpha_0 (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Начальная асимптотика при $g \rightarrow 0$:

$$V_{\delta} \approx -2 \sqrt{h} \alpha_0 (\kappa + 1)^{-1} (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0) + A g^{3h/7} + \dots \quad (3.17)$$

$$F \approx (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0)^2 \alpha_0^2 h^{-1} + B g^{3h/7} + \dots, \quad V_{\alpha} \approx -(\kappa - 1)^{-1} (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0)^2 \alpha_0^2 + C g^{3h/7} + \dots$$

Свободной границе при $\alpha < \alpha_0$ соответствует линия $g = 0$. На свободной границе должны быть выполнены два условия:

1) давление на свободной границе равно нулю, т. е. $f = 0$; 2) свободная граница есть линия тока. Уравнение линии тока:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = - \sqrt{h\alpha} \frac{v_{\alpha} - \alpha}{v_{\delta}} \quad (3.18)$$

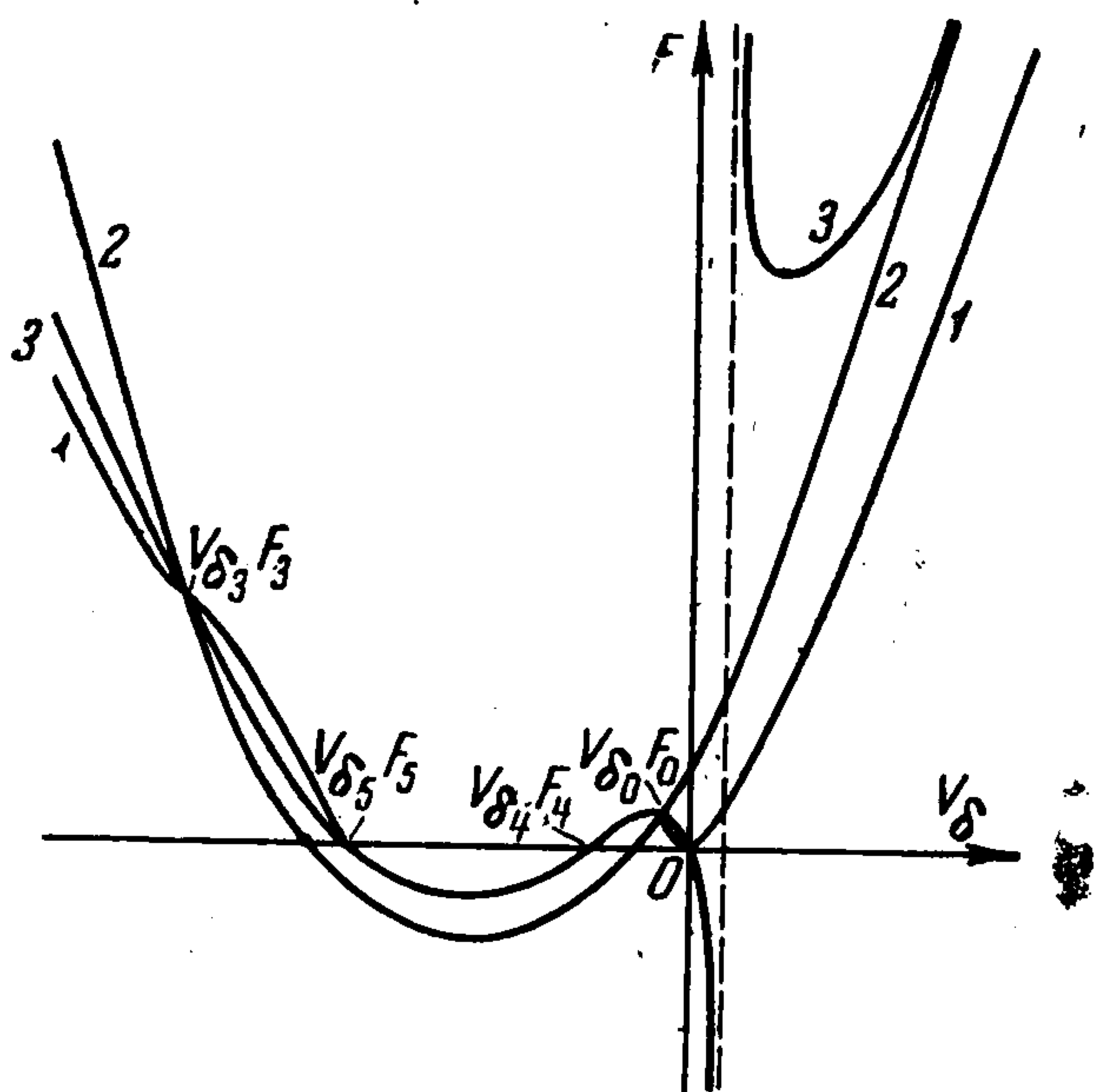
или в переменных g, β

$$\frac{dg}{d\beta} = \frac{g}{\beta} \left[k + \sqrt{h\alpha_0} \frac{\kappa \sqrt{h} - \alpha_0 + \beta^{2(1-k)} g^2 V_{\alpha}(g)}{V_{\delta}(g)} \right] \quad (3.19)$$

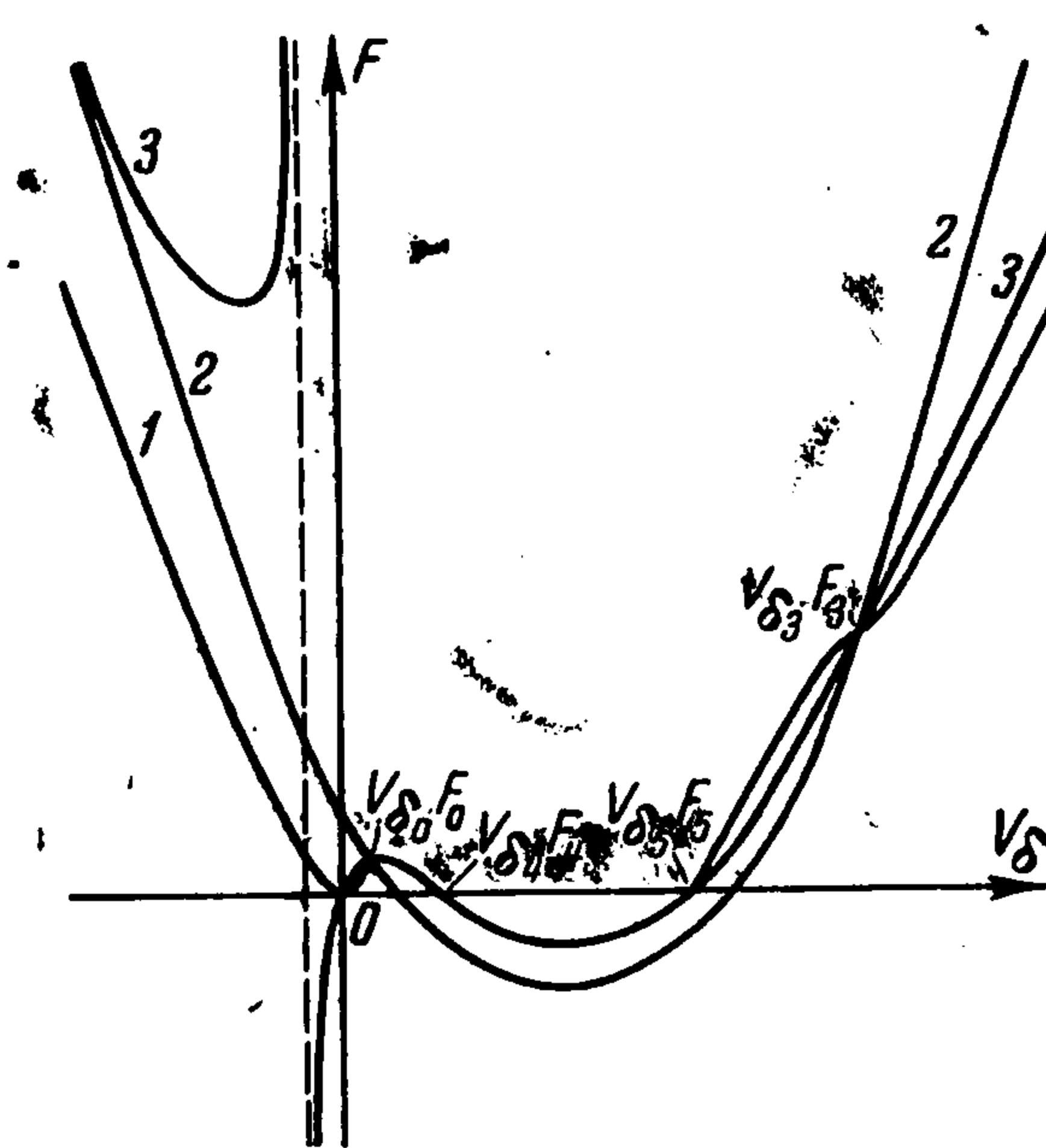
Поэтому при $\alpha > \alpha_0$ — свободная граница в окрестности точки $\beta = 0, \alpha = \alpha_0$ может быть либо линия $g = 0$, если $F g^{2/k} \rightarrow 0$ при $g \rightarrow 0 (g > 0)$, так как $f = (\alpha - \alpha_0)^{2(1-k)/k} g^{2/k} F$, либо линия $g = g_0 (g_0 > 0)$ на которой функции F и V_{δ} принимают фиксированные значения

$$F = 0, \quad V_{\delta} = - \sqrt{h\alpha_0} (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0) / k \quad (3.20)$$

Очевидно, интегрирование системы (3.17) надо вести до значения g соответствующего свободной границе при $\alpha > \alpha_0$.



Фиг. 4а



Фиг. 4б

Первое уравнение системы (3.16) может быть проинтегрировано независимо от второго и третьего уравнений, после чего интегрирование последних сводится к квадратурам. На фиг. 4,а (соответственно 4,б) приведены изоклины нуля 2 и бесконечности 3 этого уравнения и искомая интегральная кривая 1 для случая $\kappa > 2, \gamma < \gamma_k(\kappa)$ (соответственно $\kappa < 2, \gamma > \gamma_k(\kappa)$).

Уравнение имеет шесть особых точек:

начальная точка интегрирования — седло

$$V_{\delta_0} = -2/\kappa + 1 \sqrt{h\alpha_0} (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0), \quad F_0 = h^{-1} (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0)^2 \alpha_0^2$$

дикритические узлы

$$V_{\delta_1} = 0, \quad F_1 = 0; \quad V_{\delta_2} = \pm \infty, \quad F_2 = \infty$$

Узлы

$$V_{\delta_3} = -(h-1) \sqrt{h} \alpha_0 (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0) [(h-2)k]^{-1}, \quad F_3 = 1/4 (\kappa - 1)^2 V_{\delta_3}^2$$

$$V_{\delta_4} = -\sqrt{h} \alpha_0 (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0), \quad F_4 = 0$$

Конечная точка — седло

$$V_{\delta_5} = -\sqrt{h} \alpha_0 k^{-1} (\kappa \sqrt{h} - \alpha), \quad F_5 = 0$$

Линия $g = g_3$, соответствующая точка V_{δ_3} , F_3 — характеристика. Действительно, уравнение одного из семейств характеристик (пучок характеристик, выходящих из точки A , образует другое семейство)

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \sqrt{h} \alpha \frac{(v_\alpha - \alpha)^2 - f}{v_\delta (v_\alpha - \alpha) + \sqrt{f} [(v_\alpha - \alpha)^2 + v_\delta^2 - f]} \quad (3.21)$$

Если линия $g = \text{const}$ принадлежит этому семейству, то значения функций, соответствующих этой линии, должны удовлетворять уравнению

$$-k [V_{\delta} \pm \sqrt{F}] = \sqrt{h} \alpha_0 (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0) \quad (+ \sqrt{F} \text{ при } \kappa > 2, - \sqrt{F} \text{ при } \kappa < 2)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что V_{δ_3} , F_3 удовлетворяют (3.22).

Замечание. Утверждения, что данная линия есть характеристика или свободная граница следует понимать в том смысле, что выполнены соответствующие уравнения и условия в главных членах, относительно окрестности точки $\alpha = \alpha_0$, $\beta = 0$ ($\alpha - \alpha_0$, β — бесконечно малые величины).

Для системы (3.16) можно выписать частное решение, удовлетворяющее асимптотике при $g \rightarrow 0$:

$$F = \left[(\kappa - 1) \frac{V_\delta}{2} \right]^2, \quad g = \frac{2a}{(\kappa + 1)V_\delta} \left[\frac{2a + (\kappa + 1)V_\delta}{A(\kappa + 1)} \right]^{1-k}$$

$$V_\alpha = 1/2 (\kappa^2 - 1) (k - 1) \left[\frac{a + kV_\delta}{2a + (\kappa + 1)V_\delta} \right]^v V_\delta^2 \int \frac{[2a + (\kappa + 1)V_\delta]^{v-1}}{[a + kV_\delta]^{h+1}} dV_\delta \quad (3.23)$$

$$v = \frac{2(1-k)(\kappa-1)}{(\kappa+1)-2k}, \quad a = \sqrt{h} \alpha (\kappa \sqrt{h} - \alpha)$$

Из полученных численным счетом значений A ($A > 0$ при $\kappa > 2$ и $A < 0$ при $\kappa < 2$) следует, что V_δ при малых отрицательных g убывает по абсолютной величине. Поэтому путь интегральной кривой складывается следующим образом (фиг. 4, a и b): от точки V_{δ_0} , F_0 , соответствующей $g = 0$ ($\alpha < \alpha_0$), кривая движется к началу координат $V_{\delta_1} = 0$, $F_1 = 0$, соответствующему значению $g = \infty$, после чего достигается точка $V_{\delta_2} = \pm \infty$, $F_2 = \infty$ (плюс при $\kappa > 2$, минус при $\kappa < 2$), соответствующая значению $g = 0$ ($\alpha > \alpha_0$). Легко видеть, что при этом $F \approx g^{-2/k}$ и, следовательно,

$$f \approx (\alpha - \alpha_0)^{2(1-k)/k}$$

поэтому линия $g = 0$ не соответствует свободной границе. Следовательно, свободной границе соответствует точка

$$V_{\delta_6} = \sqrt{h} \alpha (\kappa \sqrt{h} - \alpha) / k, \quad F_6 = 0$$

Из бесконечно удаленной точки V_{δ_2} , F_2 по отдельной ветви кривая попадает в узел V_{δ_3} , F_3 . Ее направление в этой точке

$$\frac{dF}{dV_\delta} = -\frac{6h \sqrt{h} \alpha_0 (\kappa \sqrt{h} - \alpha_0)}{(h-2)(3h-7)(h-1)} \quad (3.24)$$

Так как точка V_{δ_5}, F_5 , соответствующая свободной границе, не принадлежит интегральной кривой (3.23), то в точке V_{δ_5}, F_5 решение испытывает слабый разрыв, что допустимо, так как точка V_{δ_5}, F_5 соответствует характеристике.

Точка V_{δ_5}, F_5 — седло. Одна сепаратриса седла совпадает с линией $F = 0$. Вторая сепаратриса выходит из точки V_{δ_5}, F_5 с угловым коэффициентом

$$\frac{dF}{dV_{\delta}} = \frac{\kappa(1-k)(\kappa\sqrt{h}-\alpha_0)}{\sqrt{h}\alpha_0k[(h-1)k-h]} \quad (3.25)$$

и попадает в точку V_{δ_3}, F_3 , касаясь направления общего уса

$$\frac{dF}{dV_{\delta}} = \frac{-3\alpha_0 h^{3/2}(\kappa\sqrt{h}-\alpha_0)(13h^2-34h+28)}{(h-2)(3h-7)(h-1)(10h-14)} \quad (3.26)$$

Эта сепаратриса u будет соответствовать завершающему участку интегральной кривой. Значения V_{α} на этом участке можно получить, интегрируя уравнение (частное второго и третьего уравнения системы (3.16))

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\alpha}}{dV_{\delta}} = & -\frac{1}{(a+kV_{\delta})[2a+(\kappa+1)V_{\delta}](\kappa-1)} \left\{ [2a+(\kappa+1)V_{\delta}] F \frac{dF}{dV_{\delta}} + \right. \\ & \left. + [2F+2(\kappa-1)(a+V_{\delta})] \left[(a+kV_{\delta}) \frac{dF}{dV_{\delta}} + (\kappa-1)kF \right] \right\} \quad (3.27) \end{aligned}$$

Так как уравнение линейное и в точке $V_{\delta_5}, V_{\alpha}(V_{\delta_5})$ производная

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\alpha}}{dV_{\delta}} = & \frac{1}{[2a+(\kappa+1)V_{\delta}]k(\kappa-1)} \left\{ -[2a+(\kappa+1)V_{\delta}] \frac{dF}{dV_{\delta}} + \right. \\ & \left. + 2k(\kappa-1)\kappa(a+V_{\delta})V_{\delta} \right\} \frac{dF}{dV_{\delta}} \quad (3.28) \end{aligned}$$

то V_{α} , очевидно, всюду конечно.

Вдоль искомой интегральной кривой за точкой $V_{\delta_2} = \infty, F_2 = \infty, g = 0$ ($\alpha > \alpha_0$) соответствующий угол β становится отрицательным, поэтому в этой области вместо g вводится переменная

$$g^* = \beta(\alpha - \alpha_0)^{-1/k} \quad (3.29)$$

Интегрируя второе уравнение системы (3.16) на завершающем участке V_{δ_5}, F_5 — V_{δ_2}, F_2 , получим значение g^*_0 , соответствующее свободной границе. Это значение, очевидно, будет отрицательным и отличным от нуля и минус бесконечности, т. е. при $\alpha > \alpha_0$ свободная граница в плоскости $\xi\eta$ криволинейна, и в точке $\alpha = \alpha_0, \beta = 0$ касается линия $\beta = 0$ (фиг. 1, б).

Таким образом, уравнение свободной границы в окрестности точки K может быть представлено уравнениями $\beta = 0$ при $\alpha \leq \alpha_0$ и $\beta = g^*_0(\alpha - \alpha_0)^{1/k}$ при $\alpha \geq \alpha_0$.

Эта работа была обсуждена автором с С. К. Годуновым, а многие формулы в этой работе были проверены И. Л. Киреевой. Ею же было проведено интегрирование на ЭВМ систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В. С. Жильцова и М. А. Мидцева оказали большую помощь при оформлении работы. Автор приносит всем названным лицам глубокую благодарность.

Поступила 14 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Каждан Я. М. О движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Зельдович Я. Б. О распределении давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности, при сферическом распространении детонационной волны. ЖЭТФ, 1942, т. 12, № 9, стр. 389.