

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ И ТЕПЛОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

Р. В. Бирх, Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий,  
Р. Н. Рудаков

(Пермь)

Устойчивость стационарного конвективного движения в слое вязкой жидкости между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры, рассматривалась в работах [1-4]. Исследования показали, что возникающее в этом случае течение, состоящее из двух встречных конвективных потоков, становится гидродинамически неустойчивым по отношению к монотонным возмущениям при сравнительно невысоких значениях числа Грассхофа.

Естественным обобщением указанной задачи служит задача об устойчивости конвективного движения в слое, произвольно ориентированном относительно силы тяжести. Это обобщение не является тривиальным. В наклонном слое жидкости градиент температуры имеет вертикальную составляющую. Если этот вертикальный градиент направлен вниз (подогрев снизу) и достаточно велик, то неустойчивость могла бы возникнуть даже в неподвижной жидкости. При наличии конвективного движения в этом случае, очевидно, имеются два физически различных механизма неустойчивости стационарного состояния: 1) гидродинамическая неустойчивость встречных конвективных потоков и 2) тепловая (конвективная) неустойчивость жидкости, подогреваемой снизу. Тепловая неустойчивость имеет место при положении слоя, близком к горизонтальному, соответствующему подогреву снизу. При вертикальном расположении слоя, а также при наклонных положениях, соответствующих подогреву сверху, кризис обуславливается гидродинамическим механизмом. В переходной области углов наклона действуют оба механизма.

Ниже исследуется устойчивость стационарного конвективного движения в наклонном слое. С помощью метода Галеркина удается получить спектр нормальных возмущений и найти критические значения числа Грассхофа, определяющие границу устойчивости, в зависимости от параметров задачи. Как оказывается, при всех ориентациях слоя наиболее «опасны» (с точки зрения устойчивости) монотонные возмущения с длинами волн порядка толщины слоя. Интересно, что переход от тепловой неустойчивости к гидродинамической при изменении ориентации слоя происходит непрерывным образом, в результате изменения основного монотонного уровня неустойчивости.

Отличительным свойством конвективного движения в наклонном слое является существование в определенной области параметров колебательной неустойчивости. Как оказывается, эта колебательная неустойчивость связана (на основном уровне) с коротковолновыми возмущениями.

Заметим, что попытка исследования устойчивости конвективного движения в наклонном слое была предпринята ранее одним из авторов [5]. В этой работе не исследовался спектр декрементов, а ставилась лишь задача отыскания критического числа Грассхофа. Используемые в [5] первые приближения метода не позволили найти границу монотонной неустойчивости во всей области углов наклона. Содержащиеся в [5] выводы относительно колебательной неустойчивости, также основанные на первых приближениях метода, не подтверждаются при использовании более высоких приближений [4].

§ 1. Стационарное движение. Рассмотрим плоский слой жидкости между параллельными плоскостями  $x = \pm h$ , наклоненными под углом  $\alpha$  к вертикали (фиг. 1). На твердых границах слоя поддерживаются постоянные температуры  $\pm \Theta$ . В этих условиях равновесие жидкости невозможно (за исключением предельных случаев горизонтального расположения слоя  $\alpha = \pm 90^\circ$ ), и при любой разности температуры возникает конвективное движение.

Выберем в качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры и давления, соответственно

$$h, \quad h^2 / \nu, \quad g\beta\Theta h^2 / \nu, \quad \Theta, \quad \rho g\beta\Theta h$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения. Тогда уравнения движения, теплопроводности и непрерывности в безразмерной форме можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + G(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + T\gamma \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + G\mathbf{v}\nabla T = \frac{1}{P}\Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$(G = g\beta\Theta h^3 / \nu^2, \quad P = \nu / \chi) \quad (1.2)$$

В уравнения входят безразмерные параметры  $G$  и  $P$  — числа Грассхофа и Прандтля.

В стационарном случае уравнения имеют решение, [описывающее плоскопараллельное движение жидкости вдали от концов слоя.

В этом движении отлична от нуля лишь компонента скорости  $v_z = v_0(x)$ , а температура зависит только от поперечной координаты  $T_0 = T_0(x)$ . Для скорости, температуры и давления в стационарном движении из (1.1), (1.2) получим уравнения

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = v_0'' + T_0 \cos \alpha, \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} = -T_0 \sin \alpha, \quad T_0'' = 0 \quad (1.3)$$

На границах слоя

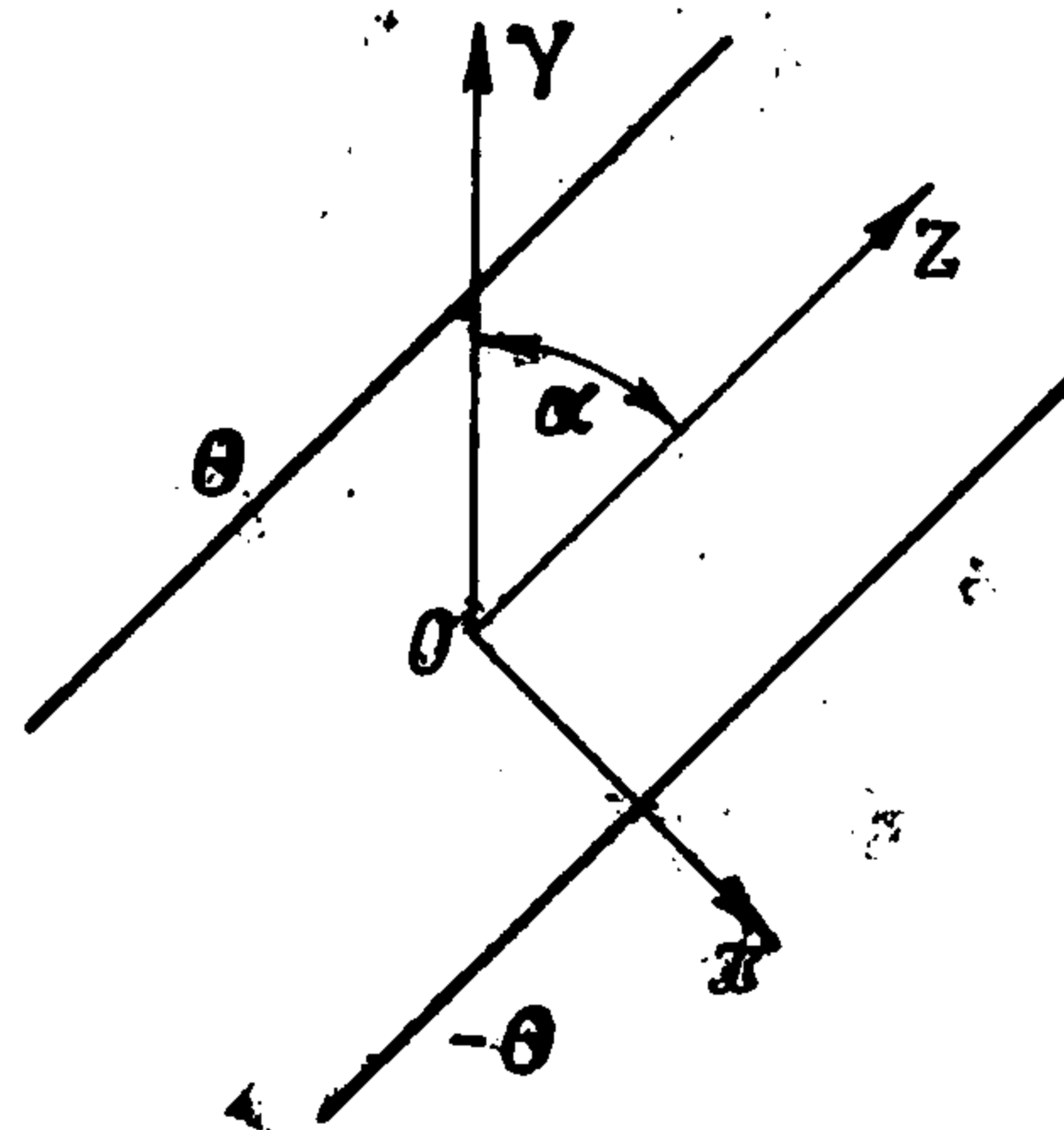
$$v_0(\pm 1) = 0, \quad T_0(-1) = 1, \quad T_0(1) = -1 \quad (1.4)$$

Из (1.3), (1.4) находим

$$v_0 = 1/6 (x^3 - x) \cos \alpha, \quad T_0 = -x$$

$$p_0 = 1/2 x^2 \sin \alpha + \text{const} \quad (1.5)$$

Таким образом, в стационарном режиме возникает течение с кубическим профилем скорости и линейным распределением температуры. Наибольшая скорость движения имеет место при вертикальном расположении слоя ( $\alpha = 0^\circ$ ). При  $\alpha \rightarrow \pm 90^\circ$  стационарное движение переходит в равновесие горизонтального слоя, подогреваемого снизу (знак минус) или сверху (знак плюс).



Фиг. 1

§ 2. Уравнения для возмущений. Пусть  $v$ ,  $\vartheta$  и  $p$  — малое плоское возмущение стационарного движения (1.5). Исключая из (1.1) давление взятием операции  $\text{rot}$  и вводя функцию тока возмущений  $\psi(x, z, t)$  соотношениями

$$v_x = -\partial\psi/\partial z, \quad v_z = \partial\psi/\partial x \quad (2.1)$$

получим после линеаризации уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi + G \left( v_0 \frac{\partial}{\partial z} \Delta\psi - v_0'' \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) = \Delta\Delta\psi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \sin \alpha + \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cos \alpha \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + G \left( v_0 \frac{\partial\vartheta}{\partial z} - T_0' \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) = \frac{1}{P} \Delta\vartheta \quad (2.3)$$

Здесь  $\Delta$  — плоский лапласиан в переменных  $x, z$ .

На границах слоя исчезают возмущения скорости и температуры

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = \vartheta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2.4)$$

Уравнения (2.2), (2.3) с граничными условиями (2.4) имеют решения в виде нормальных возмущений

$$\psi(x, z, t) = \Phi(x) e^{-\lambda t + ikz}, \quad \vartheta(x, z, t) = T(x) e^{-\lambda t + ikz} \quad (2.5)$$

Здесь  $\Phi(x)$  и  $T(x)$  — амплитуды возмущений,  $\lambda$  — комплексный декремент,  $k$  — вещественное волновое число.

Подставляя (2.5) в (2.2), (2.3), получим систему линейных однородных уравнений для амплитуд возмущений

$$\Delta\Delta\Phi + ikG \cos \alpha H\Phi + ikT \sin \alpha + T' \cos \alpha = -\lambda\Delta\Phi \quad (2.6)$$

$$P^{-1}\Delta T + ikG (T_0' \Phi - f_0 T \cos \alpha) = -\lambda T \quad (2.7)$$

Здесь

$$H\Phi = f_0'' \Phi - f_0 \Delta\Phi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2, \quad f_0 = 1/8(x^3 - x)$$

Амплитуды  $\Phi$  и  $T$  удовлетворяют однородным граничным условиям

$$\Phi = \Phi' = T = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2.8)$$

§ 3. Метод решения. Для приближенного решения краевой задачи (2.6) — (2.8) применим метод Бубнова — Галеркина. В качестве базисных функций для аппроксимации амплитуд возмущений функции тока  $\Phi(x)$  и температуры  $T(x)$  примем системы амплитуд возмущений покоящейся жидкости. Эти амплитуды определяются как собственные функции следующих краевых задач:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi_i &= -\mu_i \Delta\varphi_i, & \varphi_i(\pm 1) &= \varphi_i'(\pm 1) = 0 \\ P^{-1}\Delta\theta_k &= -\nu_k \theta_k, & \theta_k(\pm 1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\mu_i$  и  $\nu_k$  — декременты возмущений в покоящейся жидкости. Подставляя разложения

$$T = \sum_m \alpha_m \theta_m, \quad \Phi = \sum_n \beta_n \varphi_n \quad (3.2)$$

в уравнения (2.6), (2.7) и составляя интегральные условия метода Бубнова — Галеркина, получим линейную однородную систему для определения коэффициентов  $\alpha_m, \beta_n$ :

$$\sum_m \left\{ \left[ ik \sin \alpha \frac{C_{mn}}{J_n} + \cos \alpha D_{mn} \right] \alpha_m + [ikG \cos \alpha H_{nm} + (\lambda - \mu_n) \delta_{mn}] \beta_m \right\} = 0$$

$$\sum_m \{ [ikG \cos \alpha B_{lm} - (\lambda - \nu_m) \delta_{lm}] \alpha_m + ikG C_{lm} \beta_m \} = 0 \quad (3.3)$$

Здесь

$$C_{mn} = \int_{-1}^1 \theta_m \varphi_n dx, \quad D_{mn} = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 \theta_m' \varphi_n dx, \quad H_{nm} = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 \varphi_n H \varphi_m dx$$

$$B_{lm} = \int_{-1}^1 \theta_l f_0 \theta_m dx, \quad J_n = \int_{-1}^1 \varphi_n \Delta \varphi_n dx$$

Явные выражения базисных функций, а также значения матричных элементов приведены ранее [3, 4].

Условие разрешимости однородной системы (3.3) дает характеристическое соотношение, из которого определяются декременты  $\lambda$  — собственные числа краевой задачи (2.6) — (2.8). В разложениях (3.2) удерживалось по 8—12 членов. Таким образом, для нахождения декрементов  $\lambda$  требовалось диагонализировать матрицы от 16-го до 24-го порядка. Диагонализация проводилась на ЭВМ ортогонально-степенным методом [6].

§ 4. Спектр декрементов. Монотонная неустойчивость. Характеристические декременты возмущений  $\lambda$  зависят от параметров задачи — чисел Грассхофа  $G$  и Прандтля  $P$ , волнового числа возмущений  $k$  и угла наклона слоя к вертикали  $\alpha$ .

На фиг. 2 приведены нижние уровни спектра декрементов в зависимости от параметра  $\kappa = \sqrt{kG}$  при фиксированных значениях  $k = 1, P = 1$  и для разных ориентаций слоя. Сплошными линиями изображены вещественные уровни «изотермических» возмущений; пунктирные линии относятся к «неизотермическим» возмущениям (относительно классификации уровней см. [3]). Штрих-пунктирные линии изображают вещественную часть комплексно-сопряженной пары уровней.

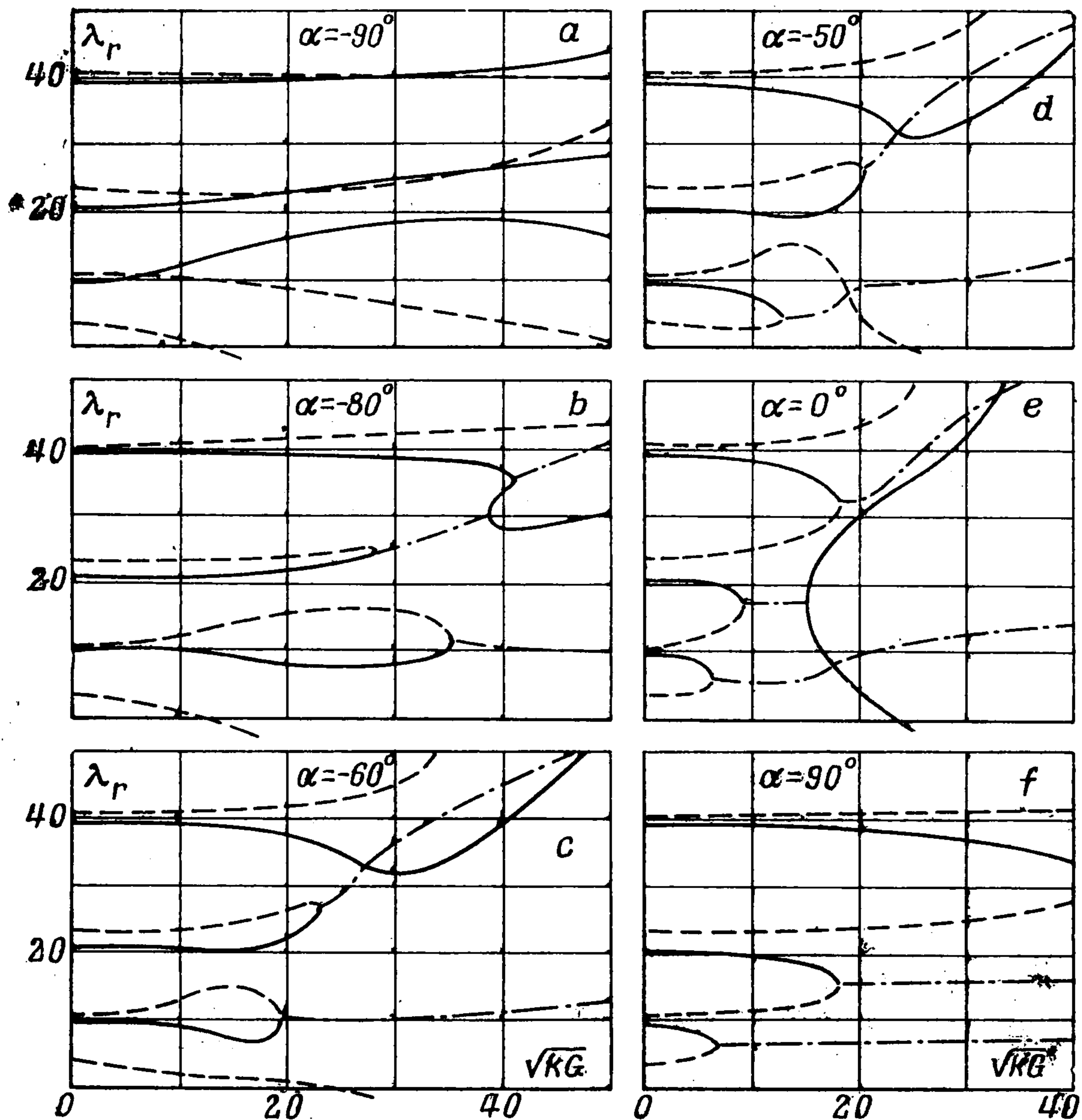
На фиг. 2, а изображен спектр декрементов для горизонтального слоя, подогреваемого снизу ( $\alpha = -90^\circ$ ; задача Рэля). В этом предельном случае все декременты вещественны (монотонные возмущения) и возможны лишь простые пересечения уровней. Некоторые из декрементов с ростом параметра  $\kappa$  становятся отрицательными, давая начало монотонной неустойчивости. Точки пересечения линий декрементов с осью  $\kappa$  дают возрастающую последовательность критических чисел Рэля, определяющих спектр неустойчивости равновесия жидкости по отношению к возникновению конвекции<sup>1</sup>.

При отклонении ориентации слоя от горизонтальной структура спектра изменяется (фиг. 2, б и последующие). При сколь угодно малом наклоне к горизонтали простые пересечения исчезают. Возникают слияния вещественных уровней в комплексно-сопряженные пары (колебательные возмущения), иногда с последующим расщеплением (при увеличении  $\kappa$ ) вновь на два вещественных уровня. Изменение структуры спектра

<sup>1</sup> Заметим, что критические значения чисел Грассхофа для нижних четырех уровней неустойчивости с точностью до десятых долей процента совпадают со значениями, полученными в работе [7] из точного характеристического соотношения для рэлеевского спектра.

связано с тем обстоятельством, что при наклонной ориентации слоя развитие возмущений происходит на фоне стационарного конвективного движения, а не в неподвижной жидкости, как в предельном релеевском случае ( $\alpha = -90^\circ$ ).

С точки зрения устойчивости наибольший интерес представляет нижний вещественный уровень, пересекающий ось  $k$ . Как видно из фиг. 2, по мере изменения наклона положение критической точки меняется. Кроме того, в результате «перепле-



Фиг. 2

ний» уровней спектра происходит смена мод, ответственных за возникновение монотонной неустойчивости. Так, при  $\alpha = -90^\circ$  неустойчивость обусловлена нижним тепловым уровнем  $v_0$ ; при  $\alpha = -50^\circ$  неустойчивость порождается уровнем  $v_1$ , а при  $\alpha = 0^\circ$  критическую точку дает «смесь» теплового и изотермического уровней  $v_1$  и  $\mu_1$ .

Критическое число Грассхофа  $G^*$  зависит от параметров  $k$ ,  $P$ ,  $\alpha$ . При фиксированных  $P$  и  $\alpha$  функция  $G^*(k)$  определяет нейтральную кривую. Эта нейтральная кривая имеет минимум в точке  $k_m$ . Соответствующее минимальное критическое значение числа Грассхофа  $G_m^*$  определяет границу монотонной неустойчивости при данных  $P$  и  $\alpha$ .

На фиг. 3 приведена зависимость  $G_m^*$  от  $\alpha$  для нескольких значений числа Прандтля, полученная путем обработки спектров и нейтральных кривых. Можно выделить две области значений угла наклона  $\alpha$ . При ориентациях слоя, близких к горизонтальной ( $-90^\circ < \alpha < -50^\circ$ ), критические числа  $G_m^*$  существенно зависят от числа Прандтля. Произведение же  $G_m^* P$  практически постоянно. Таким образом, в этой области углов наклона граница устойчивости определяется критическим значением числа Рэлея,  $R = GP$ , что, как известно, характерно для тепловой неустойчивости равнове-

сия. В самом деле, в этой области углов кризис стационарного режима обусловлен конвективной неустойчивостью рэлеевского типа, возникающей при подогреве жидкости снизу. При  $\alpha = -90^\circ$  имеет место явление порога конвекции в чистом виде. В области же углов, близких к  $-90^\circ$ , неустойчивость, очевидно, также имеет рэлеевскую природу с той лишь разницей, что теперь эта неустойчивость развивается на фоне медленного конвективного движения, обусловленного слабым горизонтальным градиентом температуры.

В области углов  $\alpha > -50^\circ$  картина иная. Тепловой механизм неустойчивости в этой области не является основным, а при  $\alpha > 0^\circ$  и вовсе отсутствует, так как при таких ориентациях слоя нагретая плоскость расположена сверху, что соответствует устойчивому распределению температуры. Кризис стационарного режима в этих условиях имеет гидродинамическую природу и возникает в результате гидродинамической неустойчивости встречных конвективных потоков. Определяющим параметром теперь является число Грассхофа  $G$ , практически не зависящее от числа Прандтля. Предельный случай  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  соответствует горизонтальному слою, подогреваемому сверху. Как известно, равновесие жидкости, подогреваемой сверху, устойчиво, и поэтому  $G^* \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ .

Критическое значение волнового числа  $k_m$ , соответствующее минимуму на нейтральной кривой, практически не зависит от  $P$  и слабо зависит от  $\alpha$ . При изменении угла наклона  $\alpha$  от  $-90^\circ$  до  $+60^\circ$  волновое число  $k_m$  монотонно падает от значения 1.56 до 1.30.

Подчеркнем, что переход от конвективного механизма неустойчивости к гидродинамическому при увеличении угла наклона  $\alpha$  от  $-90^\circ$  происходит без скачка — в результате непрерывного изменения одной ветви неустойчивости.

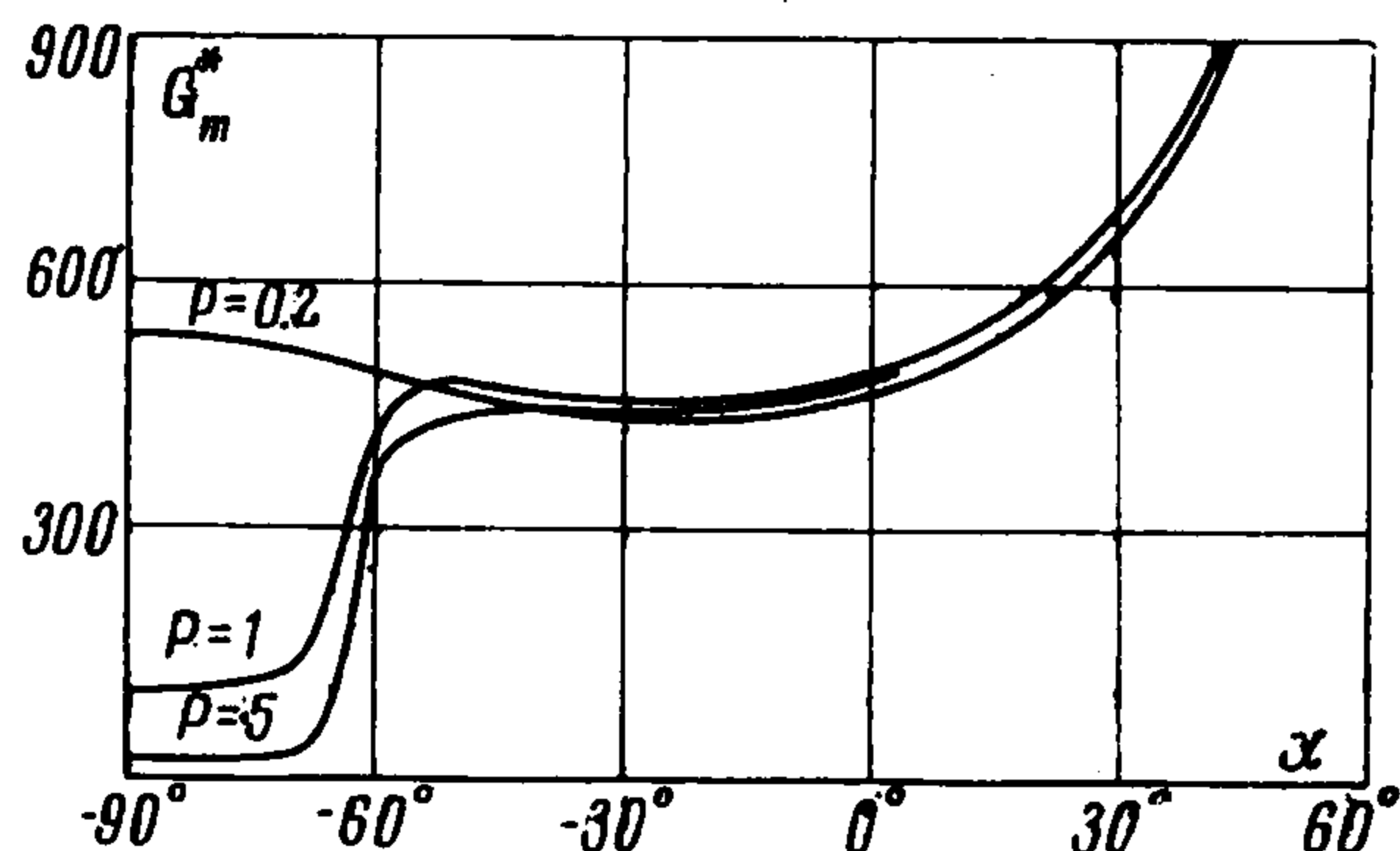
§ 5. Коротковолновые возмущения. Колебательная неустойчивость. В подогреваемом снизу плоском горизонтальном слое жидкости коротковолновые возмущения приводят к неустойчивости равновесия при достаточно больших значениях разности температур. На нейтральной кривой устойчивости  $R(k)$  при больших значениях волнового числа  $k$  критические числа Рэля монотонно растут [8] следуя  $R^* \sim k^4$ .

При вертикальной же ориентации слоя, подогреваемого сбоку, стационарное движение устойчиво по отношению к возмущениям с большими волновыми числами: нейтральная кривая  $G^*(k)$  имеет асимптоту при  $k = k_0$ . Предельное значение  $k_0$  почти не зависит от  $P$  и близко к  $k_0 \approx 2$  (см. работы [2-4]). Все коротковолновые возмущения с  $k > k_0$  затухают.

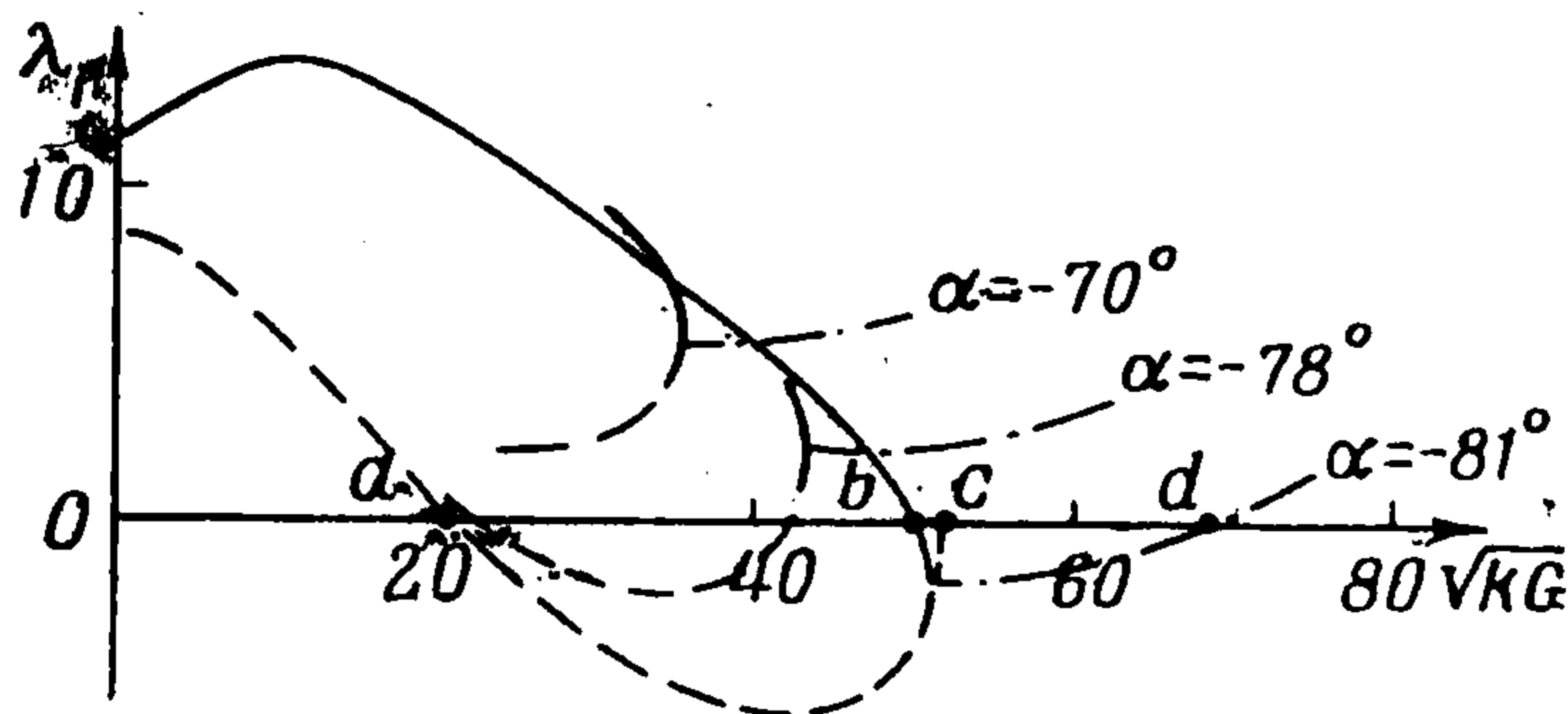
При вертикальной же ориентации слоя, подогреваемого сбоку, стационарное движение устойчиво по отношению к возмущениям с большими волновыми числами: нейтральная кривая  $G^*(k)$  имеет асимптоту при  $k = k_0$ . Предельное значение  $k_0$  почти не зависит от  $P$  и близко к  $k_0 \approx 2$  (см. работы [2-4]). Все коротковолновые возмущения с  $k > k_0$  затухают.

Возникает вопрос о поведении коротковолновых возмущений с волновыми числами  $k > k_0$  в переходной области углов. Ответ на этот вопрос может быть получен из рассмотрения фиг. 4, где приведены два нижних уровня спектра декрементов для  $P = 1$  и для волнового числа  $k = 2.5 > k_0$ .

Оба нижних уровня при  $\alpha = -81^\circ$ , например, пересекают ось  $k$  в точках  $a$  и  $b$ . В точке  $c$  происходит слияние вещественных уровней с образованием комплексно-сопряженной пары декрементов, общая вещественная часть которых отрицательна в области  $(cd)$  и положительна правее точки  $d$ . Таким образом, оба рассматриваемых возму-

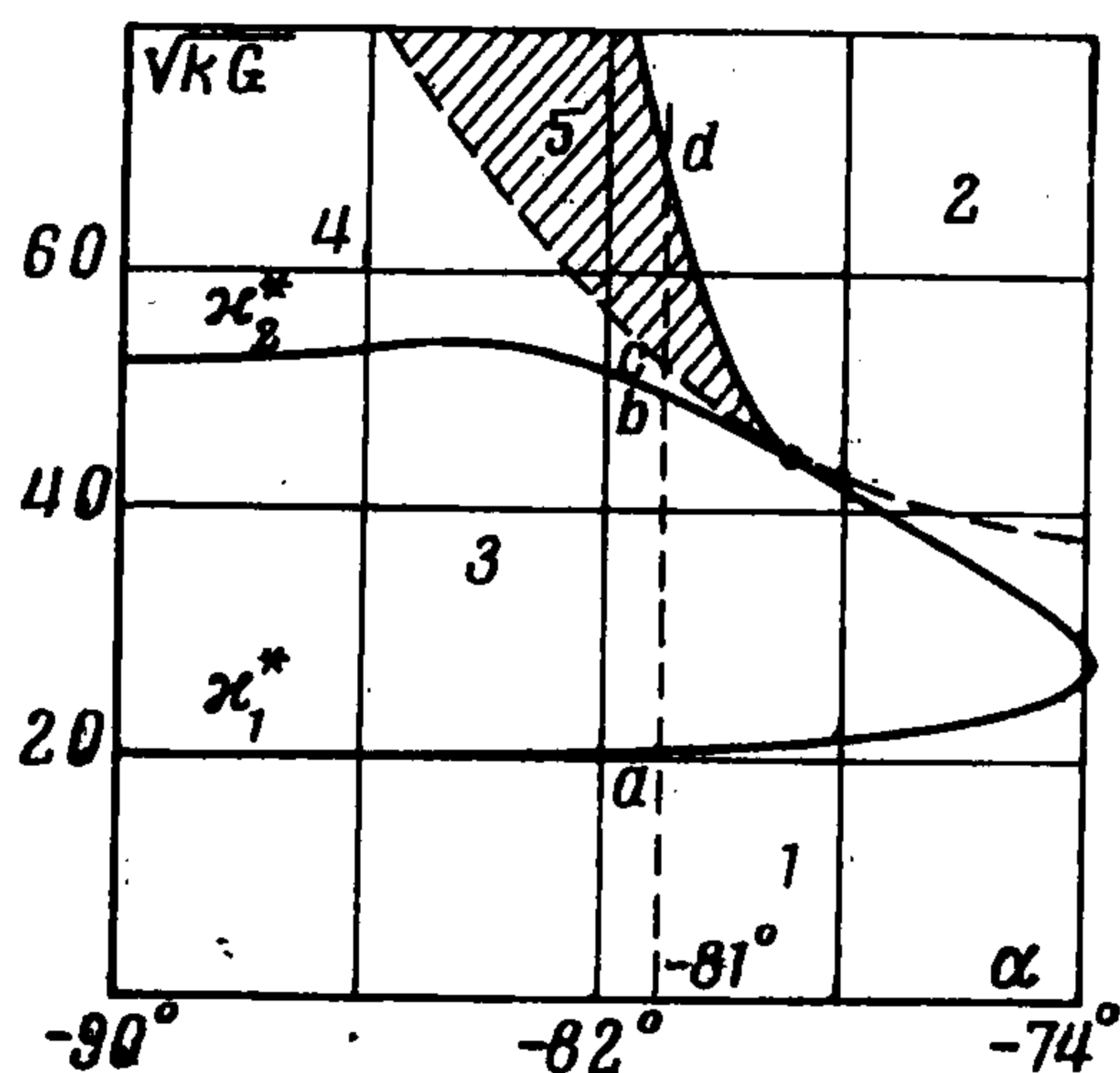


Фиг. 3

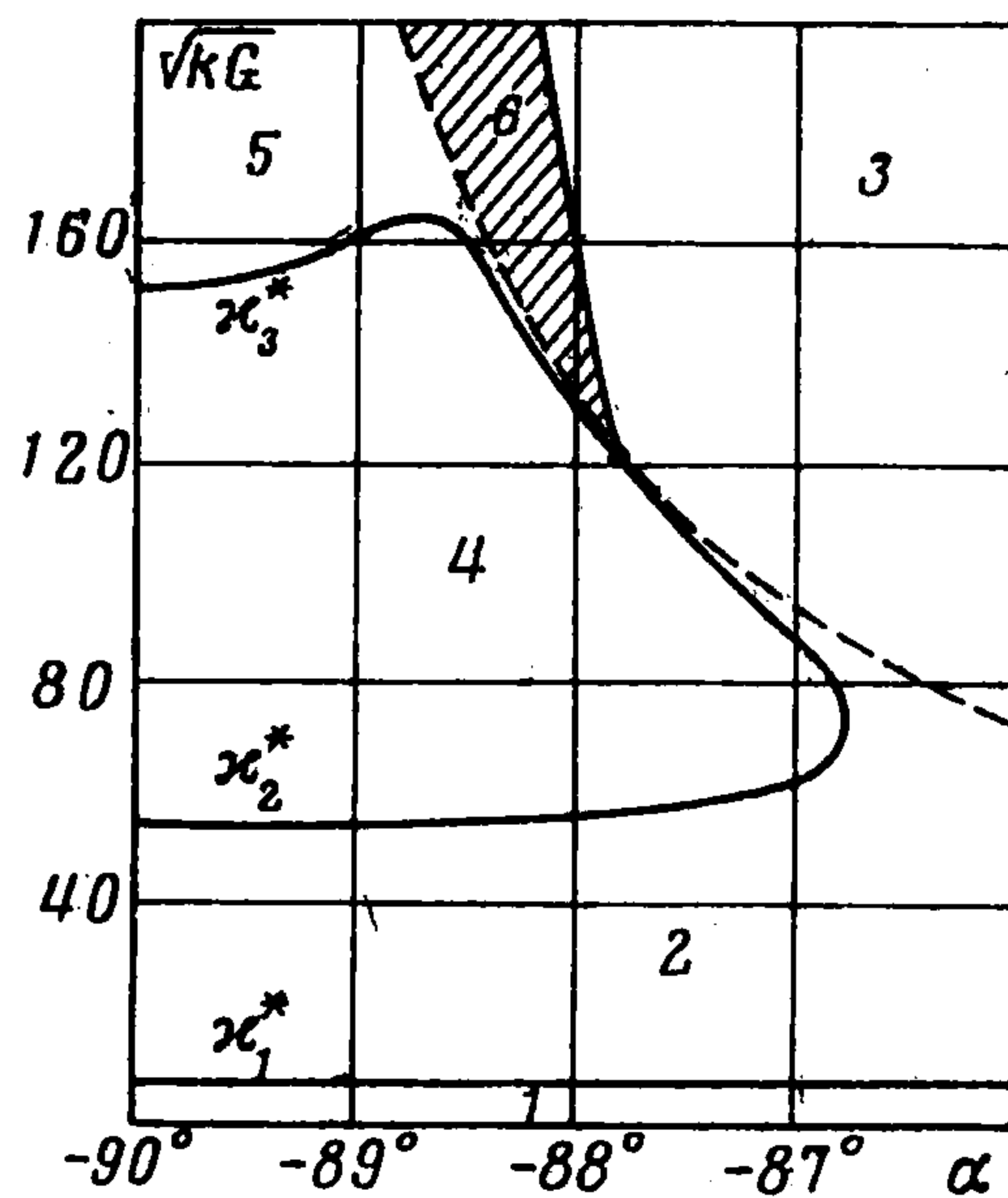


Фиг. 4

щения монотонно затухают в области левее точки  $a$ . В интервале  $(ab)$  имеет место монотонная неустойчивость по отношению к одному из возмущений. В интервале  $(bc)$  оба возмущения монотонно нарастают. Интервал  $(cd)$  — область существования колебательной неустойчивости: оба возмущения, осциллируя, нарастают. Правее точки  $d$  — область устойчивости (затухающие колебательные возмущения). Для сравнения на фиг. 4 приведены линии двух нижних декрементов для  $\alpha = -78^\circ$  и  $\alpha = -70^\circ$ , дающие представление о деформации спектра при изменении угла наклона.



Фиг. 5



Фиг. 6

Карта устойчивости на плоскости  $(\sqrt{kG}, \alpha)$  для фиксированных значений  $P = 1$  и  $k = 2.5$  приведена на фиг. 5. На разрезе  $\alpha = -90^\circ$  получают два нижних критических числа рэлеевского спектра неустойчивости. Для наглядности вертикальной пунктирной линией обозначен обсужденный выше разрез  $\alpha = -81^\circ$ . Цифрами на карте обозначены: 1 — область устойчивости (оба возмущения монотонно затухают); 2 — область устойчивости (оба возмущения затухают, осциллируя); 3 — область монотонной неустойчивости для  $v_0$ -возмущения; 4 — область монотонной неустойчивости для обоих возмущений; 5 — область колебательной неустойчивости (на фигуре заштрихована).

Таким образом, неустойчивость по отношению к коротковолновым возмущениям имеет место лишь при положениях слоя, близких к горизонтальному, соответствующему подогреву снизу. При наклоне слоя к горизонтали коротковолновая неустойчивость исчезает, как показывают расчеты, тем быстрее, чем выше  $k$ . Для  $k = 2.5$  возмущения затухают, если наклон слоя к горизонтали больше  $15^\circ$ .

Любопытно, что в определенной области параметров существует колебательная неустойчивость по отношению к коротковолновым возмущениям, — факт, не имеющий места в предельных случаях горизонтальной и вертикальной ориентации слоя.

§ 6. Верхние уровни спектра неустойчивости. В заключение рассмотрим вопрос о поведении верхних уровней неустойчивости при изменении угла наклона слоя. Как известно, в случае горизонтальной ориентации слоя, подогреваемого снизу, при любом значении волнового числа существует бесконечная последовательность возрастающих критических значений числа Грассхофа. Нижнее из этих критических чисел, как показано выше, при изменении угла наклона  $\alpha$  непрерывно переходит в критическое число, определяющее границу устойчивости стационарного конвективного движения. Поскольку в случае вертикальной ориентации слоя имеется только одно критическое число единственный уровень неустойчивости, см. [4]), возникает, естественно, вопрос о судьбе других уровней рэлеевского спектра неустойчивости при изменении ориентации слоя.

Для выяснения этого вопроса были проведены расчеты декрементов, дающих при  $\alpha = -90^\circ$  второй и третий уровни спектра рэлеевской неустойчивости. Оказалось, что

при отклонении слоя от горизонтальной ориентации происходит «замыкание» верхних уровней неустойчивости, вполне аналогичное описанному в § 5.

На фиг. 6 приведена карта устойчивости, иллюстрирующая поведение нижних трех мод спектра (для  $P = 1$  и  $k = 1$ ). Цифрами обозначены области: 1 — область устойчивости, монотонное затухание всех трех возмущений; 2 — монотонное нарастание первого возмущения и монотонное затухание второго и третьего возмущений; 3 — монотонное нарастание первого возмущения, второе и третье возмущения затухают, осциллируя; 4 — монотонное нарастание первого и второго возмущений и монотонное затухание третьего возмущения; 5 — область монотонной неустойчивости по отношению ко всем трем возмущениям; 6 — область колебательной неустойчивости для второго и третьего возмущений.

Таким образом, уже при небольшом отклонении слоя от горизонтального положения наступает вырождение рэлеевского спектра с сохранением лишь одного (нижнего) уровня монотонной неустойчивости.

Поступила 29 X 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости, Ж. техн. физ., 1953, т. 23, вып. 10.
2. Гершуни Г. З., Жуковецкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. вузов. Физика, 1958, № 4.
3. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
5. Гершуни Г. З. К вопросу об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 2.
6. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
7. S a t t o n I. Natural convection in horizontal liquid layers. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 12.
8. C h a n d r a s e c h a r S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.