Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

К ПОСТРОЕНИЮ ТЕОРИИ ИЗГИБА СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНОК

М. И. Гусейн-Заде

(Москва)

Описывается построение теории изгиба тонких слоистых пластинок, составленных из слоев, имеющих значительно различные упругие свойства. Исследование проводится методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости [1–2] в узкой области, занятой пластинкой.

Полное напряженное состояние слоистой пластинки состоит из внутреннего напряженного состояния и из напряженного состояния погранслоя. Ниже исследуется внутреннее напряженное состояние.

Для слоистых пластинок, составленных из чередующихся слабых и несущих слоев с модулями упругости E_1, E_2, соответственно, дана классификация задач в зависимости от величины отношения E_1 / E_2. Показано, что в широком диапазоне изменения отношения E_1 / E_2, охватывающем почти все возможные случаи слоистых пластинок, задача о деформации пластинки под действием произвольной поверхностной нагрузки в каждом приближении сводится к привычным уравнениям: задача изгиба — к бигармоническому уравнению, а задача о деформации пластинки в ее плоскости — к уравнениям обобщенного плоского напряженного состояния некоторой анизотропной пластинки.

Асимптотический метод построения теории слоистых пластинок позволяет с единой точки зрения подойти к вопросу обоснования и установления пределов применимости тех или иных гипотез, положенных в основу различных теорий слоистых пластинок. Кроме того, этот подход дает возможность, наряду с изгибными напряжениями, определять перерезывающие напряжения и нормальные напряжения на площадках, параллельных плоскости пластинки. Если для сплошных пластинок эти напряжения играют второстепенную роль, то для пластинок, составленных из слоев с резко различными упругими свойствами, они могут быть и основными. Определение этих напряжений может иметь весьма существенное значение для решения вопроса о прочности склейки отдельных слоев.

1. Рассмотрим слоистую пластинку, составленную из чередующихся несущих и слабых слоев. Считаем, что крайние слои пластинки являются несущими слоями. Используем ортогональную систему криволинейных координат α, β, γ, ось γ которой перпендикулярна плоскости пластинки. Координатная плоскость $\alpha\beta$ может проходить или внутри какого-либо слоя (слабого или несущего) или совпадать с какой-либо плоскостью раздела слоев. Для определенности предположим, что она проходит через слабый слой. Этот слой считаем состоящим из двух слоев с одинаковыми упругими свойствами. Нумерацию слоев ведем от плоскости $\alpha\beta$, используя для слоев, расположенных под этой плоскостью, отрицательные номера. Тогда слабые слои имеют нечетные номера, а несущие — четные.

Считаем, что отдельные слои пластинки имеют различные толщины, модули упругости и коэффициенты Пуассона, но модули упругости слабых слоев близки к E_1, а модули упругости несущих слоев — к E_2.

Отношение E_1 / E_2 выразим в виде некоторой степени относительной толщины $\varepsilon = h / l$ ($2h$ — толщина пластинки, l — характерный размер рисунка деформации пластинки), т. е. положим $E_1 / E_2 = \varepsilon^a$.

Область значений a, близких к нулю, соответствующая слоистым пластинкам, составленным из слоев с близкими упругими свойствами, рассмотрена в [3]. Исследуем область значений $a > 0$. В этом случае слоистая пластинка характеризуется двумя малыми параметрами ε и $E_1 / E_2 = \varepsilon^a$.

Не нарушая общности, будем считать, что, во-первых, a принимает рациональные значения, т. е. $a = p / q$ (p, q — целые числа), и что, во-вторых, q не очень большое число. Эти предположения всегда можно выполнить, так как в выборе величин ε и E_1 / E_2 существует известный произвол.

Асимптотическое интегрирование уравнений теории упругости при таких значениях a проводим, пользуясь разложениями по параметру $\lambda = \varepsilon^{1/q}$. Переход от этого параметра к основным параметрам слоистой пластинки происходит путем возведения его в целую степень.

2. Внутреннее напряженно-деформированное состояние однородного тонкого слоя исследовалось в [4], где для смещений и напряжений получены разложения по параметру ε.

Для получения внутреннего напряженно-деформированного состояния отдельного слоя слоистой пластинки следует провести асимптотическое интегрирование уравнений Ламе, используя разложения по параметру $\lambda = \varepsilon^{1/q}$, что легко выполнить по аналогии с [4].

Пусть $u_\alpha{}^{(j)}$, $u_\beta{}^{(j)}$, $u_\gamma{}^{(j)}$ — компоненты вектора смещений в j-м слое. Введем безразмерные величины

$$v_\alpha{}^{(j)} = \frac{u_\alpha{}^{(j)}}{h}, \quad v_\beta{}^{(j)} = \frac{\bar{u}_\beta{}^{(j)}}{h}, \quad v_\gamma{}^{(j)} = \frac{u_\gamma{}^{(j)}}{h}, \quad \xi = \frac{\alpha}{l}, \quad \eta = \frac{\beta}{l}, \quad \zeta = \frac{\gamma}{h}$$

Решение системы уравнений, получаемой из уравнений Ламе для j-го слоя после перехода к безразмерным величинам, строим в виде

$$v_\alpha{}^{(j)} = \varepsilon^{\varkappa+1} \sum_{s=0} \lambda^s v_\alpha{}^{(js)} \quad (\alpha\beta), \qquad v_\gamma{}^{(j)} = \varepsilon^{\varkappa} \sum_{s=0} \lambda^s v_\gamma{}^{(js)} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем первый верхний индекс указывает номер слоя, к которому относится данная величина, а второй верхний индекс связан с номером приближения.

Для определения $v_\alpha{}^{(js)}$, $v_\beta{}^{(js)}$, $v_\gamma{}^{(js)}$ получим уравнения, которые легко проинтегрировать по ζ, что приводит к решению вида

$$v_\alpha{}^{(js)} = \sum_{k=0}^{r+1} \zeta^k v_{\alpha k}^{(js)} \quad (\alpha\beta) \qquad v_\gamma{}^{(js)} = \sum_{k=}^{r} \zeta^k v_{\gamma k}^{(js)} \tag{2.2}$$

где

$$r = \begin{cases} [s / q] & , \text{ если } [s / q] \text{ — четное число} \\ [s / q] - 1, & \text{ если } [s / q] \text{ — нечетное число} \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь квадратные скобки означают, что берется целая часть s/q.

Величины $v_{\alpha k}^{(js)}$, $v_{\beta k}^{(js)}$, $v_{\gamma k}^{(is)}$ являются функциями ξ, η; они связаны следующими дифференциальными зависимостями:

при $k \geqslant 1$

$$v_{\alpha, k+2}^{(js)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left\{-\frac{3-2\nu_j}{2(1-\nu_j)}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha k}^{(j, s-2q)}) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta k}^{(j, s-2q)})\right]\right\} + \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\beta k}^{(j, s-2q)}) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\alpha k}^{(j, s-2q)})\right]\right\} +$$
$$\left. + \frac{1}{2(1-\nu_j)}\frac{1}{k}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma, k-1}^{(j, s-2q)}\right\} \quad (\alpha\beta) \qquad (2.4)$$

при $k \geqslant 0$

$$v_{\gamma, k+2}^{(j, s)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left\{-\frac{1}{2(1-\nu_j)}(k+1)\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha, k+1}^{(j, s-2q)}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta, k+1}^{(j, s-2q)})\right] - \frac{1-2\nu_j}{2(1-\nu_j)}\nabla v_{\gamma k}^{(j, s-2q)}\right\}$$

Кроме того, получим, что

$$v_{\alpha 2}^{(js)} = \frac{1-\nu_j}{1-2\nu_j}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha 0}^{(j, s-2q)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta 0}^{(j, s-2q)})\right]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\beta 0}^{(j, s-2q)}) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\alpha 0}^{(j, s-2q)})\right]\right\} -$$
$$- \frac{1}{2(1-2\nu_j)}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_{\gamma 1}^{(js)}}{\partial\xi} \quad (\alpha\beta) \qquad (2.5)$$

где H_α, H_β — параметры Ламе. Соотношения (2.4) имеют рекуррентный характер; они позволяют определять $v_{\alpha k}^{(js)}$, $v_{\beta k}^{(js)}$ (при $k \geqslant 3$), $v_{\gamma k}^{(js)}$ (при $k \geqslant 2$) через величины $(s-2q)$-го приближения.

Определим напряжения, соответствующие смещениям (2.1). Если в соотношениях закона Гука выразить компоненты деформации через смещения, перейти к безразмерным величинам и подставить (2.1), то получим

$$\frac{1}{E_j}\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} = \varepsilon^{\varkappa+2}\sum_{s=0}\lambda^s\sigma_{\alpha\alpha}^{(js)} \quad (\alpha\beta), \qquad \frac{1}{E_j}\sigma_{\alpha\beta}^{(j)} = \varepsilon^{\varkappa+2}\sum_{s=0}\lambda^s\sigma_{\alpha\beta}^{(js)} \qquad (2.6)$$

$$\frac{1}{E_j}\sigma_{\alpha\gamma}^{(j)} = \varepsilon^{\varkappa+1}\sum_{s=0}\lambda^s\sigma_{\alpha\gamma}^{(js)} \quad (\alpha\beta), \qquad \frac{1}{E_j}\sigma_{\gamma\gamma}^{(j)} = \varepsilon^{\varkappa+2}\sum_{s=0}\lambda^s\sigma_{\gamma\gamma}^{(js)} \qquad (2.7)$$

Величины в (2.6), (2.7) с верхним индексом s зависят от ζ по полиноминальному закону

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(js)} = \sum_{k=0}^{r+1}\zeta^k\sigma_{\alpha\alpha k}^{(js)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(js)} = \sum_{k=0}^{r+1}\zeta^k\sigma_{\alpha\beta k}^{(js)} \qquad (2.8)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(js)} = \sum_{k=0}^{r}\zeta^k\sigma_{\alpha\beta k}^{(js)} \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(js)} = \sum_{k=0}^{r+1}\zeta^k\sigma_{\gamma\gamma k}^{(js)} \qquad (2.9)$$

Значение r определяется в соответствии с (2.3). Величины с нижним индексом k в (2.8) и (2.9) являются функциями ξ, η; для них имеют место следующие выражения:

$$\sigma_{\alpha\alpha k}^{(js)} = \frac{\nu_j}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha k}^{(js)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta k}^{(js)})\right] + \right.$$

$$\left. + (k+1)\, v_{\gamma,k+1}^{(j,s+2q)}\right\} + \frac{1}{1+\nu_j}\left[\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_{\alpha k}^{(js)}}{\partial\xi} - \frac{1}{H_\alpha H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial\eta} v_{\beta k}^{(js)}\right] \quad (\alpha\beta) \qquad (2.10)$$

$$\sigma_{\alpha\beta k}^{(js)} = \frac{1}{2(1+\nu_j)}\left[\frac{H_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{v_{\beta k}^{(js)}}{H_\beta}\right) + \frac{H_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v_{\alpha k}^{(js)}}{H_\alpha}\right)\right]$$

$$\sigma_{\alpha\gamma k}^{(js)} = \frac{1}{2(1+\nu_j)}\left[\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v_{\gamma k}^{(js)}}{\partial\xi} + (k+1)\, v_{\alpha,k+1}^{(js)}\right] \quad (\alpha\beta) \qquad (2.11)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma k}^{(js)} = \frac{\nu_j}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha k}^{(js)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta k}^{(js)})\right] +$$

$$+ \frac{1-\nu_j}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}(k+1)\, v_{\gamma,k+1}^{(j,s+2q)}$$

Между величинами

$$\sigma_{\alpha\alpha k}^{(js)} \ (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\beta k}^{(js)}, \qquad \sigma_{\gamma\gamma k}^{(js)}, \qquad \sigma_{\alpha\gamma k}^{(js)} \ (\alpha\beta)$$

имеются зависимости

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta\sigma_{\alpha\alpha k}^{(js)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha\sigma_{\alpha\beta k}^{(js)}) - \frac{\partial H_\beta}{\partial\xi}\sigma_{\beta\beta k}^{(js)} + \frac{\partial H_\alpha}{\partial\eta}\sigma_{\alpha\beta k}^{(js)}\right] +$$

$$+ (k+1)\,\sigma_{\alpha\gamma,k+1}^{(j,s+2q)} = 0 \quad (\alpha\beta) \qquad (2.12)$$

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta\sigma_{\alpha\gamma k}^{(js)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha\sigma_{\beta\gamma k}^{(js)})\right] + (k+1)\,\sigma_{\gamma\gamma,k+1}^{(j,s)} = 0$$

3. Рассмотрим слоистую пластинку, у которой $0 < a < 2$, под действием произвольной поверхностной нагрузки. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\gamma}^{(2n)} = \tau_\alpha^{+}(\alpha,\beta) \ (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(2n)} = \tau_\gamma^{+}(\alpha\beta) \ \text{при} \ \zeta = \zeta_{2n} \\ &\sigma_{\alpha\gamma}^{(-2m)} = \tau_\alpha^{-}(\alpha,\beta) \ (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(-2m)} = \tau_\gamma^{-}(\alpha\beta) \ \text{при} \ \zeta = \zeta_{-2m} \end{aligned} \qquad (3.1)$$

На плоскостях контакта слоев должны выполняться геометрические и статические условия сочленения слоев. Выпишем эти условия для слоев с номерами $2k$ и $2k+1$, т. е. условия при $\zeta = \zeta_{2k}$:

$$\begin{aligned} &v_\alpha^{(2k)} = v_\alpha^{(2k+1)} \ (\alpha\beta), \qquad v_\gamma^{(2k)} = v_\gamma^{(2k+1)} \\ &\sigma_{\alpha\gamma}^{(2k)} = \sigma_{\alpha\gamma}^{(2k+1)} \ (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k)} = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k+1)} \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Обозначим через s_0, s_* номера первых отличных от нуля членов в разложениях (2.7), относящихся, соответственно, к несущим и слабым слоям.

Учитывая (2.1) и (2.7), из (3.1) и (3.2) получим граничные условия и условия сочленения слоев для различных приближений. При $\zeta = \zeta_{2n}$ имеем:

для нулевого приближения

$$E_2 e_{2n}\varepsilon^{\varkappa+1}\lambda^{s_0}\sigma_{\alpha\gamma}^{(2n,s_0)} = \tau_\alpha^{+}(\xi,\eta) \ (\alpha\beta), \qquad E_2 e_{2n}\varepsilon^{\varkappa+2}\lambda^{s_0}\sigma_{\gamma\gamma}^{(2n,s_0)} = \tau_\gamma^{+}(\xi,\eta) \qquad (3.3)$$

для s-го приближения

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(2n,\, s_0+s)} = 0 \quad (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(2n,\, s_0+s)} = 0 \tag{3.4}$$

Граничные условия при ξ_{-2m} для различных приближений имеют аналогичный вид. Выпишем условия сочленения для s-го приближения на границах $(2k+1)$-го $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ слабого слоя:

при $\zeta = \zeta_{2k+1}$

$$v_\alpha^{(2k+2,\, s)} = v_\alpha^{(2k+1,\, s)} \quad (\alpha\beta), \qquad v_\gamma^{(2k+2,\, s)} = v_\gamma^{(2k+1,\, s)} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} E_2 e_{2k+2} \varepsilon^{\varkappa+1} \lambda^{s_0+s} \sigma_{\alpha\gamma}^{(2k+2,\, s_0+s)} = E_1 e_{2k+1} \varepsilon^{\varkappa+1} \lambda^{s_*+s} \sigma_{\alpha\gamma}^{(2k+1,\, s_*+s)} \quad (\alpha\beta) \\ E_2 e_{2k+2} \varepsilon^{\varkappa+2} \lambda^{s_0+s} \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k+2,\, s_0+s)} = E_1 e_{2k+1} \varepsilon^{\varkappa+2} \lambda^{s_*+s} \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k+1,\, s_*+s)} \end{gathered} \tag{3.6}$$

при $\zeta = \zeta_{2k}$

$$v_\alpha^{(2k,\, s)} = v_\alpha^{(2k+1,\, s)} \quad (\alpha\beta), \qquad v_\gamma^{(2k,\, s)} = v_\gamma^{(2k+1,\, s)} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} E_2 e_{2k} \varepsilon^{\varkappa+1} \lambda^{s_0+s} \sigma_{\alpha\gamma}^{(2k,\, s_0+s)} = E_1 e_{2k+1} \varepsilon^{\varkappa+1} \lambda^{s_*+s} \sigma_{\alpha\gamma}^{(2k+1,\, s_*+s)} \quad (\alpha\beta) \\ E_2 e_{2k} \varepsilon^{\varkappa+2} \lambda^{s_0+s} \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k,\, s_0+s)} = E_1 e_{2k+1} \varepsilon^{\varkappa+2} \lambda^{s_*+s} \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k+1,\, s_*+s)} \end{gathered} \tag{3.8}$$

В (3.3) — (3.8) принято, что $e_{2k} = E_{2k} / E_2$, $e_{2k+1} = E_{2k+1} / E_1$. Из сказанного выше следует, что значения e_{2k}, e_{2k+1} близки к единице.

Выясним возможность удовлетворения граничных условий (3.3) и статических условий сочленения слоев (3.6) и (3.8). На основании рассуждений, аналогичных проведенным в § 3 работы [4] для однородной пластинки, приходим к выводу, что $s_0 = 2q$, $s_* = 2q - p$.

Это означает, что в разложениях (2.7) для $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$, если они относятся к несущим слоям, обращаются в нуль первые $2q$ члена; если же эти разложения относятся к слабым слоям, то в них обращаются в нуль первые $2q - p$ члена. Из условия обращения в нуль указанных членов для j-го слоя получим соотношения

$$\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v_{\gamma 0}^{(js)}}{\partial \xi} + v_{\alpha 1}^{(js)} = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(H_\beta v_{\alpha 0}^{(js)} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(H_\alpha v_{\beta 0}^{(js)} \right) \right] + \frac{1 - \nu_j}{\nu_j} v_{\gamma 1}^{(j,\, s+2q)} = 0 \tag{3.10}$$

Если $j = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ -1, -2, \ldots, -m)$, то условия (3.9) и (3.10) выполняются для приближений $s = 0, 1, 2, \ldots, 2q - 1$.

Если же $j = 2k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ или $j = 2k + 1$ $(k = -1, -2, \ldots, -m)$, то условия (3.9) и (3.10) выполняются для приближений $s = 0, 1, 2, \ldots, 2q - p - 1$.

Условия (3.9), (3.10) эквивалентны выполнению гипотезы Кирхгоффа — Лява. Следовательно, гипотеза Кирхгоффа — Лява в несущих слоях выполняется в первых $2q$ приближениях, а в слабых — в первых $2q - p$ приближениях. Таким образом, первые $2q$ приближений распадаются на две группы. Первую группу составляют приближения $s = 0, 1, 2, \ldots, 2q - p - 1$. В этих приближениях гипотеза Кирхгоффа — Лява выполняется для всей слоистой пластинки в целом. Вторую группу составляют приближения $s = 2q - p;\ 2q - p + 1, \ldots, 2q - 1$. В этих приближениях гипотеза Кирхгоффа — Лява имеет место лишь в несущих слоях пластинки.

Характер напряженного состояния в различных слоях пластинки также зависит от числа первых членов в разложениях (2.7), которые обращаются в нуль. Оценим порядки напряжений, возникающих в несущих и слабых слоях. Учитывая, что $s_0 =$

$= 2q$, $s_* = 2q - p$, из (2.6) и (2.7) получим:

для несущих слоев

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(2k)},\ \sigma_{\beta\beta}^{(2k)},\ \sigma_{\alpha\beta}^{(2k)} \sim E_2\varepsilon^{\varkappa+2};\qquad \sigma_{\alpha\gamma}^{(2k)},\ \sigma_{\beta\gamma}^{(2k)} \sim E_2\varepsilon^{\varkappa+3};\qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k)} \sim E_2\varepsilon^{\varkappa+4} \tag{3.11}$$

для слабых слоев (3.12)

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(2k-1)},\ \sigma_{\beta\beta}^{(2k-1)},\ \sigma_{\alpha\beta}^{(2k-1)} \sim E_1\varepsilon^{\varkappa+2};\quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(2k-1)},\ \sigma_{\beta\gamma}^{(2k-1)} \sim E_1\varepsilon^{\varkappa+3-a};\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(2k-1)} \sim E_1\varepsilon^{\varkappa+4-a}$$

Из (3.11) следует, что несущие слои в основном работают на изгиб, так как наибольшими по величине являются изгибные напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}^{(2k)}$, $\sigma_{\beta\beta}^{(2k)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(2k)}$. Перерезывающие напряжения $\sigma_{\alpha\gamma}^{(2k)}$, $\sigma_{\beta\gamma}^{(2k)}$ на порядок, а нормальные напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}^{(2k)}$ на два порядка меньше основных напряжений.

Из (3.12) следует, что в слабых слоях с увеличением a возрастает значение перерезывающих $\sigma_{\alpha\gamma}^{(2k-1)}$, $\sigma_{\beta\gamma}^{(2k-1)}$ и нормальных $\sigma_{\gamma\gamma}^{(2k-1)}$ напряжений. Это указывает на то, что с увеличением α слабые слои все больше работают на сдвиг и на сжатие. Заметим, что в первых p приближениях перерезывающие напряжения постоянны по толщине слабых слоев. Кроме того, как это видно из (3.12), при $1 < a < 2$ порядок этих напряжений выше порядка основных изгибных напряжений.

Это означает, что при $1 < a < 2$ в слабых слоях в первых p приближениях выполняется гипотеза Райсснера [5].

4. Выражения для смещений и напряжений в каждом приближении для любого слоя содержат шесть произвольных функций. В s-м приближении произвольными функциями будут

для несущего слоя

$$v_{\alpha0}^{(2k,s)},\quad v_{\beta0}^{(2k,s)},\quad v_{\gamma0}^{(2k,s)},\quad \sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k,2q+s)},\quad \sigma_{\beta\gamma0}^{(2k,2q+s)},\quad \sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k,2q+s)}$$

для слабого слоя

$$v_{\alpha0}^{(2k-1,s)},\quad v_{\beta0}^{(2k-1,s)},\quad v_{\gamma0}^{(2k-1,s)},\quad \sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k-1,2q-p+s)},\quad \sigma_{\beta\gamma0}^{(2k-1,2q-p+s)},\quad \sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k-1,2q-p+s)}$$

Если из двенадцати условий сочленения (3.5) — (3.8) в s-м приближении какого-либо слабого слоя с прилегающими к нему несущими слоями исключить шесть произвольных функций, относящихся к слабому слою, то получим шесть условий связи [4] соседних несущих слоев в s-м приближении. Условия связи соседних несущих слоев позволяют исключить из рассмотрения слабые слои. В эти условия входят двенадцать произвольных функций, соответствующих s-му приближению и относящихся к несущим слоям, прилегающим к рассматриваемому слабому слою. Кроме того, в эти условия входят величины, относящиеся к предыдущим приближениям, которые считаем известными при построении данного приближения.

Для нулевого приближения условия связи несущих слоев с номерами $2k$ и $2k+2$ имеют вид

$$v_{\alpha0}^{(2k,0)} = v_{\alpha0}^{(2k+2,0)}\quad (\alpha\beta),\qquad v_{\gamma0}^{(2k,0)} = v_{\gamma0}^{(2k+2,0)} \tag{4.1}$$

$$e_{2k}\left[\sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k,2q)} + \zeta_{2k}\sigma_{\alpha\gamma1}^{(2k,2q)} + \zeta_{2k}^2\sigma_{\alpha\gamma2}^{(2k,2q)}\right] = e_{2k+2}\left[\sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k+2,2q)} + \zeta_{2k+1}\sigma_{\alpha\gamma1}^{(2k+2,2q)} + \right.$$
$$\left. + \zeta_{2k+1}^2\sigma_{\alpha\gamma2}^{(2k+2,2q)}\right]\quad (\alpha\beta) \tag{4.2}$$

$$e_{2k}\left[\sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k,2q)} - \zeta_{2k}^2\sigma_{\gamma\gamma2}^{(2k,2q)} - 2\zeta_{2k}^3\sigma_{\gamma\gamma3}^{(2k,2q)}\right] =$$
$$= e_{2k+2}\left[\sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k+2,2q)} - \zeta_{2k+1}^2\sigma_{\gamma\gamma2}^{(2k+2,2q)} - 2\zeta_{2k+1}^3\sigma_{\gamma\gamma3}^{(2k+2,2q)}\right]$$

Для слоистой пластинки, содержащей $n+m$ несущих слоев, в каждом приближении имеем $6(n+m-1)$ условий связи несущих слоев и шесть граничных условий при $\xi=\xi_{2n}$ и $\xi=\xi_{-2m}$. В эти $6(n+m)$ условий входят $6(n+m)$ произвольных функций, относящихся к несущим слоям и соответствующих данному приближению.

5. Покажем, что задача построения любого приближения сводится к решению трех двумерных дифференциальных уравнений.

Прежде заметим, что значения одних величин s-го приближения существенно связаны с этим приближением, а значения других определяются через предыдущие приближения. Среди последних имеются три вида величин: одни выражаются через $(s-2q)$-е, другие — через $(s-2q+p)$-е, третьи — одновременно через $(s-2q)$-е и $(s-2q+p)$-е приближения. Для обозначения этих величин вместо индекса s, указывающего номер приближения, будем употреблять индексы θ, $\varkappa$, τ, соответственно. Кроме того, условимся у величин, относящихся ко всей слоистой пластинке в целом, опускать индекс, указывающий номер слоя.

Из геометрических условий связи несущих слоев следует:

$$v_{\alpha 0}^{(2k,\,s)}=v_{\alpha 0}^{(s)}\quad(\alpha\ \beta),\qquad v_{\gamma 0}^{(2k,\,s)}=v_{\gamma 0}^{(s)}\qquad(0\leqslant s\leqslant 2q-p-1)\tag{5.1}$$

$$v_{\alpha 0}^{(2k,\,s)}=v_{\alpha 0}^{(s)}+v_{\alpha 0}^{(2k,\,\varkappa)}\quad(\alpha\ \beta),\qquad v_{\gamma 0}^{(2k,\,s)}=v_{\gamma 0}^{(s)}\qquad(2q-p\leqslant s\leqslant 2q-1)\tag{5.2}$$

$$v_{\alpha 0}^{(2k,\,s)}=v_{\alpha 0}^{(s)}+v_{\alpha 0}^{(2k,\,\theta)}\quad(\alpha\ \beta),\qquad v_{\gamma 0}^{(2k,\,s)}=v_{\gamma 0}^{(s)}+v_{\gamma 0}^{(2k,\,\theta)}\qquad(2q\leqslant s\leqslant 4q-p-1)\tag{5.3}$$

$$(k=1,2,\ldots,n;\ -1,\ -2,\ldots,-m)$$

В (5.2), (5.3) принято, что

$$v_{\alpha 0}^{(s)}=v_{\alpha 0}^{(2n,\,s)}\quad(\alpha\ \beta),\qquad v_{\gamma 0}^{(s)}=v_{\gamma 0}^{(2n,\,s)}$$

Тогда имеем:

для приближений $2q-p\leqslant s\leqslant 2q-1$

$$v_{\alpha 0}^{(2n,\,\varkappa)}=0\quad(\alpha\ \beta)\tag{5.4}$$

$$v_{\alpha 0}^{(2n-2,\,\varkappa)}=-2(1+\nu_{2n-1})(\zeta_{2n-1}-\zeta_{2n-2})\,\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(2n-1,\,s)}\quad(\alpha\ \beta)$$

$$v_{\alpha 0}^{(2n-4,\,\varkappa)}=v_{\alpha 0}^{(2n-2,\,\varkappa)}-2(1+\nu_{2n-3})(\zeta_{2n-3}-\zeta_{2n-4})\,\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(2n-3,\,s)}\quad(\alpha\ \beta)$$

для приближений $2q\leqslant s\leqslant 4q-p-1$

$$v_{\alpha 0}^{(2n,\,\theta)}=0\quad(\alpha\ \beta),\qquad v_{\alpha 0}^{(2n-2,\,\theta)}=V_{\alpha}^{(2n-2,\,\theta)}\quad(\alpha\ \beta)$$

$$v_{\alpha 0}^{(2n-4,\,\theta)}=v_{\alpha 0}^{(2n-2,\,\theta)}+V_{\alpha}^{(2n-4,\,\theta)}\quad(\alpha\ \beta),\ldots\tag{5.5}$$

$$v_{\gamma 0}^{(2n,\,\theta)}=0,\qquad v_{\gamma 0}^{(2n-2,\,\theta)}=V_{\gamma}^{(2n-2,\,\theta)},\qquad v_{\gamma 0}^{(2n-4,\,\theta)}=v_{\gamma 0}^{(2n-2,\,\theta)}+V_{\gamma}^{(2n-4,\,\theta)},\ldots\tag{5.6}$$

Здесь (5.7)

$$\begin{aligned}V_{\alpha}^{(2k,\,\theta)}={}&(\zeta_{2k+1}v_{\alpha 1}^{(2k+2,\,\theta)}-\zeta_{2k}v_{\alpha 1}^{(2k,\,\theta)})-(\zeta_{2k+1}-\zeta_{2k})\,v_{\alpha 1}^{(2k+1,\,\theta)}+\\&+(\zeta_{2k+1}^{2}v_{\alpha 2}^{(2k+2,\,\theta)}-\zeta_{2k}^{2}v_{\alpha 2}^{(2k,\,\theta)})-(\zeta_{2k+1}^{2}-\zeta_{2k}^{2})\,v_{\alpha 2}^{(2k+1,\,\theta)}+\\&+(\zeta_{2k+1}^{3}v_{\alpha 3}^{(2k+2,\,\theta)}-\zeta_{2k}^{3}v_{\alpha 3}^{(2k,\,\theta)})-(\zeta_{2k+1}^{3}-\zeta_{2k}^{3})\,v_{\alpha 3}^{(2k+1,\,\theta)}\quad(\alpha\beta)\end{aligned}$$

$$V_{\gamma}^{(2k,\,\theta)}=\zeta_{2k+1}v_{\gamma 1}^{(2k+2,\,\theta)}-\zeta_{2k}v_{\gamma 1}^{(2k,\,\theta)}-(\zeta_{2k+1}-\zeta_{2k})\,v_{\gamma 1}^{(2k+1,\,\theta)}$$

Если для различных приближений выписать последовательно статические условия связи для каждой пары соседних несущих слоев, сложить их и принять во внимание граничные условия, то в результате получим следующие основные соотношения:

для приближения $s = 0$

$$P_{\alpha\gamma 1}^{(0)} + P_{\alpha\gamma 2}^{(0)} = \frac{1}{E_2\varepsilon^{\varkappa+3}}(\tau_\alpha^+ - \tau_\alpha^-) \qquad (\alpha\beta)$$

$$P_{\gamma\gamma 2}^{(0)} + 2P_{\gamma\gamma 3}^{(0)} = -\frac{1}{E_2\varepsilon^{\varkappa+4}}\left\{(\tau_\gamma^+ - \tau_\gamma^-) + \right. \tag{5.8}$$

$$\left. + \varepsilon\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial H_\beta(\zeta_{2n}\tau_\alpha^+ - \zeta_{-2m}\tau_\alpha^-)}{\partial\xi} + \frac{\partial H_\alpha(\zeta_{2n}\tau_\beta^+ - \zeta_{-2m}\tau_\beta^-)}{\partial\eta}\right]\right\}$$

для приближений $1 \leqslant s \leqslant 2q - p - 1$

$$P_{\alpha\gamma 1}^{(s)} + P_{\alpha\gamma 2}^{(s)} = 0 \quad (\alpha\beta) \qquad P_{\gamma\gamma 2}^{(s)} + 2P_{\gamma\gamma 3}^{(s)} = 0 \tag{5.9}$$

для приближений $2q - p \leqslant s \leqslant 2q - 1$

$$P_{\alpha\gamma 1}^{(s)} + P_{\alpha\gamma 2}^{(s)} = -R_{\alpha\gamma 1}^{(s-p)} - R_{\alpha\gamma 2}^{(s-p)} \quad (\alpha\beta)$$
$$P_{\gamma\gamma 2}^{(s)} + 2P_{\gamma\gamma 3}^{(s)} = -R_{\gamma\gamma 2}^{(s-p)} - 2R_{\gamma\gamma 3}^{(s-p)} \tag{5.10}$$

для приближений $2q \leqslant s \leqslant 4q - p - 1$

$$P_{\alpha\gamma 1}^{(s)} + P_{\alpha\gamma 2}^{(s)} = -P_{\alpha\gamma 3}^{(s)} - P_{\alpha\gamma 4}^{(s)} - R_{\alpha\gamma 1}^{(s-p)} - R_{\alpha\gamma 2}^{(s-p)} \quad (\alpha\beta)$$
$$P_{\gamma\gamma 2}^{(s)} + 2P_{\gamma\gamma 3}^{(s)} = -3P_{\gamma\gamma 4}^{(s)} - 4P_{\gamma\gamma 5}^{(s)} - R_{\gamma\gamma 2}^{(s-p)} - 2R_{\gamma\gamma 3}^{(s-p)} \tag{5.11}$$

для приближений $4q - p \leqslant s \leqslant 4q - 1$

$$P_{\alpha\gamma 1}^{(s)} + P_{\alpha\gamma 2}^{(s)} = -P_{\alpha\gamma 3}^{(s)} - P_{\alpha\gamma 4}^{(s)} - R_{\alpha\gamma 1}^{(s-p)} - R_{\alpha\gamma 2}^{(s-p)} - R_{\alpha\gamma 3}^{(s-p)} - R_{\alpha\gamma 4}^{(s-p)} \quad (\alpha\beta) \tag{5.12}$$
$$P_{\gamma\gamma 2}^{(s)} + 2P_{\gamma\gamma 3}^{(s)} = -3P_{\gamma\gamma 4}^{(s)} - 4P_{\gamma\gamma 5}^{(s)} - R_{\gamma\gamma 2}^{(s-p)} - 2R_{\gamma\gamma 3}^{(s-p)} - 3R_{\gamma\gamma 4}^{(s-p)} - 4R_{\gamma\gamma 5}^{(s-p)}$$

Здесь использованы обозначения

$$P_{\alpha\gamma i}^{(t)} = \sum{}^{*}(\zeta_{2k}^{\ i} - \zeta_{2k-1}^{\ i})e_{2k}\sigma_{\alpha\gamma i}^{(2k,\, t+2q)} \qquad (\alpha\beta)$$
$$R_{\alpha\gamma i}^{(t)} = \sum{}^{*}(\zeta_{2k-1}^{\ i} - \zeta_{2k-2}^{\ i})e_{2k-1}\sigma_{\alpha\gamma i}^{(2k-1,\, t+2q)} \qquad (\alpha\beta) \tag{5.13}$$
$$P_{\gamma\gamma i}^{(t)} = \sum{}^{*}(\zeta_{2k}^{\ i} - \zeta_{2k-1}^{\ i})e_{2k}\sigma_{\gamma\gamma i}^{(2k,\, t+2q)}$$
$$R_{\gamma\gamma i}^{(t)} = \sum{}^{*}(\zeta_{2k-1}^{\ i} - \zeta_{2k-2}^{\ i})e_{2k-1}\sigma_{\gamma\gamma i}^{(2k-1,\, t+2q)}$$

Здесь

$$\sum{}^{*} f(a_{2k}, b_{2k-1}, c_{2k-2}) = \sum_{k=1}^{n} f(a_{2k}, b_{2k-1}, c_{2k-2}) - \sum_{k=-1}^{-m} f(a_{2k}, b_{2k+1}, c_{2k+2}) \tag{5.14}$$

Величины, стоящие слева в основных соотношениях (5.8) — (5.12), имеют следующие выражения:

$$P_{\alpha\gamma 1}^{(s)} = -\sum{}^{*}(\zeta_{2k} - \zeta_{2k-1})e_{2k}L(v_{\alpha 0}^{(s)};\, v_{\beta 0}^{(s)};\, \nu_{2k}) + P_{\alpha\gamma 1}^{(\tau)} \qquad (\alpha\beta)$$

$$P_{\alpha\gamma 2}^{(s)} = Q_2\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma 0}^{(s)} + P_{\alpha\gamma 2}^{(\theta)} \qquad (\alpha\beta) \tag{5.15}$$

$$P_{\gamma\gamma 2}^{(s)} = Q_2\nabla\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha 0}^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta 0}^{(s)})\right]\right\} + P_{\gamma\gamma 2}^{(\tau)}$$

$$P_{\gamma\gamma 3}^{(s)} = -1/2\, Q_3\nabla\nabla v_{\gamma 0}^{(s)} + P_{\gamma\gamma 3}^{(\theta)}$$

Здесь

$$L(v_{\alpha0}^{(s)},\ v_{\beta0}^{(s)};\ \nu_{2k}) = \frac{1}{1-\nu_{2k}^2}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha0}^{(s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta0}^{(s)})\right]\right\} -$$

$$- \frac{1}{2(1+\nu_{2k})}\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\beta0}^{(s)}) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\alpha0}^{(s)})\right]\right\} \qquad (\alpha\beta) \tag{5.16}$$

$$Q_i = \frac{1}{i}\sum{}^* (\xi_{2k}^{\ i} - \xi_{2k-1}^{\ i})\frac{e_{2k}}{1-v_{2k}^{\ k}} \tag{5.17}$$

Для величин с верхним индексом τ или θ в (5.15) имеем

$$P_{\alpha\gamma1}^{(\tau)} = -\sum{}^* (\zeta_{2k} - \zeta_{2k-1}) e_{2k}\left[L(v_{\alpha0}^{(2k,\ \tau)},\ v_{\beta0}^{(2k,\ \tau)};\ \nu_{2k}) + \frac{\nu_{2k}}{1-\nu_{2k}}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k,\ s)}}{\partial\xi}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$P_{\alpha\gamma2}^{(\theta)} = \frac{1}{2}\sum{}^* (\zeta_{2k}^2 - \zeta_{2k-1}^2) e_{2k}\left\{\frac{1}{1-\nu_{2k}^2}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma0}^{(2k,\ \theta)} - \right. \tag{5.18}$$

$$- \frac{2-\nu_{2k}}{1-\nu_{2k}}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta\sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k,\ s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha\sigma_{\beta\gamma0}^{(2k,\ s)})\right]\right\} +$$

$$\left. + \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta\sigma_{\beta\gamma0}^{(2k,\ s)}) - \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha\sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k,\ s)})\right]\right\}\right\} \quad (\alpha\beta)$$

$$P_{\gamma\gamma2}^{(\tau)} = \frac{1}{2}\sum{}^* (\zeta_{2k}^2 - \zeta_{2k-1}^2) e_{2k}\left\{\frac{1}{1-\nu_{2k}^2}\nabla\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha0}^{(2k,\ \tau)}) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta0}^{(2k,\ \tau)})\right]\right\} + \frac{\nu_{2k}}{1-\nu_{2k}}\nabla\sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k,\ s)}\right\}$$

$$P_{\gamma\gamma3}^{(\theta)} = -\frac{1}{6}\sum{}^* (\zeta_{2k}^3 - \zeta_{2k-1}^3) e_{2k}\left\{\frac{1}{1-\nu_{2k}^2}\nabla\nabla v_{\gamma0}^{(2k,\ \theta)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2-\nu_{2k}}{1-\nu_{2k}}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta\sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k,\ s)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha\sigma_{\beta\gamma0}^{(2k,\ s)})\right]\right\}$$

Не представляет труда убедиться, что правые части в (5.10) — (5.12) выражаются через величины, известные из предыдущих приближений. Например, величины, стоящие справа в соотношениях (5.10), имеют вид

$$R_{\alpha\gamma1}^{(s-p)} = -\sum{}^* (\zeta_{2k-1} - \zeta_{2k-2}) e_{2k-1}\left[L(v_{\alpha0}^{(2k-1,\ s-p)},\ v_{\beta0}^{(2k-1,\ s-p)};\ \nu_{2k-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu_{2k-1}}{1-\nu_{2k-1}}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k-1,\ s-p)}}{\partial\xi}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$R_{\alpha\gamma2}^{(s-p)} = Q_2^*\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma0}^{(s-p)} \quad (\alpha\beta) \tag{5.19}$$

$$R_{\gamma\gamma2}^{(s-p)} = Q_2^*\nabla\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha0}^{(s-p)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta0}^{(s-p)})\right]\right\}$$

$$R_{\gamma\gamma3}^{(s-p)} = -\frac{1}{2}Q_3^*\nabla\nabla v_{\gamma0}^{(s-p)}$$

Здесь

$$Q_i^* = \frac{1}{i}\sum{}^* (\zeta_{2k-1}^{\ i} - \zeta_{2k-2}^{\ i})\frac{e_{2k-1}}{1-\nu_{2k-1}^2} \tag{5.20}$$

Подставляя (5.15) в основные соотношения (5.8) — (5.12) и перенося в правые части величины, выражающиеся через предыдущие приближения, получим следующие уравнения относительно $v_{\alpha 0}^{(s)}, v_{\beta 0}^{(s)}, v_{\gamma 0}^{(s)}$:

$$-\sum^{*}(\zeta_{2k}-\zeta_{2k-1})\,e_{2k}L\,(v_{\alpha 0}^{(s)},\ v_{\beta 0}^{(s)};\ \nu_{2k})+Q_2\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma 0}^{(s)}=T_\alpha^{(s)}\qquad(\alpha\beta)\tag{5.21}$$

$$Q_2\nabla\left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha 0}^{(s)})+\frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta 0}^{(s)})\right]\right\}-Q_3\nabla\nabla v_{\gamma 0}^{(s)}=T_\gamma^{(s)}\tag{5.22}$$

Правые части $T_\alpha^{(s)}$, $T_\beta^{(s)}$, $T_\gamma^{(s)}$ выражаются через величины, известные по предыдущим приближениям.

При произвольном расположении координатной плоскости $\alpha\beta$ в каждое из уравнений (5.21), (5.22) входят все три неизвестные $v_{\alpha 0}^{(s)}$, $v_{\beta 0}^{(s)}$, $v_{\gamma 0}^{(s)}$. Но координатную плоскость $\alpha\beta$ всегда можно расположить так, чтобы величина Q_2 обращалась в нуль[1]. Тогда в уравнения (5.21) будут входить только неизвестные $v_{\alpha 0}^{(s)}$, $v_{\beta 0}^{(s)}$, а в уравнение (5.22) — неизвестная $v_{\gamma 0}^{(s)}$. Это означает, что при таком расположении координатной плоскости $\alpha\beta$ задачи обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба разделяются в каждом приближении.

В дальнейшем всегда будем считать, что координатная плоскость $\alpha\beta$ расположена так, что $Q_2 = 0$. Тогда из (5.21), (5.22) следует, что $v_{\alpha 0}^{(s)}$, $v_{\beta 0}^{(s)}$ удовлетворяют уравнениям

$$-\sum^{*}(\zeta_{2k}-\zeta_{2k-1})\,e_{2k}L\,(v_{\alpha 0}^{(s)},\ v_{\beta 0}^{(s)};\ \nu_{2k})=T_\alpha^{(s)}\qquad(\alpha\beta)\tag{5.23}$$

а $v_{\gamma 0}^{(s)}$ уравнению

$$-Q_3\nabla\nabla v_{\gamma 0}^{(s)}=T_\gamma^{(s)}\tag{5.24}$$

Определение $v_{\alpha 0}^{(s)}$, $v_{\beta 0}^{(s)}$ в каждом приближении сводится к решению двух уравнений (5.23), которые являются уравнениями обобщенного плоского напряженного состояния некоторой анизотропной пластинки. При дополнительном условии, что коэффициенты Пуассона всех несущих слоев одни и те же, т. е. при условии, что $\nu_{2k} = \nu_2$, из уравнений (5.23) получим уравнение обобщенного плоского напряженного состояния некоторой изотропной пластинки

$$-(1-\nu_2^2)\,Q_1L\,(v_{\alpha 0}^{(s)},\ v_{\beta 0}^{(s)};\ \nu)=T_\alpha^{(s)}\qquad(\alpha\beta)\tag{5.25}$$

Величина Q_1 определяется, согласно (5,17) при $\nu_{2k} = \nu_2$.

Задача изгиба в каждом приближении сводится к решению бигармонического уравнения (5.24). Жесткость пластинки определяется через величину Q_3, которая, как это видно из (5.17), зависит от величин, относящихся к несущим слоям. Следовательно, при $0 < a < 2$ жесткость слоистой пластинки не зависит от жесткости слабых слоев.

Уравнения (5.23) — (5.25) для различных приближений отличаются одно от другого только правыми частями, характер которых меняется при переходе от приближений $s = 2q-p-1,\ 2q-1,\ 4q-p-1,\ 4q-1,\ldots$, соответственно, к приближениям $s = 2q-p,\ 2q,\ 4q-p,\ 4q,\ldots$

Для нулевого приближения правые части уравнений (5.19), (5.20) имеют вид

$$T_\alpha^{(0)}=\frac{1}{E_2\varepsilon^{\varkappa+3}}(\tau_\alpha^{+}-\tau_\alpha^{-})\qquad(\alpha\beta)\tag{5.26}$$

$$T_\gamma^{(0)}=-\frac{1}{E_2\varepsilon^{\varkappa+4}}\left\{\tau_\gamma^{+}-\tau_\gamma^{-}+\varepsilon\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial H_\beta(\tau_\alpha^{+}\zeta_{2n}-\tau_\alpha^{-}\zeta_{-2m})}{\partial\xi}-\frac{\partial H_\alpha(\tau_\beta^{+}\zeta_{2n}-\tau_\beta^{-}\zeta_{-2m})}{\partial\eta}\right]\right\}$$

[1] Может оказаться, что величина Q_2 обращается в нуль, если плоскость $\alpha\beta$ или проходит через несущий слой или совпадает с какой-либо плоскостью контакта слоев. Тогда все приведенные формулы следует несколько видоизменить.

Для приближений $1 \leqslant s \leqslant 2q - p + 1$ правые части уравнений (5.23) — (5.25) обращаются в нуль

$$T_\alpha^{(s)} = 0 \quad (\alpha\beta), \qquad T_\gamma^{(s)} = 0 \tag{5.27}$$

Для приближений $2q - p \leqslant s \leqslant 2q - 1$ имеем

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(s)} &= -R_{\alpha\gamma1}^{(s-p)} - R_{\alpha\gamma2}^{(s-p)} - P_{\alpha\gamma1}^{(\tau)} - P_{\alpha\gamma2}^{(\theta)} \quad (\alpha\beta) \\ T_\gamma^{(s)} &= -R_{\gamma\gamma2}^{(s-p)} - 2R_{\gamma\gamma3}^{(s-p)} - P_{\gamma\gamma2}^{(\tau)} - 2P_{\gamma\gamma3}^{(\theta)} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Выражения величин, стоящих справа в (5.28), дано в (5.18) и (5.19).

Для приближений $2q \leqslant s \leqslant 4q - p$ получим

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(s)} &= -P_{\alpha\gamma3}^{(s)} - P_{\alpha\gamma4}^{(s)} - R_{\alpha\gamma1}^{(s-p)} - R_{\alpha\gamma2}^{(s-p)} - P_{\alpha\gamma1}^{(\tau)} - P_{\alpha\gamma2}^{(\theta)} \quad (\alpha\beta) \\ T_\gamma^{(s)} &= -3P_{\gamma\gamma4}^{(s)} - 4P_{\gamma\gamma5}^{(s)} - R_{\gamma\gamma2}^{(s-p)} - 2R_{\gamma\gamma3}^{(s-p)} - P_{\gamma\gamma2}^{(\tau)} - 2P_{\gamma\gamma3}^{(\theta)} \end{aligned} \tag{5.29}$$

6. Рассмотрим слоистые пластинки, у которых отношение E_1 / E_2 соизмеримо с квадратом относительной толщины, т. е. $a \sim 2$. Для асимптотического интегрирования уравнений теории упругости используем в этом случае разложения по параметру ε. Выясняя возможность выполнения граничных условий и условий сочленения слоев, убедимся, что в разложениях для напряжений $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ сохраняются все члены, если они относятся к слабым слоям, и обращаются в нуль первые два члена, если они относятся к несущим слоям. Это равносильно тому, что в первых двух приближениях (при разложении по ε) гипотеза Кирхгоффа — Лява имеет место лишь для несущих слоев.

О характере напряженного состояния в слабых слоях подробно сказано в [4] (см. § 5, напряженное состояние C).

Условия связи соседних несущих слоев в нулевом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} e_{2k+1}\left[v_{\alpha0}^{(2k+2,\,0)} - v_{\alpha0}^{(2k,\,0)}\right] &= 2e_{2k+2}(1+\nu_{2k+1})(\zeta_{2k+1}-\zeta_{2k})\left[\sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k+2,\,2)} + \right. \\ &\left. + \zeta_{2k+1}\sigma_{\alpha\gamma1}^{(2k+2,\,2)} + \zeta_{2k+1}^2\sigma_{\alpha\gamma2}^{(2k+2,\,2)}\right] \quad (\alpha\beta) \\ e_{2k+1}\left[v_{\alpha0}^{(2k+2,\,0)} - v_{\alpha0}^{(2k,\,0)}\right] &= 2e_{2k}(1+\nu_{2k+1})(\zeta_{2k+1}-\zeta_{2k})\left[\sigma_{\alpha\gamma0}^{(2k,\,2)} + \right. \\ &\left. + \zeta_{2k}\sigma_{\alpha\gamma1}^{(2k,\,2)} + \zeta_{2k}^2\sigma_{\alpha\gamma2}^{(2k,\,2)}\right] \quad (\alpha\beta) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$v_{\gamma0}^{(2k,\,0)} = v_{\gamma0}^{(2k+2,\,0)} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} &e_{2k}\left[\sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k,\,2)} - \zeta_{2k}^2\sigma_{\gamma\gamma2}^{(2k,\,2)} - 2\zeta_{2k}^3\sigma_{\gamma\gamma3}^{(2k,\,2)}\right] = \\ &= e_{2k+2}\left[\sigma_{\gamma\gamma0}^{(2k+2,\,2)} - \zeta_{2k+1}^2\sigma_{\gamma\gamma2}^{(2k+2,\,2)} - 2\zeta_{2k+1}^3\sigma_{\gamma\gamma3}^{(2k+2,\,2)}\right] \end{aligned} \tag{6.3}$$

Из (6.2) следует, что

$$v_{\gamma0}^{(2k,\,0)} = v_{\gamma0}^{(0)} \tag{6.4}$$

т. е. величина $v_{\gamma0}^{(0)}$—общая для всей слоистой пластинки в целом. Из (6.1) видно, что величины $v_{\alpha0}^{(2k,0)}$, $v_{\beta0}^{(2k,0)}$ различны для различных слоев.

В соответствии с этим задача о деформации слоистой пластинки, у которой $a \sim 2$, в нулевом приближении сводится к системе $2(n+m)+1$ двумерных уравнений относительно $2(n+m)+1$ неизвестных функций

$$v_{\alpha 0}^{(2k,0)},\ v_{\beta 0}^{(2k,0)}\ (k = 1, 2, \ldots, n; \quad -1, -2, \ldots -m)\ v_{\gamma 0}^{(0)}$$

которые имеют вид

$$\begin{aligned} -e_{2k}(\zeta_{2k}-\zeta_{2k-1}) L(v_{\alpha 0}^{(2k,0)}, v_{\beta 0}^{(2k,0)}; \nu_{2k}) + \frac{e_{2k}(\zeta_{2k}^2-\zeta_{2k-1}^2)}{4(1-\nu_{2k}^2)} \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla v_{\gamma 0}^{(2k,0)} = \\ = \frac{e_{2k+1}}{2(1+\nu_{2k+1})}\left[\frac{1}{\zeta_{2k+1}-\zeta_{2k}}(v_{\alpha 0}^{(2k+2,0)} - v_{\alpha 0}^{(2k,0)}) - \right. \\ \left. -\frac{1}{\zeta_{2k-1}-\zeta_{2k-2}}(v_{\alpha 0}^{(2k,0)} - v_{\alpha 0}^{(2k-2,0)})\right] \quad (\alpha\beta) \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \sum{}^{*} (\zeta_{2k}^2-\zeta_{2k-1}^2)\frac{e_{2k}}{2(1-\nu_{2k}^2)} \nabla \left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(H_\beta v_{\alpha 0}^{(2k,0)}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_\alpha v_{\beta 0}^{(2k,0)})\right]\right\} - \\ - Q_3\nabla\nabla v_{\gamma 0}^{(0)} = -\frac{1}{E_2\varepsilon^{\varkappa+4}}\left\{\tau_\gamma^{+} - \tau_\gamma^{-} + \varepsilon\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial H_\beta(\zeta_{2n}\tau_\alpha^{+} - \zeta_{-2m}\tau_\alpha^{-})}{\partial\xi} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\partial H_\alpha(\zeta_{2n}\tau_\beta^{+} - \zeta_{-2m}\tau_\beta^{-})}{\partial\eta}\right]\right\} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Для трехслойной симметрично собранной пластинки уравнения (6.5), (6.6) представляют систему трех уравнений относительно трех неизвестных $v_{\alpha 0}^{(2,0)}$, $v_{\beta 0}^{(2,0)}$, $v_{\gamma 0}^{(0)}$.

Рассмотрим слоистые пластинки, у которых $a > 2$. Выясняя возможность удовлетворения граничных условий и условий сочленения слоев, приходим к выводу, что всю поверхностную нагрузку в нулевом приближении воспринимают на себя наружные слои. Это означает, что при $a > 2$ слоистая пластинка перестает работать как единое целое.

В данной работе исследовалось лишь внутреннее напряженное состояние. Поэтому приведенные исследования позволяют уточнять дифференциальные уравнения внутренней задачи для слоистых пластинок. Но, наряду с уточнением дифференциальных уравнений, следует проводить и уточнение граничных условий (для однородной пластинки см. [6]), что связано с рассмотрением напряженных состояний погранслоя.

Поступила 14 VII 1967 Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. Гольденвейзер А. Л., Колос А. В. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. Гусейн-Заде М. И. Построение теории изгиба слоистых пластинок. Тр. VI Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966.
4. Гусейн-Заде М. И. О некоторых свойствах напряженного состояния тонкого упругого слоя. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
5. Reissner E. On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math. 1947, vol. 5, No 1.
6. Колос А. В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.