

ПРОЦЕССЫ УСТАНОВЛЕНИЯ ШЕСТИГРАННЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ЯЧЕЕК

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

При некоторых ограничениях на параметры рассмотрено развитие конвективной неустойчивости в горизонтальном слое жидкости, приводящее к установлению шестигранных ячеек. Исследована устойчивость стационарных конвективных движений.

Известно, что в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, могут возникать шестигранные конвективные ячейки [1]. Теоретические исследования показали, что шестигранная форма ячеек не является единственной возможной [2-9]. В последние годы было найдено [5-8], что устойчивость конвекции с шестигранными ячейками связана с эффектами, не учитываемыми при обычном описании конвекции [2-4, 9-11] (в котором коэффициенты переноса не зависят от температуры, а сжимаемость учитывается лишь в уравнении движения введением коэффициента объемного расширения). Несмотря на прогресс в понимании причин возникновения шестигранных ячеек, остается неясным, как процессы взаимодействия большого числа нарастающих возмущений приводят к установлению периодической шестигранной структуры. Эти процессы рассматриваются ниже.

1. У нагреваемого снизу слоя жидкости имеется равновесное состояние, в котором жидкость неподвижна, а температура, плотность и другие гидродинамические переменные зависят только от вертикальной координаты z . Это состояние может быть неустойчиво. Отклонение X гидродинамических величин от равновесных значений описывается уравнениями [12]

$$X = \sum_k Y e^{ikr} \quad Y = QZ + \sum Z_2(k_1, k_2) Q(k_1) Q(k_2) + \dots \quad (1.1)$$

$$dQ/dt = \gamma Q + \sum H_2(k_1, k_2) Q(k_1) Q(k_2) + \\ + \sum H_3(k_1, k_2, k_3) Q(k_1) Q(k_2) Q(k_3) + \dots, \quad Q(t=0) = \varepsilon A(k) \quad (1.2)$$

Здесь k, r — двумерные горизонтальные векторы. В суммах порядка n по амплитуде Q участвуют волновые векторы k_1, \dots, k_n , удовлетворяющие условию $k_1 + \dots + k_n = k$.

Толщина слоя жидкости считается малой по сравнению с его горизонтальными размерами l , поэтому ограниченность слоя в горизонтальном направлении учитывается лишь тем, что компоненты волнового вектора k принимают дискретные значения $2\pi n/l$ ($n = 0, \pm 1, \dots$). Все функции волновых чисел симметричны по k и становятся комплексно-сопряженными при изменении знаков k . Коэффициенты γ, H зависят от параметров λ , а коэффициенты Z , кроме того, от вертикальной координаты. Амплитуда начального возмущения ε считается достаточно малой.

Простой конкретный пример вычисления величин H , Z приведен в приложении. Более сложные примеры (но с ограничениями на значения волновых векторов) даны в [5-9]. Во всех этих примерах величины γ , H оказываются вещественными, поэтому в дальнейшем это и будет предполагаться относительно свойств системы. Ниже будет показано, что для такой системы уравнение (1.2) имеет большое число стационарных, не зависящих от времени решений. Каждое такое решение описывает некоторое конвективное движение.

В силу вращательной симметрии задачи, инкремент нарастающих возмущений $\gamma = \gamma(|k|)$. При критическом значении параметра λ_* инкремент $\gamma = 0$ только для возмущений, у которых $|k| = k_*$. Волновые векторы таких возмущений различаются только полярным углом φ

$$\varphi = 2/3\pi n / N \quad (n = 0, 1, \dots, 6N, 6N \approx k_* l)$$

В дальнейшем считается, что число возмущений $6N \gg 1$.

Пусть надкритичность столь мала, что инкременты γ возмущений с $|k| = k_*$ много меньше декрементов возмущений, у которых $|k| \neq k_*$:

$$|\gamma| \ll (2\pi/l)^2 |\gamma''(k_*, l_*)| \quad (1.3)$$

Тогда (1.2) можно свести к уравнению для амплитуды нарастающих возмущений (волновые векторы которых различаются только полярными углами φ), а амплитуды возмущений с $|k| \neq k_*$ функционально выразить через амплитуды нарастающих возмущений

$$Q(k_1 + k_2) = \frac{2H_2(k_1, k_2) Q(k_1) Q(k_2)}{2\gamma - \gamma(k_1 + k_2)} \quad (0 < |k_1 + k_2| \neq k_*) \quad (1.4)$$

$$Q(0) = \frac{2}{2\gamma - \gamma(0)} \sum_k H_2(k, -k) q(k)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \gamma Q + a\bar{Q}_+\bar{Q}_- - Q \sum_{\varphi'} b(\varphi, \varphi') q(\varphi') \quad (1.5)$$

$$Q(\varphi + \pi) = \bar{Q}(\varphi), \quad q = Q\bar{Q}, \quad a = 2H_2(k_+, k_-)$$

$$b = -6H_3(k', -k', k) - \frac{4H_2(k, 0)H_2(k', -k')}{2\gamma - \gamma(0)} - \frac{4H_2(k', k - k')H_2(k, -k')}{2\gamma - \gamma(k - k')}$$

Здесь и в дальнейшем используется сокращение $f_{\pm}(\varphi) = f(\varphi \pm 2/3\pi)$, а суммы берутся по всем углам $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В правых частях равенств (1.4), (1.5) модули всех волновых векторов равны k_* ; последний член в коэффициенте b следует опустить при $\varphi' = \varphi, \varphi \pm 1/3\pi$.

В системе нет выделенных направлений, поэтому a не зависит от φ , а $b = b(\varphi - \varphi')$. Кроме того, коэффициент b удовлетворяет соотношениям

$$b(\psi) = b(-\psi) = b(\pi \pm \psi) \quad (1.6)$$

В самом деле, каждое слагаемое

$$b(\varphi - \varphi') Q(\varphi) q(\varphi') \quad (1.7)$$

описывает взаимодействие трех возмущений с равными по модулю волновыми векторами, сумма которых равна данному. Такие три вектора вполне

характеризуются острым углом ψ между данным вектором и прямой, на которой лежат два других вектора.

Этот угол одинаков для $\varphi - \varphi' = \pm \psi = \pi \pm \psi$, поэтому соответствующие слагаемые (1.7) должны совпадать при $Q(\varphi) = \text{const}$.

Конвекция с шестигранными ячейками описывается стационарными решениями (1.5), в которых шесть симметрично расположенных возмущений имеют равные по модулю амплитуды, а амплитуды остальных возмущений равны нулю. При

$$a > 0, \quad B_0 = \sum_{i=1}^6 b(1/3\pi i) > 0$$

одно из таких решений есть

$$Q(1/3\pi i) = 1/2(a + \sqrt{a^2 + 4\gamma B_0}) / B_0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (1.8)$$

Чтобы стационарные амплитуды были малы, необходимо считать γ , a малыми величинами (отношение их может быть произвольным).

Инкремент γ мал вблизи границы устойчивости. В лабораторных условиях величина a также мала [⁵⁻⁸], так как $H_2 \neq 0$ лишь при учете малых эффектов (сжимаемости и зависимости коэффициентов переноса от температуры), пренебрегаемых при обычном описании конвекции [^{2-4, 9-11}]. Так как H_2 мало, то в (1.5) можно принять $b = -6H_3$.

В процессе установления ячейистой конвекции можно выделить две стадии. В первой стадии кубичный член в (1.5) мал из-за малости начальной амплитуды ε . Квадратичный член описывает взаимодействие только шести симметрично расположенных возмущений. Амплитуды каждой шестерки обращаются в бесконечность за конечное время; это время определяется амплитудой и формой начального возмущения (1.2) (в котором $|k| = k_*$). В результате этого взаимодействия на функции $q(\varphi)$ появляются шесть пиков; их расположение определяется формой $A(\varphi)$.

Во второй стадии существен кубичный член; при $b > 0$ он ограничивает рост возмущений, оставляя из каждого пика только возмущение с максимальной амплитудой.

2. В переменных

$$Q = Re^{\gamma t}, \quad T = \gamma^{-1}(e^{\gamma t} - 1) \quad (2.1)$$

задача (1.5), (1.2) имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = \alpha \bar{R}_+ \bar{R}_- - (1 + \gamma T) R \sum_{\varphi'} b(\varphi - \varphi') r(\varphi') \quad (r = R\bar{R}, R_0 = \varepsilon A(\varphi)) \quad (2.2)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ кубичным членом в (2.2) можно пренебречь для достаточно малых T ; получающаяся задача решается точно. Для величин

$$\begin{aligned} \bar{D} &= a(RR_+R_-), \quad E = 1/2(D - \bar{D}), \quad F = 1/2(D + \bar{D}), \quad S = 1/3(r + r_+ + r_-), \\ P &= 1/3(rr_+ + r_+r_- + r_-r) \end{aligned} \quad (2.3)$$

нетрудно получить из (1.5) уравнения (штрих означает производную по T)

$$\begin{aligned} \bar{R}R' &= D, \quad D' = 3a^2P, \quad E = 1/2rd \ln(R/\bar{R})/dT = E_0 \\ r - r_0 &= S - S_0, \quad S' = 2F, \quad F' = 3a^2P, \quad P' = 4SF \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь индекс нуль означает, что соответствующая величина берется при $T = 0$. Уравнения (2.4) имеют интегралы

$$\theta = \arg R = 1/2 \ln \frac{R}{\bar{R}} = \theta_0 + E_0 \int_0^T \frac{d\tau}{r(\tau)}$$

$$S^2 - P = (S^2 - P)_0 = S_*^2$$

Таким образом, система (2.4) сводится к уравнениям

$$S' = 2F, \quad F' = 3a^2(S^2 - S_*^2) \quad (2.5)$$

Фазовая плоскость системы (2.5) представлена на фиг. 1. Направление движения показано стрелками. Фазовые кривые симметричны относительно оси S .

Интеграл системы (2.5) удобно записать в виде

$$F^2(S, S_m) = a^2(S - S_m)(S^2 + SS_m + S_m^2 - 3S_*^2)$$

$$F_0 = F(S_0, S_m), \quad F_* = F(S_0, S_*) \quad (2.6)$$

Очевидно, что при любых T величины S, r неотрицательны. Это означает, что (фиг. 1) при любых начальных условиях

$$F_*^2 - F_0^2 \geq 0, \quad \min(r, r_+, r_-)_0 + S_m - S_0 \geq 0$$

Один из способов непосредственного доказательства этих неравенств указан в приложении.

Решение (2.5), (2.6) выражается через функцию

$$J(S) = \int_{S_m}^S \frac{dS}{\sqrt{(S - S_m)(S^2 + SS_m + S_m^2 - 3S_*^2)}} \quad (2.7)$$

При $S \geq S_0$ оно имеет вид

$$J(S) \mp J(S_0) = 2|a|T \quad (2.8)$$

где верхний знак берется при $F_0 > 0$, а нижний — при $F_0 < 0$.

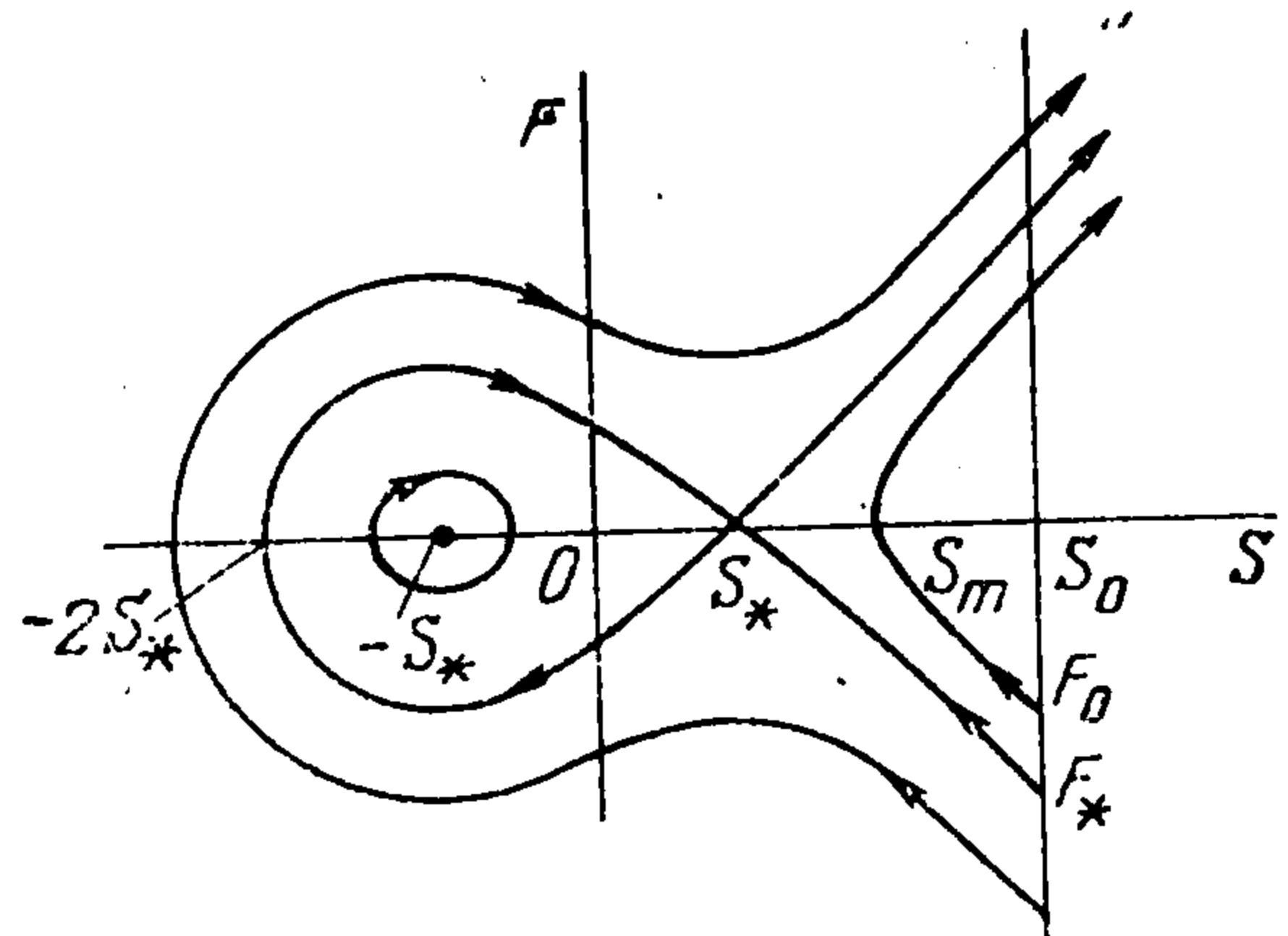
За время $T_\infty = T(S = \infty) \sim 1/|ae|$ величина S обращается в бесконечность. При малых $T_\infty - T$ из (2.7), (2.8) получается

$$2|a|(T_\infty - T) = J(\infty) - J(S) = \frac{2}{\sqrt{S}} \left[1 + O\left(\frac{e^4}{S^2}\right) \right] \quad (2.9)$$

$$r = S = a^{-2}(T_\infty - T)^{-2}, \quad F = a^{-2}(T_\infty - T)^{-3}$$

Поведение амплитуды q существенно зависит от знака величины $V = 1 + \gamma T_\infty$

$$q = \begin{cases} (1 + \gamma T)^2 r (-1/\gamma) & (T \rightarrow -1/\gamma, V < 0) \\ (V/a)^2 / (T_\infty - T)^2 & (T \rightarrow T_\infty, V > 0) \\ \gamma^2 / a^2 & (T \rightarrow T_\infty, V = 0) \end{cases}$$



Введенные выше величины F , S , P , T_∞ являются периодическими функциями φ с периодом $1/3 \pi$. Пусть форма начального отклонения $A(\varphi)$ такова, что время $T_\infty(\varphi)$ в интервале $0 \leq \varphi < 1/3 \pi$ достигает минимального значения T_* в единственной точке φ_* ; тогда при малых $T_* - T$ функция $r(\varphi)$ имеет шесть острых максимумов в точках $\varphi = \varphi_* + 1/3 \pi i$ ($i = 0, \dots, 5$).

Такие максимумы будут и у амплитуды $q(\varphi)$, если $V_* = 1 + \gamma T_* > 0$ (в случае $V_* < 0$ все возмущения исчезают при больших t).

3. При некоторых условиях (определяемых в этом разделе) существует характерное время T_0 , при котором у функции $q(\varphi)$ уже образовались острые пики, а кубичный член в (2.2) еще мал.

Ширина пиков Δ определяется равенством

$$6r_*\Delta = \frac{\pi}{3N} \Sigma r \approx \int_0^{2\pi} r(\varphi) d\varphi, \quad r_* = r(\varphi_*) \quad (3.1)$$

При $T \rightarrow T_*$ из (3.1), (2.9) получается

$$\Delta = 1/6 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{T_* - T}{T_\infty - T} \right)^2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \left(1 + \frac{1/2 \varphi^2 T_*''}{T_* - T} \right)^{-2} = \pi \left(\frac{T_* - T}{2T_*''} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Пики являются острыми при $\Delta \ll 2\pi$. Для оценки кубического члена в (2.2) используется равенство

$$\sum_{\varphi'} b(\varphi - \varphi') r(\varphi') = B(\varphi) r_* \Delta = 1/6 B(\varphi) \Sigma r, \quad B(\varphi) = \sum_{i=1}^6 b(1/3 \pi i + \varphi - \varphi_*)$$

выполняющееся тем лучше, чем уже ширина пиков Δ . Кубический член ограничивает рост возмущений, если $B(\varphi) > 0$. С учетом этого члена из (2.2), (3.3) можно получить

$$r' = 2F - 2(1 + \gamma T) r r_* B(\varphi) \Delta \quad (3.4)$$

Отсюда и из (2.9) следует, что при $\varphi = \varphi_*$ кубический член мал по сравнению с производной, когда

$$\Delta(T) \gg V_* B_* / (a^2 T_*''), \quad B_* = B(\varphi_*) \quad (3.5)$$

Упомянувшееся выше характерное время T_0 существует, если

$$V_* B_* / (a^2 T_*'') \ll \Delta(T_0) \ll 1 \quad (3.6)$$

При $\gamma > 0$ и $T_*'' \sim T_* \sim 1 / |a\varepsilon|$ неравенства (3.6) могут выполняться, когда каждая из величин

$$B_* \varepsilon / |a|, \quad \gamma B_* / a^2$$

мала по сравнению с единицей; если $\gamma < 0$, то достаточно считать малой сумму этих величин.

4. Пусть неравенства (3.6) выполнены; тогда при $t \geq t_0 = \ln(1 + \gamma T_0) / \gamma$ уравнение (1.5) с учетом (3.3) принимает вид

$$dQ / dt = \Gamma Q + a\bar{Q}_+\bar{Q}_-, \quad \Gamma = \gamma - 1/6 B(\varphi) \Sigma q \quad (4.1)$$

Решение (4.1) выражается через функции

$$U = \exp \int_{t_0}^t \Gamma(t, \varphi) dt, \quad \tau = T_0 + \int_{t_0}^t U dt \quad (4.2)$$

являющиеся решением задачи

$$dU / dt = U\Gamma, \quad d\tau / dt = U, \quad U(t_0) = 1, \quad \tau(t_0) = T_0 \quad (4.3)$$

Из (4.1), (4.2) следует, что $R = Q / U$ удовлетворяет уравнению $dR / d\tau = a\bar{R}_+\bar{R}_-$, решение которого рассмотрено в п. 3. Согласно (2.9), при $\varphi \approx \varphi_*$

$$FU^3 = y^3 / a^2, \quad q = U^2 r = y^2 / a^2, \quad y = U / (T_\infty - \tau) \quad (4.4)$$

Из (4.3) получается \cdot (4.5)

$$dy / dt = y\Gamma + y^2, \quad y(t_0) = 1 / (T_\infty - T_0), \quad \Gamma = \gamma - 1/6 B(\varphi) W_2 / a^2, \quad W_m = \Sigma y^m$$

Амплитуду Q нетрудно найти, если известна величина $W_2(t)$. Для ее определения умножим уравнение (4.5) на my^{m-1} и просуммируем по всем углам φ :

$$dW_m / dt = m(\Gamma_* W_m + W_{m+1}) \quad (m = 2, \dots, M-1) \quad (4.6)$$

Здесь использовано соотношение

$$\Sigma \Gamma y^m = \Gamma_* W_m \quad (4.7)$$

выполняющееся по крайней мере для малых $t - t_0$, когда пики на функции y достаточно остры. При любом M число уравнений (4.6) на единицу меньше числа неизвестных. Система (4.6) вместе с уравнением (4.5) для $\varphi = \varphi_*$ становится замкнутой, если взять M достаточно большим и принять $W_M = y_*^M$.

Уравнения (4.6) и начальные условия к ним эквивалентны задаче (4.3), в которой B не зависит от φ и равно B_* . Решение $U_*, \tau_* \neq T$ этой задачи можно найти непосредственно. Из (4.3), (4.4) получается

$$\frac{dU_*}{dT} = \Gamma_* = \gamma - \frac{B_* U_*^2}{6a^2} \Sigma (T_\infty - T)^{-2} \quad (4.8)$$

При $\gamma = 0$ решение есть

$$\frac{1}{U_*} - 1 = \frac{B_*}{6a^2} \Sigma \left(\frac{1}{T_\infty - T} - \frac{1}{T_\infty - T_0} \right) \quad (T_0 \leq T \leq T_*)$$

Отсюда следует, что при $T \rightarrow T_*$:

$$U_* = u(T_* - T) \{1 + O[(T_* - T)^2 / (T_1 - T_*)^2]\}, \quad u = a^2 / B_*,$$

$$T_1 = \min T_\infty(\varphi_* \pm 1/3\pi / N) \quad (4.9)$$

В случае $\gamma \neq 0$ асимптотическое решение по-прежнему имеет вид (4.9), но

$$u = 1/2(1 + \sqrt{1 + 4\gamma B_*/a^2}) a^2 / B_*$$

Из (4.3), (4.4), (4.9) нетрудно получить что

$$|Q_*| \rightarrow u/|a|, \quad F_* U_*^3 \rightarrow u^3/a^2 \quad \text{при } T \rightarrow T_* \quad (4.10)$$

Из определения (2.3) следует

$$F_* U_*^3 \rightarrow a \cos(\theta + \theta_+ + \theta_-)_* (u/|a|)^3$$

Отсюда и из (4.10) вытекает

$$\cos(\theta + \theta_+ + \theta_-)_* \rightarrow a/|a| \quad (4.11)$$

Таким образом, в установившемся состоянии фазы амплитуд Q становятся частично коррелированными; их точные значения определяются начальными условиями и находятся из выражения для θ в п. 3.

Угол φ_* и три фазы θ в (4.11) определяют ориентацию шестигранников относительно исходной системы координат (в которой было задано начальное отклонение).

В горизонтальной плоскости эту систему можно повернуть и сдвинуть так, чтобы начало координат совпадало с центром одного из шестигранников, а одна из горизонтальных осей проходила через две вершины этого шестигранника. Поворот характеризуется углом φ_* , а сдвиг — тремя фазами, удовлетворяющими соотношению (4.11). Как и следовало ожидать, ориентация шестигранников определяется формой начального отклонения.

Эволюция возмущений с $\varphi \neq \varphi_*$ определяется соотношениями (4.4), (4.2), в которых $W_2(t)$ находится из (4.3), (4.8)

$$\frac{W_2}{6a^2} = \frac{\gamma - dU_*/dT}{B_*}, \quad \int_{T_0}^T \frac{dT}{U_*(T)} = t - t_0 \quad (4.12)$$

Из (4.2), (4.12) получается

$$\frac{U(\varphi, t)}{U_*} = \exp\left(\frac{B_* - B}{6a^2} \int_{t_0}^t W_2 dt\right) = \left(\frac{\exp \gamma(t - t_0)}{U_*}\right)^{1-B/B_*}$$

Согласно (4.4), все возмущения с $\varphi \neq \varphi_*$ затухают, если

$$\tau(\varphi, \infty) = T_0 + \int_{t_0}^{\infty} U(\varphi, t) dt < T_{\infty}(\varphi) \quad (4.13)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$T_* - T \rightarrow e^{-ut}, \quad U \rightarrow u^{B/B_*} \exp(-ut [1 - (B_* - B)u/a^2])$$

Поэтому для выполнения (4.13) необходимо, чтобы при любых φ выражение в квадратных скобках было положительно; при этом (4.13) будет выполняться, если форма начального отклонения такова, что минимум T_8 в точке φ_* достаточно остр. Если условие (4.13) нарушается, то при

достаточно больших t равенства (4.7), (4.8) становятся неверными, так как на функции $q(\varphi)$ появляются дополнительные шестерки пиков с амплитудами, сравнимыми с амплитудами пиков основной шестерки. В результате система придет в стационарное состояние с несколькими шестерками отличных от нуля амплитуд. На основании (4.4) следует ожидать, что в каждой шестерке амплитуды будут равны, а $F > 0$.

5. При рассмотрении процессов установления вводились сильные ограничения (3.6) на параметры системы. Стационарное состояние может быть устойчиво при менее сильных ограничениях. Для их нахождения исследуем устойчивость симметричных стационарных решений уравнения (1.5). В таких решениях отличны от нуля только амплитуды

$$Q(\varphi_0 + i\pi/n) \quad (i = 1, \dots, 2n, n \geq 1) \quad (5.1)$$

Решения (5.1), различающиеся лишь углом φ_0 и фазами амплитуд Q , физически тождественны; поэтому в дальнейшем считается, что $\varphi_0 = 0$, а амплитуды Q вещественны. Без ограничения общности можно считать, что в (1.5) $a \geq 0$ и что стационарные амплитуды положительны (если $a < 0$, то, согласно (4.11), при $n/3$ целом отрицательными можно считать амплитуды (5.1) при $i/3$ целых). В дальнейшем рассматриваются только стационарные состояния, которые могут быть устойчивы.

При исследовании устойчивости решений (5.1) используются обозначения

$$B_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{2n} b(\varphi + i\pi/n), \quad \beta_n = B_n(0), \quad \alpha_n = B_n(2/3\pi), \quad h_n = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4\gamma\beta_n/a^2}}$$

Из (1.6) следует, что

$$B_n(\varphi) = B_n(-\varphi) = B_n(\pi/n + \varphi) = 2n \sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} \cos 2m\varphi \quad (5.2)$$

Отсюда при $n = 1$ получаются соотношения для $b = 1/2 B_1$.

Условия устойчивости существенно зависят от делимости n на три. Пусть n не делится на три; тогда в стационарном состоянии квадратичный член в (1.5) исчезает, и для стационарных амплитуд Q_0 получается

$$Q_0 = \sqrt{\gamma/\beta_n} \quad (\gamma \geq 0, \beta_n > 0) \quad (5.3)$$

Бесконечно малые возмущения $Q(\varphi)$ стационарного решения (5.1), (5.3) удовлетворяют уравнению

$$Q' = Q q_0 (\beta_n - B_n), \quad \varphi \neq i\pi/n, \quad i\pi/n + 2/3\pi \quad (5.4)$$

получающемуся линеаризацией (1.5) относительно Q . Из (5.4) определяется одно из условий устойчивости

$$\beta_n < B_n(\varphi) \quad (\varphi \neq i\pi/n, \quad i\pi/n + 2/3\pi) \quad (5.5)$$

Возмущения $Q_{\pm} = Q(i\pi/n \pm 2/3\pi)$ удовлетворяют уравнению

$$Q_{\pm}' = \gamma Q_{\pm} + \alpha Q_0 Q_{\mp} - \alpha_n Q_{\pm}$$

После сложения и вычитания этих уравнений определяются дополнительные условия устойчивости

$$\gamma - q_0 \alpha_n + a Q_0 < 0, \quad \gamma/a^2 > \beta_n / (\alpha_n - \beta_n)^2 \quad (5.6)$$

Уравнения для возмущений $Q_i = Q(i\pi/n)$ имеют вид

$$q_i' = -2q_0 \sum_{i=1}^n b_{ij} q_j \quad (1 \leq i \leq n), \quad b_{ij} = b(\pi(i-j)/n) = b_{|i-j|, n} = b_{n-|i-j|, n} \quad (5.7)$$

Из (5.7) следует, что стационарное решение устойчиво, если отрицательны все корни λ уравнения

$$D_n \equiv |\lambda \delta_{ij} + b_{ij}| = 0 \quad (5.8)$$

Каждая строка определителя (5.8) получается из предыдущей перестановкой последнего элемента на первое место (такие определители называются перестановочными). Перестановочный определитель D_n с элементами первой строки a_1, \dots, a_n равен [13]

$$f(\varepsilon) f(\varepsilon^2) \dots f(\varepsilon^n) \quad (f(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/n})$$

Для определителя (5.8)

$$f(\varepsilon^m) = \lambda + \sum_{s=1}^n b \left(\frac{s\pi}{n} \right) \cos \frac{2\pi ms}{n} \equiv \lambda + \rho(m, n) \quad (5.9)$$

Поскольку $\rho(m, n) = \rho(n - m, n)$, то условия устойчивости есть

$$\rho(m, n) > 0 \quad (0 \leq m \leq 1/2 n) \quad (5.10)$$

При больших n в разложении Фурье (5.2) можно оставить только два первых члена, а сумму в (5.9) заменить интегралом; при этом условия (5.5), (5.6), (5.10) будут

$$b_n < 0, \quad \gamma/a^2 > 2b_0/(nb_n^2); \quad b_m > 0, \quad 0 \leq m \leq 1/2 n \quad (5.11)$$

Так как первое и третье условия имеют противоположный смысл, то при любых функциях $b(\varphi)$ число устойчивых решений конечно; в частности, если $b(\varphi) > b(0)$, то, как показано в [9], условия (5.5), (5.10) выполняются лишь для решения с $n = 1$.

Второе условие (5.11) показывает, что область устойчивости уменьшается с увеличением n (поскольку коэффициенты Фурье b_n убывают быстрее, чем $1/n$).

Для стационарных решений (5.1) с номером $3n$ квадратичный член в (1.5) не равен нулю и

$$Q_0 = \frac{1}{2} a / (h_n \beta_{3n}) \quad (h_n < 1, \quad \beta_{3n} > 0) \quad (5.12)$$

Уравнение для возмущений имеет вид

$$Q' = Q(\gamma - Q_0^2 B_{3n})$$

Отсюда получается одно из условий устойчивости

$$2h_n > 1 - B_{3n}/\beta_{3n} \quad (5.13)$$

Возмущения $Q_i = Q(1/3 i\pi/n)$ удовлетворяют уравнениям

$$Q_i' = aQ_0(-Q + \bar{Q}_+ + \bar{Q}_-)_i - Q_0^2 \sum_{j=1}^{6n} X_j b_{ij} \quad (1 \leq i \leq 6n) \quad (5.14)$$

$$X_i = (Q + \bar{Q})_i, \quad b_{ij} = b\left(\frac{1}{3} \pi(i-j)/n\right)$$

Из (5.14) следует:

$$X_i' = aQ_0(S_i - 2X_i) - 4Q_0^2 \sum_{j=1}^{3n} X_j b_{ij}, \quad S_i = (X + X_+ + X_-)_i \quad (5.15)$$

Отсюда для S получается

$$S_i' = aQ_0 S_i - 2Q_0^2 \sum_{j=1}^n B_{ij} S_j \quad (i = 1, \dots, n) \quad B_{ij} = B_3(1/3 \pi(i-j)/n)$$

Решение этого уравнения затухающее, если отрицательны корни λ уравнения

$$|(\lambda - 1/2 a/Q_0) \delta_{ij} + B_{ij}| = 0 \quad (5.16)$$

Определитель (5.16) — перестановочный, поэтому дополнительные условия устойчивости получаются в виде

$$h_n < \frac{\sigma(m, n)}{\beta_{3n}} \quad \left(1 \leq m \leq \frac{1}{2}n\right), \quad \sigma(m, n) = \sum_{s=1}^n B_3 \left(\frac{s\pi}{3n}\right) \cos \frac{2\pi ms}{n} \quad (5.17)$$

Если эти условия выполнены, то в (5.15) $S \rightarrow 0$ при больших t ; величины X затухают, если отрицательные корни λ уравнения

$$|(\lambda \mp 1/2a / Q_0) \delta_{ij} + b_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 3n) \quad (5.18)$$

Определитель (5.18) — перестановочный, и дополнительные условия устойчивости имеют вид

$$h_n > -\rho(m, 3n) / \beta_{3n} \quad (1 \leq m \leq 3/2n) \quad (5.19)$$

Уравнения для $Y_i = Q_i - \bar{Q}_i$ не приводят к дополнительным условиям устойчивости. Их решение

$$Y_i(t) = Y_i(0) - 1/3 [1 - \exp(-3aQ_0t)] [Y(0) + Y_+(0) + Y_-(0)]_i$$

показывает, что при $t \rightarrow \infty$ возмущения фаз не исчезают, но соотношения (4.11) выполняются для каждой шестерки.

При больших n условия (5.12), (5.13), (5.17), (5.19) выражаются через коэффициенты в (5.2)

$$\begin{aligned} \beta_{3n} = 6nb_0 > 0 \quad (0 < h_n < 1), \quad 2b_0h_n > b_{3n} + |b_{3n}| \\ 2b_0h_n < b_{3m} \quad (1 \leq m \leq 1/2n), \quad 4b_0h_n > -b_m \quad (1 \leq m \leq 3/2n) \end{aligned}$$

Из этих условий следует, что для устойчивости необходимо $b_{3m} > 0$.

Шестигранные конвективные ячейки устойчивы, если ¹ (5.20)

$$\beta_3 = 2b(0) + 4b(1/3\pi) > 0, \quad \beta_3h_3 > b(1/3\pi) - b(0), \quad 1 > h_3 > 1/2 (1 - \min B_3 / \beta_3)$$

В конкретных примерах [9] (см. также приложение) $b(\varphi) > 0$, поэтому область устойчивости на оси γ / a^2 существует.

6. В общем случае стационарные решения (1.5) несимметричны. Они состоят из m шестерок и n (не входящих в шестерки) пар положительных амплитуд, причем в каждой шестерке амплитуды равны, а углы φ_i , для которых $Q_i = Q(\varphi_i) > 0$, не пропорциональны i . Условие $Q_i > 0$ является ограничением на возможные значения φ_i .

Условия устойчивости несимметричных решений получаются аналогично соответствующим условиям симметричных решений. Например, вместо (5.5) можно найти

$$B(\varphi) = \sum_{j=1}^{6m+2n} b(\varphi - \varphi_j) q_j > B(\varphi_i)$$

где φ_i характеризуют стационарные амплитуды, входящие в n пар. Имеются также аналоги условий (5.6) и условий (5.13), получающиеся из рассмотрения возмущений $Q(\varphi \neq \varphi_i)$. В уравнениях для возмущений $Q(\varphi_i)$ матрица $|B(\varphi_i - \varphi_j)|$ является симметричной, но не перестановочной; поэтому соответствующие условия устойчивости не получаются в явном виде для любых n, m .

При рассмотрении процессов установления отмечалось, что несимметричные решения могут возникать при подходящей форме начального возмущения (когда введенная выше функция $T_\infty(\varphi)$ имеет слабый минимум). То же самое произойдет, если $\min T_\infty$ достигается в двух точках (например, при $\varphi = \varphi_* \pm 1/6\pi / N$).

¹ Кроме последнего, условия (5.20) ранее найдены в [6].

В заключение отметим, что при получении (1.5) используется ограниченность слоя жидкости в горизонтальных направлениях, однако ограничение на надкритичность (1.3) не является существенным.

В общем случае следует считать, что в правых частях (1.4), (1.5) волновые векторы по модулю равны значению $k_0(\lambda)$, для которого γ максимально. При некоторых дискретных значениях λ знаменатель в (1.4) может обращаться в нуль; в этом случае следует ожидать [12], что в системе установится движение с волновыми векторами, отличающиеся по модулю на величины $\sim 1/l$.

В предельном случае $l \rightarrow \infty$ решение системы (1.1), (1.2) можно искать в виде ряда по ε с последующим суммированием асимптотических (при больших t) значений членов ряда [12].

Приложение. Здесь приведен пример нахождения (1.1), (1.2) для простой модельной задачи [6]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\nu \cos z \right] X + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 X^2}{\partial z^3} = 0$$

$$X = \partial^2 X / \partial z^2 = \partial^4 X / \partial z^4 = 0 \quad \text{при } z = 0, \pi \quad (\text{A.1})$$

где ν — малый параметр. После подстановки (1.1) в (A1) получается

$$Y' - LY + \frac{1}{2} \Sigma (Y_1 Y_2)''' = 0, \quad Y_i = Y(k_i) \quad (\text{A.2})$$

$$L = \lambda k^2 + (\partial^2 / \partial z^2 - k^2)^3 + 2\nu \cos z \quad (k_1 + k_2 = k)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t , а штрих — по z . Граничные условия для Y такие же, как и для X .

Если в (A2) подставить (1.1), (1.2), представить результат в виде ряда по Q типа (1.1) и приравнять нулю коэффициенты в суммах по Q , то получатся уравнения для определения γ , H_n , Z_n .

Граничные условия для Z_n такие же, как и для X .

Уравнение для γ , Z имеет вид

$$\gamma Z - LZ = 0$$

Для неустойчивой ветви

$$Z = \sin z + \nu K \sin 2z + O(\nu^2) \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma = \lambda k^2 - (1 + k^2)^3 + O(\nu^2), \quad K^{-1} = (4 + k^2)^3 - (1 + k^2)^3$$

При некотором $k_0(\lambda)$ инкремент принимает максимальное значение γ_0 . При малой надкритичности $\Lambda = \lambda - 27/4$:

$$|k_0| = (1 + 1/9\Lambda) / \sqrt{2}, \quad \gamma = 1/2\Lambda - 9(|k| - k_0)^2 \quad (\text{A.4})$$

Уравнение для Z_2 имеет вид

$$(\gamma_1 + \gamma_2 - L) Z_2 = -ZH_2 + 2 \sin 2z - 1/4 \nu (K_1 + K_2) (\sin z - 27 \sin 3z) + O(\nu^2) \equiv \Psi$$

$$(k_1 + k_2 = k, \quad \gamma_i = \gamma(k_i), \quad K_i = K(k_i))$$

Решение существует при любых k , если

$$\int_0^\pi dz Z \Psi = 0$$

Отсюда и из (A.3) получается

$$H_2 = -1/4 \nu (K_1 + K_2 - 8K) + O(\nu^2), \quad k = k_1 + k_2 \quad (\text{A.5})$$

$$Z_2 = 2V \sin 2z + O(\nu), \quad V^{-1} = \gamma_1 + \gamma_2 - \lambda k^2 + (4 + k^2)^3$$

При определении Z_3 можно принять $\nu = 0$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - L) Z_3 = -\frac{1}{6} [V(k_1, k_2) + V(k_2, k_3) + V(k_3, k_1) + 6H_3] (\sin z - 27 \sin 3z) - 27 H_3 \sin 3z \quad (k_1 + k_2 + k_3 = k)$$

Для определения H_3 нужно приравнять нулю выражение в квадратных скобках. Отсюда и из (1.4), (A.3) — (A.5) с точностью до членов $\sim \nu^2$, Δ получаем

$$K = 4/351, \quad a = 3\nu K$$

$$b = \frac{1}{64} + \frac{1}{(5+c)^3 - 27/4(1+c)} + \frac{1}{(5-c)^3 - 27/4(1-c)}, \quad c = \cos(\varphi - \varphi')$$

Функция $b(c)$ — четная и удовлетворяет соотношениям (1.6). Поскольку $b > 0$, то, согласно (5.20), область устойчивости шестигранных ячеек существует.

В третьем разделе из физических соображений были установлены неочевидные неравенства. Достаточно доказать их для $F_0^2 = (rr_+r_-)_0$, $r_0 = 1$. При доказательстве первого неравенства удобно считать $0 \leq r_{\pm} \leq 1$ (во втором неравенстве удобнее принять $r_{\pm} \geq 1$).

Показывается, что симметричные функции аргументов r_{\pm} (неотрицательность которых доказывается), могут иметь экстремумы лишь на прямой $r_+ = r_-$. После этого проверяется, что на этой прямой и на границах области изменения r_{\pm} неравенства выполняются.

Поступила 22 I 1967

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. B e n a r d M. Les tourbillons cellulaires dans une nape liquide Transportant de la chaleur par convection en regime permanent. Ann. Chim. Phys., 1901, vol. 23, p. 62.
2. C h a n d r a s e k h a r S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
3. Г о р ь к о в Л. П. Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 2, стр. 402.
4. M a l k u s W., V e r o n i s G. Finite amplitude cellular convection. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pt. 3, p. 225.
5. P a l m E. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, pt. 2, p. 183.
6. S e g e l L. A., S t u a r t T. T. On the question of the preferred mode in cellular thermal convection. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, pt. 2, p. 289.
7. S e g e l L. A. The structure of non-linear cellular solution to the Boussinesq equations. T. Fluid. Mech., 1965, vol. 21, pt. 2, p. 345.
8. S e g e l L. A. The non-linear interaction of a finite number of disturbances to a laver of fluid heated from below. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt. 2, p. 359.
9. S c h l ü t e r A., L o r t z D, B u s s e F. On the stability of steady finite amplitude convection. J. Fluid. Mech., 1965, vol. 23, pt. 1, p. 129.
10. B o u s s i n e s q J. Theorie Analytique de la Chaleur Paris, Ganthier — Villars, 1903.
11. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2, М., Гостехиздат, 1954.
12. П о н о м а р е н к о Ю. Б. О возникновении пространственно-периодических движений в гидродинамике. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
13. М и ш и н а А. П., П р о с к у р я к о в И. В. Высшая алгебра. М. Физматгиз, 1962.