Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

# О КИНЕМАТИКЕ УПРУГО-ВЯЗКИХ СРЕД С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Рассматривается кинематика упруго-вязких жидкостей с аддитивными деформациями. Получено кинематическое соотношение между тензорами скоростей полных и вязких деформаций и тензором упругих деформаций, лежащее в основе аксиоматического построения реологических моделей таких жидкостей. Найдено представление компонент тензора скоростей упругих деформаций через наблюдаемые величины, которое позволяет рассматривать изменение различных скалярных характеристик, обусловленное изменением упругого состояния жидкости. Развитый метод применим также к исследованию иных сплошных сред со сложными деформациями. Полученные результаты применены далее к построению нелинейной реологической модели сжимаемой упруго-вязкой жидкости максвелловского типа.

Рассматриваем ниже упруго-вязкие среды, полная деформация которых в произвольный момент времени может быть представлена в виде суммы упругой (обратимой) и вязкой (необратимой) деформаций. При этом вязкие деформации определяются как остаточные деформации при мгновенном освобождении среды от всех упругих деформаций. Вопрос о физической реализуемости такого процесса обсужден ниже, а пока что достаточно, что его всегда можно произвести мысленно в малой окрестности рассматриваемого материального элемента. Фиксируя некоторое начальное состояние, в котором вязкие деформации принимаются равными нулю, аналогичным путем можно определять и упругие составляющие полных деформаций среды.

§ 1. Следуя Л. И. Седову [1], определим в рассматриваемом объеме, заполненном упруго-вязкой жидкостью, две координатные системы: неподвижную эйлерову систему отсчета $\{x^i\}$ с базисными векторами $Э_i$ и лагранжеву конвективную систему координат $\{\xi^i\}$, вмороженную в элементы континуума таким образом, что значения $\xi^i$, отвечающие различным индивидуальным точкам среды, не зависят от времени. Исследуя только полные деформации среды, рассматриваем два положения континуума относительно координатной системы $\{x^i\}$, которым соответствуют два различных базиса лагранжевой системы координат $\{\xi^i\}$:

1. Начальное положение с векторами базиса $Э_i^{(1)}$; в этом базисе индивидуальным точкам среды соответствуют фиксированные неподвижные точки.

2. Положение деформируемой среды с базисными векторами $Э_i^{(2)}$. Расположение векторов $Э_i^{(2)}$ относительно $Э_i^{(1)}$ в некоторый момент времени определяет полные деформации среды, накопленные к этому моменту.

Формально можно рассматривать также движения элементов континуума, связанные только с вязкими или только с упругими составляющими полных деформаций. Это позволяет рассматривать еще два «промежуточных» положения элементов континуума, которым отвечают два других базиса лагранжевой конвективной системы координат [1].

1. Положение среды, которая испытывала бы только вязкие деформации, с базисными векторами $Э_i^{(3)}$. Базис $Э_i^{(3)}$ играет роль начального по отношению к упругим деформациям и роль конечного базиса по отношению к вязким деформациям. Расположение векторов $Э_i^{(3)}$ относительно $Э_i^{(1)}$ определяет вязкие деформации среды, а расположение $Э_i^{(2)}$ относительно $Э_i^{(3)}$ — упругие деформации. В каждый момент времени положение $^{(3)}$ среды получается из положения $^{(2)}$ в результате процесса мгновенного освобождения среды от всех упругих деформаций.

2. Аналогично положению $^{(3)}$ можно рассматривать также положение $^{(4)}$ среды, которая претерпевает лишь упругие составляющие полных деформаций. Соответствующие базисные векторы $Э_i^{(4)}$ представляют начальный базис для вязких и конечный базис для упругих деформаций.

Ясно, что положениям $^{(2)}$, $^{(3)}$, $^{(4)}$ среды отвечают представления об индивидуальных точках среды, имеющие различный смысл.

Для длин малого отрезка, составленного из одних и тех же точек континуума, имеем в различных положениях

$$d\mathbf{r}_k = d\xi^i Э_i^{(k)}, \quad ds_k^2 = g_{ij}^{(k)} d\xi^i d\xi^j, \quad g_{ij}^{(k)} = (Э_i^{(k)} Э_j^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, 4$$

В соответствии с наличием четырех фундаментальных форм различные тензоры можно рассматривать в четырех пространствах, определяемых разными положениями элементов континуума и соответствующих разным введенным базисам лагранжевой системы координат [1]. Установим соответствия

$$ds_2^2 = g_{ij}^{(2)} d\xi^i d\xi^j = g_{ij} dx^i dx^j, \quad ds_3^2 = g_{ij}^{(3)} d\xi^i d\xi^j = g_{ij} dx^{[i]} dx^{[j]}$$
$$ds_4^2 = g_{ij}^{(4)} d\xi^i d\xi^j = g_{ij} dx^{(i)} dx^{(j)}, \qquad g_{ij} = (Э_i Э_j)$$

Отсюда видно, что все тензоры, вводимые в пространствах $^{(2)}$, $^{(3)}$ и $^{(4)}$, можно одновременно рассматривать как тензоры, определенные в одном базисе $Э_i$, но по-прежнему в разных пространствах, соответствующих фундаментальным формам $ds_2^2$, $ds_3^2$ и $ds_4^2$. При этом величины $dx^{(i)}$ и $dx^{[i]}$ играют роль компонент векторов $d\mathbf{r}_4$ и $d\mathbf{r}_3$ в базисе $Э_i$. Точно так же все тензоры можно относить и к любому другому базису.

Используя базисы $Э_i^{(1)}$, $Э_i^{(2)}$ и $Э_i^{(3)}$, введем тензоры полной E, упругой (E) и вязкой [E] деформаций при помощи соотношений

$$\mathrm{E} = \varepsilon_{ij} Э_2^i Э_2^j = e_{ij} Э^i Э^j, \qquad \mathrm{E}_0 = \varepsilon_{ij} Э_1^i Э_1^j$$
$$(\mathrm{E}) = \varepsilon_{(ij)} Э_2^i Э_2^j = e_{(ij)} Э^i Э^j, \qquad (\mathrm{E})_0 = \varepsilon_{(ij)} Э_3^i Э_3^j$$
$$[\mathrm{E}] = \varepsilon_{[ij]} Э_3^i Э_3^j = e_{[ij]} Э^i Э^j, \qquad [\mathrm{E}]_0 = \varepsilon_{[ij]} Э_1^i Э_1^j \tag{1.1}$$
$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2 (g_{ij}^{(2)} - g_{ij}^{(1)}), \quad \varepsilon_{(ij)} = {}^1/_2 (g_{ij}^{(2)} - g_{ij}^{(3)}), \quad \varepsilon_{[ij]} = {}^1/_2 (g_{ij}^{(3)} - g_{ij}^{(1)})$$

Здесь индекс нуль относится к пространствам начальных состояний для соответствующих деформаций. Величины $e_{ij}$, $e_{(ij)}$, $e_{[ij]}$ и $\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{(ij)}$, $\varepsilon_{[ij]}$ можно считать функциями $t$ и $\xi^m$ или $t$ и $x^m$. Якобиан соответствующего преобразования предполагается не равным нулю. Аналогичным путем можно определить и другие тензоры, связанные с полными, упругими и вязкими деформациями, в различных базисах и пространствах.

Используя второй возможный способ описания деформаций среды и вводя базисы $Э_i^{(1)}$, $Э_i^{(2)}$, $Э_i^{(4)}$, получим вместо (1.1)

$$(\mathrm{E}') = \varepsilon'_{(ij)} Э_4^i Э_4^j = e_{(ij)} Э^i Э^j, \qquad (\mathrm{E}')_0 = \varepsilon'_{(ij)} Э_1^i Э_1^j$$
$$[\mathrm{E}'] = \varepsilon'_{[ij]} Э_2^i Э_2^j = e_{[ij]} Э^i Э^j, \qquad [\mathrm{E}']_0 = \varepsilon'_{[ij]} Э_4^i Э_4^j \tag{1.2}$$
$$\varepsilon'_{(ij)} = {}^1/_2 (g_{ij}^{(4)} - g_{ij}^{(1)}), \qquad \varepsilon'_{[ij]} = {}^1/_2 (g_{ij}^{(2)} - g_{ij}^{(4)})$$

Для E, $\mathrm{E}_0$ и $\varepsilon_{[ij]}$ справедливы прежние выражения (1.1).

Заметим, что, вообще говоря, $\varepsilon_{(ij)} \neq \varepsilon_{(ij)}'$ и $\varepsilon_{[ij]} \neq \varepsilon_{[ij]}'$. Эти утверждения прямо следуют из свойства некоммутативности конечных деформаций, а физически они соответствуют тому, что тензоры (E) и (E′) характеризуют состояние различных материальных волокон. Компоненты этих тензоров в эйлеровом базисе должны быть одинаковы ввиду физической однозначности процесса деформирования. Ниже для определенности использован только первый способ описания деформаций как более естественный при формулировке реологических моделей упруго-вязких жидкостей.

§ 2. Для компонент тензоров $\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{(ij)}$ и $\varepsilon_{[ij]}$ по определению (1.1) имеет место тождество, представляющее собой математическое выражение постулата об аддитивности деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{(ij)} + \varepsilon_{[ij]} \tag{2.1}$$

Это соотношение не имеет тензорного характера в том смысле, что оно не выполняется для контравариантных или смешанных компонент тензоров деформаций. Это связано с тем, что для поднятия индексов в различных членах (2.1) нужно использовать различные метрические тензоры. Однако при переходе от $\{\xi^i\}$ к какой-либо другой лагранжевой системе координат равенство (2.1) преобразуется по обычным тензорным правилам. Заметим, что соотношение аддитивности (2.1) не имеет места, вообще говоря, для величин $e_{ij}$, $e_{(ij)}$ и $e_{[ij]}$.

Рассматривая (2.1) в близкие моменты времени, получим уравнение для приращений компонент $\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{(ij)}$ и $\varepsilon_{[ij]}$ за время $dt$:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{(ij)} + d\varepsilon_{[ij]}$$
$$d\varepsilon_{ij} = \frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} dt, \quad d\varepsilon_{(ij)} = \frac{D\varepsilon_{(ij)}}{Dt} dt, \quad d\varepsilon_{[ij]} = \frac{D\varepsilon_{[ij]}}{Dt} dt \tag{2.2}$$

Здесь $D\,(\ldots)\,/\,Dt$ — символ конвективного дифференцирования компонент тензоров по времени (при постоянных $\xi^m$). Определения $d\varepsilon_{ij}$, $d\varepsilon_{(ij)}$ и $d\varepsilon_{[ij]}$ через соответствующие производные в (2.2) следуют из результатов [1]. Заметим, что эти производные берутся относительно различных положений деформируемого континуума, что сказывается на определении компонент соответствующих тензоров в эйлеровом базисе.

Так, для тензора скоростей полных деформаций и для величин $d\varepsilon_{ij}$ получим, используя известные правила преобразования конвективных тензорных производных по времени [1, 2]

$$\Gamma = \gamma_{ij}^{(2)} Э_2^i Э_2^j = (D\,(\ldots)/Dt)\,(\varepsilon_{ij} Э_2^i Э_2^j) = \gamma_{ij} Э^i Э^j = \{(\partial\,(\ldots)/dt + v^m \nabla_m)\, e_{ij} +$$
$$+ (\nabla_i v^m)\, e_{mj} + e_{im} \nabla_j v^m\}\, Э^i Э^j, \qquad d\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}^{(2)}\, dt$$

Аналогичная формула имеет место для тензора $(\Gamma)^*$, имеющего компоненты $D\varepsilon_{(ij)}/Dt$ в базисе $Э_i^{(2)}$, и для приращений $d\varepsilon_{(ij)}$, выраженных через эти компоненты.

Напротив, для тензора скоростей вязких деформаций и величин $d\varepsilon_{[ij]}$ получим формальные представления

$$[\Gamma] = \gamma_{[ij]}^{(3)} Э_3{}^i Э_3{}^j = (D(\cdots)/Dt)\, \varepsilon_{[ij]} Э_3{}^i Э_3{}^j = \gamma_{[ij]} Э^i Э^j =$$

$$= \left\{ (D(\cdots)/Dt)\, e_{[ij]} + \frac{\partial v^{[m]}}{\partial \xi^i} e_{[mj]} + e_{[im]} \frac{\partial v^{[m]}}{\partial \xi^j} \right\} Э^i Э^j, \qquad d\varepsilon_{[ij]} = \gamma_{[ij]}^{(3)}\, dt$$

Здесь $v^{[m]}$ — компоненты скорости, ассоциируемые с вязкими перемещениями жидкости. Как известно [1], разбиение полной скорости $v^i$, равно как и антисимметричного тензора $\omega_{ij}$, соответствующего полному вектору вихря, на упругие $v^{(i)}$, $\omega_{(ij)}$ и вязкие $v^{[i]}$, $\omega_{[ij]}$ составляющие неоднозначно. Однако величины $\gamma_{(ij)}$ и $\gamma_{[ij]}$ определяются однозначно. Только при этом условии можно говорить об определенном физическом (например упругом) состоянии среды.

Таким образом, из (2.2) получим основное кинематическое соотношение для скоростей деформаций

$$(D\varepsilon_{ij}/Dt)\, \varepsilon_{(ij)} + \gamma_{[ij]}{}^{(3)} = \gamma_{ij}{}^{(2)} \tag{2.3}$$

Подчеркнем, что в этом соотношении $\gamma_{[ij]}^{(3)}$ представляют компоненты тензора скоростей вязких деформаций в базисе $Э_i^{(3)}$, а все другие величины в (2.3) — компоненты тензоров в базисе $Э_i^{(2)}$.

Введем $d\eta^i$ как компоненты вектора $d\mathbf{r}_3 = d\xi^i Э_i^{(3)}$ в базисе $Э_i^{(2)}$. Величины $d\eta^i$ играют в принципе ту же роль, что и $dx^{(i)}$, $dx^{[i]}$, введенные выше. Введение $d\eta^i$ позволяет преобразовывать тензоры, определенные в пространстве, соответствующем положению $^{(3)}$ деформируемого континуума, к базису $Э_i^{(2)}$ подобно тому, как введение $dx^{(i)}$ и $dx^{[i]}$ позволило преобразовать тензоры, определенные в пространстве $^{(3)}$ или $^{(4)}$ к эйлерову базису. Величины $d\eta^i$ и $d\xi^i$ связаны формулами аффинного преобразования [1]

$$d\eta^i = C^{i\cdot}_{\cdot m}\, d\xi^m$$

Входящую сюда матрицу $\mathbf{C}$ можно рассматривать как матрицу, определяющую преобразование базисных векторов $Э_i^{(3)} \to Э_i^{(2)}$, отнесенных к одному и тому же пространству. Для нее имеем представление [1]

$$\mathbf{C} = e^{\mathbf{K}} (\mathbf{g}^{(2)} - 2\boldsymbol{\varepsilon})^{1/2}, \quad \mathbf{C}' = (\mathbf{g}^{(2)} - 2\boldsymbol{\varepsilon})^{1/2} e^{-\mathbf{K}}, \quad \mathbf{g}^{(2)} = \| g_{ij}{}^{(2)} \|, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \| \varepsilon_{(ij)} \| \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{K}$ — антисимметричная матрица, соответствующая вектору вращения главных осей упругой деформации, а штрих означает операцию транспонирования.

Для компонент $\gamma_{[ij]}^{(3)}$ тензора скоростей вязких деформаций в базисе $Э_i^{(3)}$ имеем следующие представления через компоненты этого тензора в базисе $Э_i^{(2)}$:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(3)} = \mathbf{C}' \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \mathbf{C}, \qquad \boldsymbol{\gamma}^{(k)} = \| \gamma_{[ij]}^{(k)} \| \qquad (k = 2, 3)$$

Подставляя это в (2.3), получим соотношение, которое можно рассматривать как тензорное

$$(D(\cdots)/Dt)\,\varepsilon_{(ij)} + C'^{\cdot m}_{i\cdot}\,\gamma^{(2)}_{[mn]}\,C^{n\cdot}_{\cdot j} = \gamma_{ij}{}^{(2)} \tag{2.5}$$

Кинематическое соотношение (2.5) играет фундаментальную роль в формулировке инвариантных реологических уравнений.

§ 3. Независимым путем можно получить дополнительно к (2.5) соотношение [1]

$$\gamma_{(ij)} + \gamma_{[ij]} = \gamma_{ij}, \qquad \gamma_{ij} = {}^1/_2(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$$
$$\gamma_{(ij)} = {}^1/_2(\nabla_i v_{(j)} + \nabla_j v_{(i)}), \quad \gamma_{[ij]} = {}^1/_2(\nabla_i v_{[j]} + \nabla_j v_{[i]}) \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) также можно рассматривать как тензорное, и, в частности, записать его для компонент тензоров скоростей деформаций в базисе $Э_i{}^{(2)}$. Очевидно, что соотношения (3.1) и (2.5) должны совпадать, ибо они содержат одну и ту же информацию о движении среды. Получим тогда из (2.5) и (3.1) следующее тензорное уравнение

$$\gamma^{(2)}_{(ij)} = (D(\cdots)/Dt)\,\varepsilon_{(ij)} + C'^{\cdot m}_{i\cdot}\gamma^{(2)}_{[mn]}C^{n\cdot}_{\cdot j} - \gamma^{(2)}_{[ij]} \tag{3.2}$$

Величины $\gamma^{(2)}_{(ij)}$ представляют собой компоненты тензора скоростей упругих деформаций (Г) в базисе $Э_i{}^{(2)}$. Тензор (Г), как легко видеть, отличен от тензора (Г)*, введенного ранее, который представляет кинематическую характеристику движения, связанную с изменением как упругих, так и вязких деформаций. Это вызвано тем, что сам тензор (Е) описывает истинное упругое состояние материальных элементов среды неоднозначно.

На самом деле, введем элементы длины $ds_k{}^i$ ($k = 2{,}3$) вдоль $i$-й главной оси тензоров $(E)_0$ и (Е) в соответствующих пространствах. Ясно, что разности $ds_2{}^i - ds_3{}^i$ однозначно определены компонентами $\varepsilon_{(ii)}$ тензоров $(E)_0$ и (Е) в этих осях. Упругое состояние среды однозначно определяется значениями главных удлинений [1]

$$\overset{\circ}{\varkappa}_{(i)} = \frac{ds_2{}^i - ds_3{}^i}{ds_3{}^i}, \qquad \varkappa_{(i)} = \frac{ds_2{}^i - ds_3{}^i}{ds_2{}^i}$$

или собственными значениями

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{(i)} = g_3{}^{ii}\varepsilon_{(ii)}, \qquad \varepsilon_{(i)} = g_2{}^{ii}\varepsilon_{(ii)}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

тензоров $(E)_0$ и (Е), от которых однозначно зависят величины $\varkappa_{(i)}{}^\circ$ и $\varkappa_{(i)}$. Легко видеть, что эти величины представляют собой функции не только разностей $ds_2{}^i - ds_3{}^i$, но и элементов $ds_3{}^i$ или $ds_2{}^i$, которые в равной мере определяются развитием вязких деформаций в системе. Поэтому величины $\varepsilon_{(ij)}$ можно рассматривать как представительные характеристики упругого состояния среды лишь в случаях, когда вязкие движения не приводят к изменению элементарных длин в материале, т. е. $\gamma_{[ij]} \equiv 0$. Правильные выражения для $\gamma_{(ij)}$ получатся, очевидно, если дифференцировать $\varepsilon_{(ij)}$, налагая, помимо условия постоянства $\xi^m$, также условие неизменности длин векторов $Э_i{}^{(3)}$, или, что то же самое, условие постоянства диагональных компонент метрического тензора $g_3{}^{ii}$ в главных осях тензоров $(E)_0$, (Е). Заметим, что повороты векторов $Э_i{}^{(3)}$ относительно $Э_i{}^{(1)}$ при таком дифференцировании не фиксируются и могут быть произвольными, ибо они не влияют на изменение материальных длин.

Используя соображения, подобные тем, которые применяются при введении ямановской производной, видим, что правильные значения $\lambda_{(ij)}$ и $\gamma_{(ij)}^{(2)}$ получатся, если при дифференцировании $\varepsilon_{(ij)}$ и последующем переходе к эйлеровому базису формально считать $\gamma_{ij} = \gamma_{(ij)}$. Имеем в результате для величин $\gamma_{(ij)}$ в эйлеровом базисе уравнение

$$\begin{gathered}\gamma_{(ij)} = (\partial/\partial t + v^m \nabla_m) e_{(ij)} + e_{(im)} \gamma_{(\cdot j)}^{(m \cdot)} + \gamma_{(i \cdot)}^{(\cdot m)} e_{(mj)} + \\ + e_{(im)} \omega_{\cdot j}^{m \cdot} + \omega_{i \cdot}^{\cdot m} e_{(mj)}, \qquad \omega_{ij} = {}^1/_2 (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)\end{gathered} \tag{3.3}$$

В лагранжевом базисе $Э_i^{(2)}$ формуле (3.3) соответствует следующее представление

$$\gamma_{(ij)}^{(2)} = (D(\cdots)/Dt)\, \varepsilon_{(ij)} - \varepsilon_{(im)} \gamma_{[\cdot j]}^{(2)[\cdot m]} - \gamma_{[i \cdot]}^{(2)[m \cdot]} \varepsilon_{(mj)} \tag{3.4}$$

Сравним соотношения (3.2) и (3.4). Для этого представим матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ из (2.4) в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{C} = (\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2} + (e^{\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})(\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2} \\ \mathbf{C}' = (\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2} + (\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2}(e^{-\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})\end{gathered}$$

Первые члены в этих выражениях не зависят от $\mathbf{K}$, вторые обращаются в нуль при $\mathbf{K} \to 0$. Имеем матричное равенство

$$\begin{gathered}\mathbf{C}'\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\mathbf{C} = (\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2} [\boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)}(e^{\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)}) + (e^{-\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})\boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \\ + (e^{-\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})\boldsymbol{\gamma}^{(2)}(e^{\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})] (\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2}\end{gathered}$$

При построении реологических моделей тензоры (E) и [Г] при помощи тех или иных постулатов выражаются в виде тензорных функций от одного и того же тензора $\mathbf{T}$. Поэтому матрицы $\varepsilon$ и $\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ можно считать коммутирующими. Тогда сравнение (3.2) и (3.4) приводит к уравнению

$$\begin{gathered}(\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2} [\boldsymbol{\gamma}^{(2)}(e^{\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)}) + (e^{-\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})\boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \\ + (e^{-\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})\boldsymbol{\gamma}^{(2)}(e^{\mathbf{K}} - \mathbf{g}^{(2)})] (\mathbf{g}^{(2)} - 2\,\varepsilon)^{1/2} = 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) налагает определенные ограничения на возможные в системе деформации. Грубо говоря, для упругих (или вязких) деформаций, взятых отдельно, уравнение (3.5) играет роль известного уравнения совместности. В общем случае конечных деформаций уравнение (3.5) отлично от обычно используемого в геометрически нелинейной теории уравнения совместности. Поэтому базисы $Э_i^{(3)}$ и $Э_i^{(4)}$ вводятся, вообще говоря, в неэвклидовых искривленных пространствах, соответствующих положениям $^{(3)}$ и $^{(4)}$ деформируемого континуума. Нарушение эвклидовости эквивалентно нарушению сплошности среды при упомянутом выше мысленном процессе освобождения среды от упругих деформаций.

Легко видеть, что процесс разгрузки, при котором вязкие деформации остаются неизменными, не осуществим без нарушения сплошности среды. Действительно, рассмотрим сложное напряженное состояние упруго-вязкой жидкости с аддитивными деформациями. Грубым аналогом такого состояния будет состояние системы, состоящей из вязкой жидкости и погруженного в нее упругого деформированного образца.

При снятии упругих деформаций и при условии, что положение отдельных элементов вязкой жидкости при этом не изменяется, приходим к состоянию, в котором имеются полости, свободные от вещества, а также участки, содержащие одновременно и жидкость, и упругое тело. Иначе говоря, приходим к пространству, имеющему «дырки», которые и делают его неэвклидовым. Аналогичные соображения о неэвклидовости «промежуточного» пространства излагаются в современной теории пластичности [1].

Выдвигая в качестве необходимого условия сохранение сплошности среды при реальном процессе разрузки, видим, что снятие напряжений возможно лишь за конечные не равные нулю промежутки времени, так как этот процесс неминуемо сопровождается дополнительными вязкими деформациями. С физической точки зрения, это означает, что реально осуществимо только мгновенное снятие внешних сил, действующих на систему. Если ввести базис $Э_i'$, описывающий положение континуума после реального процесса разгрузки, то сам процесс разгрузки можно интерпретировать как движение базисов $Э_i^{(3)}$ и $Э_i^{(2)}$ к базису $Э_i'$ вплоть до совпадения с ним. Из изложенного следует, что использованный выше мысленный процесс освобождения среды от упругих деформаций может быть непротиворечиво определен, вообще говоря, только локально.

Заметим, что уравнения (3.5), а следовательно, и представления (3.3) и (3.4) для компонент тензора скоростей упругих деформаций, можно получить из (2.5) и (3.2) совершенно независимым путем, используя соображения физической инвариантности, развитые в [2]. Действительно, по смыслу реологического уравнения, оно характеризует процессы, происходящие в фиксированной материальной точке, перемещающейся как часть континуума, и должно содержать, помимо материальных тензорных и скалярных величин, только наблюдаемые динамические и кинематические величины, связанные именно с данной точкой континуума. В частности, реологическое уравнение не должно зависеть от параметров, описывающих вращение данного материального элемента при деформировании, а также вращение всего континуума как твердого целого. Это связано с тем, что вращение некоторой частицы среды существенно зависит от состояния соседних частиц среды. Применяя эти соображения, сразу же получим уравнение (3.5) со всеми вытекающими последствиями.

Ниже соотношения (2.5), (3.3) использованы при построении реологической модели сжимаемой максвелловской упруго-вязкой жидкости с геометрической и физической нелинейностью. Максвелловская жидкость определяется обычно как среда с аддитивными деформациями, которые связываются с напряжениями в течении при помощи дополнительных постулатов.

§ 4. Обычно предполагается [2], что тензор напряжений $p_{ij}$ в упругом элементе максвелловской модели связан с тензором упругих деформаций линейным соотношением

$$p_{ij} = 2\mu\varepsilon_{(ij)} \tag{4.1}$$

Здесь $\mu$ — модуль сдвига жидкости. Относительное изменение объема, связанное с упругим деформированием, может быть записано в виде

$$\varkappa = [(1-2\varepsilon_1)\ (1-2\varepsilon_2)\ (1-2\varepsilon_3)]^{-1/2} - 1 \tag{4.2}$$

Здесь $\varepsilon_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — собственные значения тензора упругих деформаций в лагранжевом базисе.

В принципе в упруго-вязкой среде можно реализовать как угодно высокие напряжения. В частности, можно считать, что некоторые собственные значения тензора $p_{ij}$ больше $1/2\ \mu$, так что соответствующие величины $2\varepsilon_i$ больше единицы. Вспоминая определение $2\varepsilon_{(ij)}$ видим, что деформирование, описываемое законом Гука (4.1), приводит формально к изменению сигнатуры метрического тензора со всеми вытекающими отсюда последствиями. Из (4.2) видно, например, что $\varkappa$ в этом случае становится комплексной величиной. Аналогичные парадоксы возникают и при попытке рассмотреть энергетические процессы в течениях упруго-вязкой жидкости.

Известно далее, что даже для обобщенной сдвиговой упругой деформации должно автоматически удовлетворяться условие сохранения удельного объема [3]. Из (4.1) и (4.2) следует, что при конечных деформациях это естественное требование не выполняется. Например, для простого сдвига имеем

$$\varkappa = [1-(p_1/\mu)^2]^{-1/2} - 1 \neq 0$$

Здесь $p_1$ и $-p_1$ — собственные значения тензора напряжений.

Даже при малых упругих деформациях соотношению (4.1) фактически соответствует допущение, что данная упруго-вязкая среда обладает модулем всестороннего сжатия, в точности равным $^2/_3\,\mu$. Учитывая, что реальные среды обладают модулем сдвига порядка $10^6$—$10^7$ *дн/см*$^2$, видим, что это допущение эквивалентно предположению о весьма высокой сжимаемости среды. В экспериментах же сжимаемость упруго-вязких сред весьма незначительна, даже если давление $p \gg \mu$.

Последняя трудность максвелловской модели тесно связана с проблемой описания несжимаемой упруго-вязкой среды. Можно считать «несжимаемыми», т. е. не приводящими к изменению удельного объема, полные деформации в течении, либо же относить это требование только к вязким составляющим полных деформаций.

В первом случае приходится неявно предполагать, вообще говоря, что относительное изменение объема при упругом деформировании компенсируется противоположным по знаку изменением удельного объема, связанным с вязким деформированием и происходящим за счет действия некоторого дополнительного физического фактора.

Во втором случае допускается, что единственной причиной возможного изменения удельного объема, т. е. сжимаемости среды, будут упругие деформации. Первая гипотеза требует введения некоего нового механизма сжимаемости, отличного от упругого деформирования (например, явного рассмотрения структурных изменений в движущейся жидкости). Вторая гипотеза в рамках излагаемой схемы вполне естественна, имеет достаточно прочные физические основания и может быть сформулирована по аналогии с такой же гипотезой в гидродинамике несжимаемой вязкой жидкости.

Таким образом, возникает необходимость замены линейного соотношения (4.1) неким более адэкватным соотношением, не приводящим к физическим парадоксам. Заметим, что в принципе и закон Ньютона, постулируемый для вязкого элемента модели, можно заменить неким нелинейным соотношением между тензорами напряжений и скоростей вязких деформаций. Однако можно полагать, что такая замена не скажется существанным образом на качестве рассматриваемых упруго-вязких сред и поведет лишь к количественному изменению характеристик различных течений.

§ 5. Представим тензор напряжений $p_{ij}$ в виде

$$p_{ij} = -pg_{ij} + \tau_{ij}, \qquad P_1 = -3p + T_1 \tag{5.1}$$

Здесь $P_1$ и $T_1$ — первые инварианты тензоров $p_{ij}$ и $\tau_{ij}$, $g_{ij}$ — компоненты метрического тензора. Первый член в правой части (5.1) описывает чисто обратимый «идеальный» перенос импульса в системе, а второй член определяет необратимый «вязкий» перенос импульса. Наиболее общее линейное соотношение между $\tau_{ij}$ и тензором скоростей вязких деформаций $\gamma_{[ij]}$ имеет вид

$$\tau_{ij} = 2\eta\,(\gamma_{[ij]} - {}^1/_3\,\Gamma_1 g_{ij}) + \zeta\Gamma_1 g_{ij}, \qquad \Gamma_1 = g^{ij}\gamma_{[ij]}$$

Здесь $\eta$ и $\zeta$ — коэффициенты вязкости жидкости. Как будет видно ниже, $\Gamma_1 \equiv 0$. Отсюда следует $T_1 = 3\zeta\,\Gamma_1 \equiv 0$. Учитывая последнее равенство, для связи тензоров $\gamma_{[ij]}$ и $\tau_{ij}$ получим закон Ньютона в форме

$$\tau_{ij} = 2\eta\gamma_{[ij]} \tag{5.2}$$

Естественное обобщение (4.1) на тело с произвольной сжимаемостью в физически линейной теории представляется соотношением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{P_1}{9K} g_{ij} + \frac{1}{2\mu}\left(p_{ij} - \frac{P_1}{3} g_{ij}\right), \qquad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{5.3}$$

Модуль всестороннего сжатия $K$ определяется через коэффициенты Ламе $\lambda$ и $\mu$ таким образом, чтобы относительное изменение объема, связанное со вторым членом в правой части (5.3), при малых деформациях было тождественно равно нулю. Можно попытаться обобщить (5.3) на несжимаемые упругие среды с конечными деформациями, заменяя первый инвариант $P_1$ тензора $p_{ij}$ в (5.3) на такую функцию всех трех инвариантов $P_i$ этого тензора, чтобы второе слагаемое в модифицированной зависимости (5.3) по-прежнему не приводило к изменению удельного объема. Эта функция имеет смысл множителя Лагранжа в некоторой вариационной задаче [1]. Заменяя $^1/_3 P_1$ в (5.3) на $f(P_i)$ и полагая $K \to \infty$, получим условие несжимаемости в виде

$$(1-2\varepsilon_1)(1-2\varepsilon_2)(1-2\varepsilon_3) = 1$$

Вводя безразмерные параметры $f = \mu\varphi$, $p_{ij} = \mu\pi_{ij}$ и инварианты

$$\Pi_1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, \qquad \Pi_2 = \pi_1\pi_2 + \pi_2\pi_3 + \pi_3\pi_1, \qquad \Pi_3 = \pi_1\pi_2\pi_3$$

получим для $\varphi$ уравнение

$$\varphi^3 + (3 - \Pi_1)\varphi^2 + (3-2\Pi_1 + \Pi_2)\varphi - (\Pi_1 - \Pi_2 + \Pi_3) = 0 \qquad (5.4)$$

Ясно, что нужно взять корень $\varphi$ этого уравнения, который при $\pi_i \ll 1$ равен $^1/_3\,\Pi_1$. Легко видеть, что деформирование, описываемое модифицированным соотношением (5.3), по-прежнему приводит к изменению сигнатуры метрического тензора. Пусть, например, $\pi_1 = x$, $\pi_2 = \pi_3 = -{}^1/_2 x$, так что $\Pi_1 \equiv 0$. Тогда в частном случае $x = -3$ уравнение (5.4) имеет решение $\varphi = 0$, и $1-2\varepsilon_2 < 0$, $1-2\varepsilon_3 < 0$, что и означает изменение сигнатуры. Кроме того, если снова ввести конечный модуль $K$, деформация чистого сдвига по-прежнему приводит к изменению удельного объема. Таким образом, рассмотренный феноменологический способ обобщения (5.3) на системы с конечными деформациями не приводит к получению непротиворечивой связи между тензорами напряжений и упругих деформаций.

Пусть свободная энергия единицы объема тела в деформированном состоянии есть $F(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})$. Рассматривая изменение $dF$ величины $F$ при изменении $d\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j}$ тензора упругих деформаций, запишем

$$dF = p_{\cdot j}^{i\cdot} d\varepsilon_{\cdot i}^{j\cdot} + {}^1/_2\,\lambda\,(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})\,(d\varepsilon_{\cdot i}^{i\cdot})^2 + \mu\,(\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j})\,d\varepsilon_{\cdot j}^{i\cdot} d\varepsilon_{\cdot i}^{j\cdot} \qquad (5.5)$$

Для упрощения записи круглые скобки в обозначениях индексов компонент тензора упругих деформаций здесь и ниже опущены.

Это выражение представляет просто разложение в ряд приращения свободной энергии упругого деформирования в окрестности некоторого деформированного состояния, характеризуемого величинами $\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j}$. Возможность выбора такого состояния в качестве начального подчеркивается в [1]. Очевидно, если $\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j} = 0$, т. е. в качестве начального выбрано состояние, в котором деформации и какие-либо остаточные напряжения отсутствуют, то первый член в правой части (5.5) выпадает.

В принципе можно использовать самые различные формы функции $F$. Здесь предположим, что коэффициенты $\lambda$ и $\mu$ в (5.5) постоянны. Это предположение эквивалентно постулированию «однородности» относительных деформаций — их независимости от деформаций в невозмущенном состоянии материала. Применяя к (5.5) стандартные приемы, получим

$$d\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j} = -\frac{dp}{3K}\delta_i^j + \frac{1}{2\mu}\left(dp_{i\cdot}^{\cdot j} - dp\,\delta_i^j\right) \qquad (5.6)$$

В отличие от (5.3), выражающего линейность процесса деформирования в целом, соотношение (5.6) выражает линейность этого процесса в малом. Если бы это соотношение допускало непосредственное интегрирование, то получился бы линейный закон (5.3), или, в частном случае $K = {}^2/_3\mu$, закон (4.1). В общем случае конечных деформаций такое интегрирование провести нельзя, что связано с неаддитивностью приращений $d\varepsilon_i^{\,j}$ при последовательных деформациях [1].

Представим формально процесс упругого деформирования как процесс, проходящий через такие промежуточные состояния, что тензоры $\varepsilon_{ij}'$ в этих состояниях имеют те же главные оси, что и тензор $\varepsilon_{ij}$ в конечном деформированном состоянии. В главных осях имеем из (5.6) уравнение

$$d\varepsilon_i = \frac{dl_i'}{l_i'} = -\frac{dp'}{3K} + \frac{1}{2\mu}(dp_i' - dp')$$

Здесь $l_i'$ — длина некоторого линейного элемента вдоль $i$-й главной оси в промежуточном деформированном состоянии, равная $l_i^\circ$ в начальном и $l_i$ в конечном состояниях. Интегрируя это уравнение, получим

$$l_i = l_i^\circ \exp\left[-\frac{p}{3K} + \frac{1}{2\mu}(p_i - p)\right]$$

Используя определение относительных удлинений материальных элементов в направлениях главных осей через собственные значения тензора упругих деформаций в конечном состоянии и переходя от уравнений для $\varepsilon_i$ к соответствующему тензорному уравнению, получим в конвективном базисе, связанном с конечным деформированным состоянием, следующее уравнение связи между $\varepsilon_{ij}$ и $p_{ij}$

$$\mathbf{E} = {}^1/_2(\mathbf{G} - e^{-2\mathbf{H}}), \quad \mathbf{E} = \|\varepsilon_{ij}\|, \quad \mathbf{P} = \|p_{ij}\|, \quad \mathbf{T} = \|\tau_{ij}\|, \quad \mathbf{G} = \|g_{ij}\| \qquad (5.7)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{p}{3K}\mathbf{G} + \frac{1}{2\mu}(\mathbf{P} - p\mathbf{G}) = -\frac{p}{3K}\mathbf{G} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{T}$$

Совершенно аналогично для тензора упругих деформаций $\mathbf{E}_0$, определенного в пространстве начальных состояний, получим

$$\mathbf{E}_0 = {}^1/_2(e^{2\mathbf{H}_0} - \mathbf{G}_0) \qquad (5.8)$$

Обратные к (5.7) соотношения имеют вид (5.9)

$$\mathbf{H} = -{}^1/_2 \ln(\mathbf{G} - 2\mathbf{E}), \quad \mathbf{P} = -\mu \ln(\mathbf{G} - 2\mathbf{E}) + 3\alpha p\mathbf{G}, \quad \alpha = {}^1/_3({}^2/_3\,\mu/k - 1)$$

Тензор «истинных» деформаций $\mathbf{H}$ неоднократно использовался ранее в теории конечных упругих деформаций, в частности, линейная связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{H}$ постулировалась Генки. Для первых инвариантов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{E}_1$ тензоров $p_{ij}$ и $\varepsilon_{ij}$ имеем из (5.9) формулы

$$P = -3p = -\mu(1 + 3\alpha)^{-1} \ln[(1 - 2\varepsilon_1)(1 - 2\varepsilon_2)(1 - 2\varepsilon_3)]$$

$$E_1 = {}^1/_3(3 - e^{-2h_1} - e^{-2h_2} - e^{-2h_3}), \qquad h_i = (2\mu)^{-1}(p_i - 3\alpha p) \qquad (5.10)$$

Сжимаемость упруго-вязкой среды, характеризуемой соотношениями (5.7) — (5.10), при выполнении принятой в § 4 гипотезы, что единственная причина изменения удельного объема среды состоит в ее упругом деформировании, всецело определяется величиной модуля $K$. Достаточно рассмотреть лишь всестороннее сжатие такого материала. Имеем при $p_i = -p$ $(i = 1, 2, 3)$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \exp\frac{2p}{3K}\right), \qquad \varkappa = \exp\frac{-p}{K} - 1$$

Наоборот, сдвиговые деформации вообще не вызывают изменения объема при любых $K$, как это и должно быть. Например, для простого сдвига получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \exp\frac{-p_{12}}{\mu}\right), \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \exp\frac{p_{12}}{\mu}\right), \qquad \varepsilon_3 = 0, \qquad \varkappa = 0$$

Очевидно, что собственные значения тензора $\mathbf{H}$ всегда отрицательны, так что парадоксы, связанные с изменением сигнатуры метрического тензора, в данном случае вообще не возникают.

§ 6. Используя результаты § 3, представим кинематическое соотношение (2.5) в форме

$$\begin{aligned}&(\partial / \partial t + v^m \nabla_m) e_{ij} + e_{im} \nabla_j v^m + (\nabla_i v^m) e_{mj} + \\ &+ (\delta_i^m - 2e_{i\cdot}^{\cdot m}) \gamma_{[mj]} = \gamma_{ij} = {}^1/_2 (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)\end{aligned} \tag{6.1}$$

Выбирая в качестве определяющих переменных компоненты тензора упругих деформаций и скорости полных перемещений среды, из (6.1) с учетом (5.2) и (5.9) получим реологическое уравнение

$$\begin{aligned}&2\eta \left[(\partial / \partial t + v^m \nabla_m) e_{ij} + e_{im} \nabla_j v^m + (\nabla_i v^m) e_{mj}\right] - \\ &- \mu (\delta_i^m - 2e_{i\cdot}^{\cdot m}) \{\ln (\mathbf{G} - 2\mathbf{E})\}_{mj} + (1 + 3\alpha) p (g_{ij} - 2e_{ij}) = 2\eta\gamma_{ij}\end{aligned} \tag{6.2}$$

Учитывая определение $\mathbf{E}$ через $\mathbf{P}$ или $\mathbf{T}$ согласно (5.7), из (6.2) нетрудно получить также реологическое уравнение, записанное в терминах переменных $p_{ij}$ или $\tau_{ij}$.

Компоненты тензора Генки $\mathbf{H}$ могут быть выражены через $e_{ij}$ при помощи формулы Лагранжа — Сильвестра. Используя далее теорему Гамильтона — Кели, приходим к уравнению, квадратичному по $e_{ij}$ (или по $p_{ij}$, $\tau_{ij}$), с коэффициентами, зависящими от инвариантов тензора $\mathbf{E}$.

При малых упругих деформациях тензор $\mathbf{H}$ можно разложить в ряд по $\mathbf{E}$. Тогда из (6.2) получим приближенное уравнение

$$\begin{aligned}&\eta \left[(\partial / \partial t + v^m \nabla_m) e_{ij} + e_{im} \nabla_j v^m + (\nabla_i v^m) e_{mj}\right] + \\ &+ (\delta_i^m - 2e_{i\cdot}^{\cdot m}) \left[\mu e_{mj} + {}^1/_2 (1 + 3\alpha) p g_{mj}\right] = \eta\gamma_{ij}\end{aligned} \tag{6.3}$$

Или, в терминах $\tau_{ij}$, это уравнение имеет вид (используем следующее из (5.7) приближенное соотношение $\mathbf{H} \approx \mathbf{E}$)

$$\begin{aligned}&\theta \left[(\partial / \partial t + v^m \nabla_m) p_{ij}' + p_{im}' \nabla_j v^m + (\nabla_i v^m) p_{mj}'\right] + \\ &+ (\delta_i^m - \mu^{-1} p_{i\cdot}'^{\cdot m}) \tau_{mj} = 2\eta\gamma_{ij}, \qquad p_{ij}' = \tau_{ij} - (1 + 3\alpha) p g_{ij}\end{aligned} \tag{6.4}$$

Здесь $\theta$ — единственное время релаксации жидкости.

Для несжимаемой жидкости $K \to \infty$ и $\alpha = -1/_3$. Поэтому уравнение (6.2) приобретает вид

$$2\eta\,[(\partial/\partial t + v^m \nabla_m) e_{ij} + e_{im} \nabla_j v^m + (\nabla_i v^m) e_{mj}] -$$
$$-\mu\,(\delta_i^{\ m} - 2e_{i\cdot}^{\cdot m}) \{\ln (\mathrm{G} - 2\mathrm{E})\}_{mj} = 2\eta\gamma_{ij}$$

Уравнение (6.4) для несжимаемой жидкости запишется в форме

$$\theta\,[(\partial/\partial t + v^m \nabla_m) \tau_{ij} + \tau_{im} \nabla_j v^m + (\nabla_i v^m) \tau_{mj}] + (\delta_i^{\ m} - \mu^{-1}\tau_{i\cdot}^{\cdot m}) \tau_{mj} = 2\eta\gamma_{ij}$$

Можно ожидать, что сжимаемость упруго-вязкой среды окажется особенно существенной при исследовании устойчивости различных стационарных течений, ибо она может в принципе вызвать появление в течении упругих волн сжатия — разрежения, отличных от звуковых, которые в свою очередь могут стимулировать развитие обычной гидродинамической неустойчивости. Возможная роль эффектов сжимаемости в развитии гидродинамической неустойчивости течений упруго-вязких жидкостей обсуждается в [4].

Заметим, что в реологическое уравнение входит введенная в (5.1) величина $p$, играющая роль эффективного внешнего давления. Это связано с тем, что при нелинейной зависимости упругих деформаций от напряжений способность жидкости к дальнейшему абсолютному упругому деформированию зависит от уже имеющихся деформаций. Последнее позволяет до некоторой степени понять известные опыты по стабилизации течений упруго-вязкой жидкости при повышении внешнего давления.

Свернем кинематическое соотношение (6.1) с тензором $g^{ij}$. Учитывая (3.3), получим в результате равенство

$$g^{ij}\gamma_{(ij)} + g^{ij}\gamma_{[ij]} = g^{ij}\gamma_{ij} \tag{6.5}$$

Правая часть в этом равенстве представляет скорость изменения удельного объема жидкости, первый и второй члены в левой части (6.5) — скорости изменения удельного объема, обусловленные соответственно упругими и вязкими деформациями. По сделанным в § 4 предположениям, $\Gamma_1 = g^{ij}\gamma_{[ij]} \equiv 0$, что оправдывает формулировку закона Ньютона в форме (5.2). Первый член в левой части (6.5) удовлетворяет уравнению, следующему из (3.3),

$$g^{ij}\gamma_{(ij)} = (\partial/\partial t + v^m \nabla_m)\, g^{ij} e_{ij} + 2g^{ij} e_{im} \gamma_{(\cdot j)}^{(m\cdot)}$$

Отсюда видно, что $g^{ij}\gamma_{(ij)} = g^{ij}\gamma_{ij}'$, где $\gamma_{ij}'$ удовлетворяют матричному уравнению

$$(\mathrm{G} - 2\mathrm{E})\,\gamma' = (\partial/\partial t + v^m \nabla_m)\,\mathrm{E}, \qquad \gamma' = \|\gamma_{ij}'\|$$
$$\gamma' = (\mathrm{G} - 2\mathrm{E})^{-1} (\partial/\partial t + v^m \nabla_m)\,\mathrm{E} \tag{6.6}$$

Здесь явно учтено, что метрический тензор эйлеровой координатной системы не зависит от времени.

Для плотности жидкости $\rho$ имеем, следовательно, уравнение

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right)\rho = -g^{ij}\gamma_{(ij)} = -\{(\mathrm{G} - 2\mathrm{E})^{-1}\}^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^m \nabla_m\right) e_{ij} \tag{6.7}$$

Уравнение (6.7) играет роль термодинамического уравнения состояния упруго-вязкой среды. Заметим, что в силу (6.5), из уравнения (6.7) и уравнения неразрывности для полных деформаций упруго-вязкой жидкости непосредственно следует уравнение $g^{ij}\gamma_{[ij]} = 0$.

§ 7. Дополнительно к реологическому уравнению для описания движения упруго-вязкой жидкости имеем динамические уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности. В эйлеровой системе координат они имеют вид

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v^m\nabla_m\right)v_i=-\nabla^m p_{im}+\rho f_i,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla^m(\rho v_m)=0 \tag{7.1}$$

Легко видеть, что уравнения (7.1) вместе с уравнениями (6.2) и (6.7) составляют полную систему уравнений для определения десяти неизвестных $v_i$, $\tau_{ij}$, $p$ и $\rho$, описывающих механическое поведение среды. Независимых величин $\tau_{ij}$ всего пять, так как они связаны условием $T_1=0$, следующим из уравнения $g^{ij}\gamma_{[ij]}=0$.

Из первых уравнений (7.1) обычным путем [1] получим уравнение энергии, в котором все величины отнесены к единице объема среды,

$$\begin{gathered}dE=dA_1+dA_2+dA_3,\quad dE=\rho v^i dv_i\quad f_i=f_i^{(1)}+f_i^{(2)}\\ dA_1=\rho f_i^{(1)}v^i dt+dA',\quad dA_2=\rho f_i^{(2)}v^i dt,\quad dA_3=-p_{ij}\gamma^{ij}dt\end{gathered} \tag{7.2}$$

Здесь $dE$ — изменение кинетической энергии жидкости, $dA_1$ — работа всех внешних сил, причем $dA'$ — работа внешних поверхностных сил, $dA_2$ — работа потенциальных объемных сил, $dA_3$ — элементарная работа внутренних поверхностных сил. Величины $f_i^{(1)}$ и $f_i^{(2)}$ представляют соответственно непотенциальные и потенциальные массовые силы.

Из уравнения (6.1) с учетом (3.3) получим уравнение

$$-dA_3=p^{ij}\gamma_{ij}dt=p^{ij}\gamma_{(ij)}dt+p^{ij}\gamma_{[ij]}dt \tag{7.3}$$

Первый член в правой части (7.3) представляет элементарную работу внутренних напряжений на упругих деформациях среды и равен приращению $dF$ свободной энергии упругости. Второй член в правой части (7.3) описывает вязкую диссипацию энергии $Wdt$. Используя уравнение (5.2), для $W$ получим выражение

$$W=(2\eta)^{-1}p^{ij}\tau_{ij}=(2\eta)^{-1}\tau^{ij}\tau_{ij} \tag{7.4}$$

Здесь было учтено также тождество $g^{ij}\tau_{ij}\sim g^{ij}\gamma_{[ij]}\equiv 0$.

Для приращения свободной энергии упругости из (3.3) получим уравнение

$$dF=p^{ij}\gamma_{(ij)}dt=p^{ij}(\partial/\partial t+v^m\nabla_m)e_{ij}dt+2p^{ij}e_{im}\gamma^{(m\cdot)}_{(\cdot j)}dt$$

Как и в § 3, легко видеть, что $p^{ij}\gamma_{(ij)}=p^{ij}\gamma_{(ij)}'$, где матрица коэффициентов $\gamma_{ij}'$ определена выражениями (6.6). Поэтому имеем для $dF$ представление

$$dF=p^{ij}\{(\mathrm{G}-2\mathrm{E})^{-1}\}_{j\cdot}^{\cdot m}(\partial/\partial t+v^l\nabla_l)e_{mi}dt$$

Вводя компоненты $h_{ij}$ тензора $H$ из (5.9), получим отсюда

$$dF=2\mu h^{ij}dh_{ij}+3\alpha pg^{ij}dh_{ij} \tag{7.5}$$

В частности, из (7.5) следует уравнение для свободной энергии

$$F = \mathrm{const} + \mu (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + 3\varkappa p (h_1 + h_2 + h_3) \tag{7.6}$$

Здесь $h_i$ — собственные значения тензора $\mathbf{H}$, определенные в (5.10). Для несжимаемой жидкости последние слагаемые в (7.5), (7.6) исчезают, так как сумма величин $h_i$ при $\alpha = -{}^1/_3$ тождественно равна нулю.

Аналогичным путем нетрудно определить другие термодинамические функции, связанные с упругим деформированием.

Подставляя соотношение (7.3) в уравнение энергии (7.2), получим новое уравнение

$$dA_1 + dA_2 = dE + dF + Wdt \tag{7.7}$$

Это уравнение выражает тот факт, что элементарная работа всех внешних сил в точности равна сумме приращений кинетической энергии жидкости, свободной энергии упругого деформирования и вязкой диссипации энергии. Запишем первый закон термодинамики

$$dE + dU + d\Psi = dA_1 + dQ$$

Здесь $dU$ — изменение внутренней энергии упруго-вязкой среды, $d\Psi$ — изменение ее потенциальной энергии в поле сил $f_i^{(2)}$, $dQ$ — приток тепла; все величины по-прежнему отнесены к единице объема среды. Подставляя сюда $dE$ из (7.2) и учитывая, что $dA_2 + d\Psi = 0$, получим уравнение притока тепла в форме

$$dQ = dU + dA_3$$

Используя выражение $dU = TdS + dF$ и представление $dA_3$ из (7.3), получим окончательно уравнение

$$TdS = dQ + Wdt \tag{7.8}$$

Заметим, что если упругость рассматриваемой среды имеет чисто энтропийную природу, как это свойственно большинству каучукоподобных материалов, то во всех предыдущих уравнениях можно считать $dU \approx 0$. Имеем тогда

$$dF \approx TdS = dQ + Wdt \tag{7.9}$$

Приведенные энергетические соотношения относятся преимущественно к изотермическим течениям упруго-вязкой максвелловской жидкости. Для других течений (например адиабатического) соответствующие соотношения могут быть получены стандартным путем [1].

Отметим основные качественные особенности течений максвелловской жидкости, рассмотренной в этой работе. Как можно показать, рассматривая конкретные течения этой жидкости, полученное реологическое уравнение описывает как появление нормальных напряжений в различных течениях, так и неньютоновость кривой течения (зависимость эффективной вязкости от скорости сдвига). При этом существенно, что для рассмотренной модели первый инвариант тензора $\tau_{ij}$ всегда равен нулю.

Это означает, что если на движущуюся жидкость действует в некотором направлении дополнительное растягивающее напряжение, то оно равно по модулю сжимающему нормальному напряжению, действующему в перпендикулярном направлении.

Например, в плоском стационарном течении Куэтта жидкость растянута вдоль потока и сжата в направлении, перпендикулярном пластинам.

Ясно, что эти особенности рассматриваемой среды связаны, в первую очередь, с предположениями, сделанными в § 5 при формулировке тензорных связей (5.7) и (5.8) и приводящими к квадратичной зависимости свободной энергии упругости (7.5) от компонент тензора Генки. Можно, конечно, задаться более сложным выражением для $F$, зависящим, например, от величин $h_i$ в более высокой степени. Тогда первый инвариант тензора $\tau_{ij}$ в общем случае оказывается отличным от нуля. Выбор функции $F$, соответствующей некоторым реальным классам упруго-вязких сред, а также обобщение простейшей модели на среды с дискретным или непрерывным спектром времен релаксации, представляет самостоятельную проблему.

Заметим еще, что реологические уравнения § 6 весьма близки к таковому, полученному Де Уиттом [5] на основании формального обобщения линейного максвелловского уравнения с использованием яуманновской производной. В этом нет ничего удивительного, так как Де Уитт постулировал для компонент тензора скоростей упругих деформаций выражения, отличающиеся от (3.3) только отсутствием членов с $\gamma_{(ij)}$ в правой части. Поэтому можно ожидать, что в ряде случаев обе модели должны приводить к одинаковым или весьма близким результатам.

В аналогичной задаче Олдройд [2] также исходил из соотношения (2.2), но ото жлествлял конвективные производные от тензоров вязких и упругих деформаций с тензорами соответствующих скоростей деформаций.

Рассматривая в качестве неизвестных смешанные или контравариантные компоненты тензоров, Олдройд получил реологические уравнения, описывающие жидкости с существенно различными свойствами [2]. Эта неоднозначность не возникла бы и в [2], если бы вместо явно неверных соотношений типа (2.1), записанных для компонент с контравариантным или смешанным строением индексов, Олдройд использовал правильные соотношения, следующие из [1]. Например, для смешанных компонент соотношение аддитивности записывается в форме.

$$\varepsilon_{i\cdot}^{\cdot j} = \varepsilon_{(i\cdot)}^{(\cdot j)} + \varepsilon_{[i\cdot]}^{[\cdot j]} - 2\varepsilon_{(i\,\cdot)}^{(\cdot m)}\varepsilon_{[m\,\cdot]}^{[\,\cdot\, j]}$$

В результате расчета, основанного на этом соотношении, придем к уравнениям, отличающимся от полученных выше лишь умножением на контравариантный метрический тензор. Кроме того, в теории Олдройда используется закон Гука в виде (4.1), что неверно при больших упругих деформациях.

Поступила 9 II 1967

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, 1962.
2. Oldroyd J. G. On the Formulation of Rheological Equations of State. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1950, vol. 200, No. 1063.
3. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. «Мир», 1965.
4. Lupton, J. M., Regester J. W. Melt Flow of Polyethylene at High Rates. Polym. Engng and Sci., 1965, October, p. 235.
5. De-Witt T. W. Rheological Equation of State which Predicts Non-Newtonian Viscosity, Normal Stresses and Dynamic Moduli. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 7.