Прикладная математика и механика. Том 32. 1968

К РАСЧЕТУ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В. В. Токарев, В. Г. Шумилкин

(Москва)

Параметры систем массового обслуживания обычно выбираются исходя из осредненных характеристик потока заявок. При этом бывает неизвестным, с какой вероятностью рассчитанная система будет выполнять поставленную перед ней задачу.

Ниже предлагается следующая постановка. Требуется назначить минимально возможную производительность системы, которая с заданной вероятностью гарантировала бы, что время ожидания любой заявки, поступившей в процессе эксплуатации системы, не будет превосходить заданной величины. Получено решение задачи для ординарного потока заявок без последействия при стандартном размере заявок. Дан пример расчета в случае стационарного потока заявок.

1. Постановка задачи. Рассматривается однолинейная система массового обслуживания, которая эксплуатируется в течение времени T. Производительность системы характеризуется временем τ, потраченным на обслуживание заявки стандартного размера. Система обслуживает заявки по одной, в порядке их появления. Заявка, заставшая систему занятой, становится в очередь и ожидает окончания обслуживания предыдущей заявки (очередь без потерь). Промежуток времени между моментом появления заявки и моментом окончания ее обслуживания называется временем ожидания заявки. Размер всех заявок полагается стандартным.

Чтобы охарактеризовать процесс появления заявок, введем в соответствии с [1] следующие обозначения: $v_k(t, \Delta t)$ — вероятность получения k заявок в интервале $(t, t + \Delta t)$; $w(t, \Delta t) = 1 - v_0(t, \Delta t)$ — вероятность получения не менее одной заявки в интервале $(t, t + \Delta t)$; $\psi(t, \Delta t) = 1 - v_0(t, \Delta t) - v_1(t, \Delta t)$ — вероятность получения не менее двух заявок в интервале $(t, t + \Delta t)$. Принимаются две гипотезы относительно свойств потока заявок [1, 2].

Первая гипотеза — ординарность потока

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi(t, \Delta t)}{\Delta t} = 0 \tag{1.1}$$

т. е. вероятность получения не менее двух заявок в интервале длиной Δt есть величина бесконечно малая по сравнению с Δt при $\Delta t \to 0$.

Вторая гипотеза — отсутствие последействия: для любых $t \in (0, T)$ и любых $\Delta t > 0$ вероятность $v_k(t, \Delta t)$ не зависит от поступления заявок на предыдущем интервале $(0, t)$, т. е. безусловная вероятность $v_k(t, \Delta t)$ совпадает с условной вероятностью получения k заявок в интервале $(t, t + \Delta t)$ при любых предположениях относительно появления заявок в интервале $(0, t)$.

Считается известным так называемый параметр потока заявок [1, 2]

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{w(t, \Delta t)}{\Delta t} \tag{1.2}$$

В принятых предположениях $\lambda(t)$ совпадает с интенсивностью потока (определяемой как математическое ожидание числа заявок в единицу времени), так что среднее число $\langle n \rangle$ заявок за время T будет равно

$$\langle n \rangle = \int_0^T \lambda(t)\, dt \tag{1.3}$$

Вероятность получения k заявок в интервале $(t, t + \Delta t)$ выражается через параметр потока следующим образом:

$$v_k(t, \Delta t) = \frac{1}{k!} [\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)]^k e^{-[\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)]} \tag{1.4}$$

$$\left(k = 0, 1, 2, \ldots, \ \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t)\, dt\right)$$

Окончательная формулировка задачи такова. Задаются: время эксплуатации системы T, интенсивность потока заявок $\lambda(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, максимально допустимое время ожидания заявки t_* и вероятность реализации решения R. Требуется выбрать минимальную производительность системы (максимальное время τ), при которой с вероятностью R гарантируется, что ни одна заявка, поступившая за время T, не будет ожидать больше времени t_*.

2. Ожидаемый закон появления заявок. Обозначим через $\nu(t)$ суммарное число заявок, появившихся на интервале $(0, t)$, вне зависимости от того, были они обслужены или нет. Это случайная функция, она может изменяться от реализации к реализации.

Поставим промежуточную задачу о построении неслучайной кусочно-постоянной неубывающей функции $n(t)$ с целочисленными значениями n_j:

$$n(t) = n_j \quad \text{при } t_j < t < t_{j+1};\ j = 0, 1, \ldots, m \qquad (n_j \leqslant n_{j+1},\ t_0 = 0,\ t_{m+1} = T) \tag{2.1}$$

которая с заданной вероятностью R ограничивала бы сверху все реализации $\nu(t)$ на всем отрезке времени $[0, T]$. Выбор производительности системы по этому закону $n(t)$ позволит с вероятностью R гарантировать, что будут обслужены все реализации $\nu(t)$, причем время ожидания заявок не будет превосходить заданной величины.

Решим обратную задачу. Пусть закон (2.1) задан (т. е. заданы моменты t_j, величины $n_j - n_{j-1}$ и число m скачков). Найдем вероятность реализации неравенства

$$\nu(t) \leqslant n(t), \qquad t \in [0, T] \tag{2.2}$$

Функция $n(t)$ кусочно-постоянная (2.1), поэтому неравенство (2.2) эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\nu(t_j - 0) \leqslant n_{j-1} \qquad (j = 1, \ldots, m + 1;\ n_{j-1} \leqslant n_j) \tag{2.3}$$

Обозначим через A событие, состоящее в выполнении системы неравенств (2.3). Введем еще события $A_{k_0k_1\ldots k_m}$, реализация которых означает выполнение системы таких равенств:

$$\nu(t_j-0)=k_{j-1} \qquad (j=1,\ldots,m+1;\ k_{j-1}\leqslant k_j) \tag{2.4}$$

Если два набора чисел $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$ и $(k_0', k_1', \ldots, k_m')$ не совпадают (т. е. нарушается хотя бы одно из равенств $k_j = k_j'$, $j = 0, 1, \ldots, m$), то события $A_{k_0k_1\ldots k_m}$ и $A_{k_0'k_1'\ldots k_m'}$ несовместны. Событие A представляется в виде объединения этих событий по всем различным наборам $(k_0, k_1, \ldots, k_m)$, удовлетворяющим неравенствам

$$k_j\leqslant n_j,\ k_j\geqslant k_{j-1}\ (j=0,1,\ldots,m;\ k_{-1}=0)$$

$$A=\bigcup_{k_{j-1}\leqslant k_j\leqslant n_j} A_{k_0k_1\ldots k_m} \qquad (j=0,1,\ldots,m;\ k_{-1}=0) \tag{2.5}$$

Отсюда вероятность события A равна сумме вероятностей событий $A_{k_0k_1\ldots k_m}$ по всем указанным наборам $(k_0, k_1, \ldots, k_m)$

$$P\{A\}=\sum_{k_{j-1}\leqslant k_j\leqslant n_j} P\{A_{k_0k_1\ldots k_m}\} \qquad (j=0,1,\ldots,m;\ k_{-1}=0) \tag{2.6}$$

так как события $A_{k_0k_1\ldots k_m}$ несовместные (см., например, [3]).

Событие $A_{k_0k_1\ldots k_m}$ состоит в одновременной реализации $(m+1)$ не зависящих одно от другого событий (согласно гипотезе отсутствия последействия)

$$\nu(t_{j+1}-0)-\nu(t_j+0)=k_j-k_{j-1} \qquad (j=0,1,\ldots,m;\ k_{-1}=0) \tag{2.7}$$

Вероятность каждого из них есть $v_{k_j-k_{j-1}}(t_j, t_{j+1}-t_j)$, поэтому по теореме умножения вероятностей [3]

$$P\{A_{k_0k_1\ldots k_m}\}=\prod_{j=0}^{m} v_{k_j-k_{j-1}}(t_j,\ t_{j+1}-t_j) \tag{2.8}$$

Подставив последовательно (1.4) в (2.8) (при $k = k_j - k_{j-1}$, $t = t_j$, $\Delta t = t_{j+1} - t_j$) и (2.8) — в (2.6), получим выражение для искомой вероятности

$$P\{A\}=e^{-\langle n\rangle}\sum_{k_m=0}^{\mu_m}\ \sum_{k_{m-1}=0}^{\mu_{m-1}}\cdots\sum_{k_0=0}^{\mu_0}\ \prod_{j=0}^{m}\frac{\Delta\Lambda_j^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}=$$

$$=e^{-\langle n\rangle}\sum_{k_0=0}^{n_0}\ \sum_{k_1=k_0}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=k_{m-1}}^{n_m}\ \prod_{j=0}^{m}\frac{\Delta\Lambda_j^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!} \qquad \begin{pmatrix}\mu_0=\min(n_0,\ k_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mu_{m-1}=\min(n_{m-1},\ k_m)\\ \mu_m=n_m\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Здесь

$$\Delta\Lambda_j=\int_{t_j}^{t_{j+1}}\lambda(t)\,dt, \quad \langle n\rangle=\Lambda(T)=\sum_{j=0}^{m}\Delta\Lambda_j, \quad k_{-1}=0, \quad t_0=0, \quad t_{m+1}=T \tag{2.10}$$

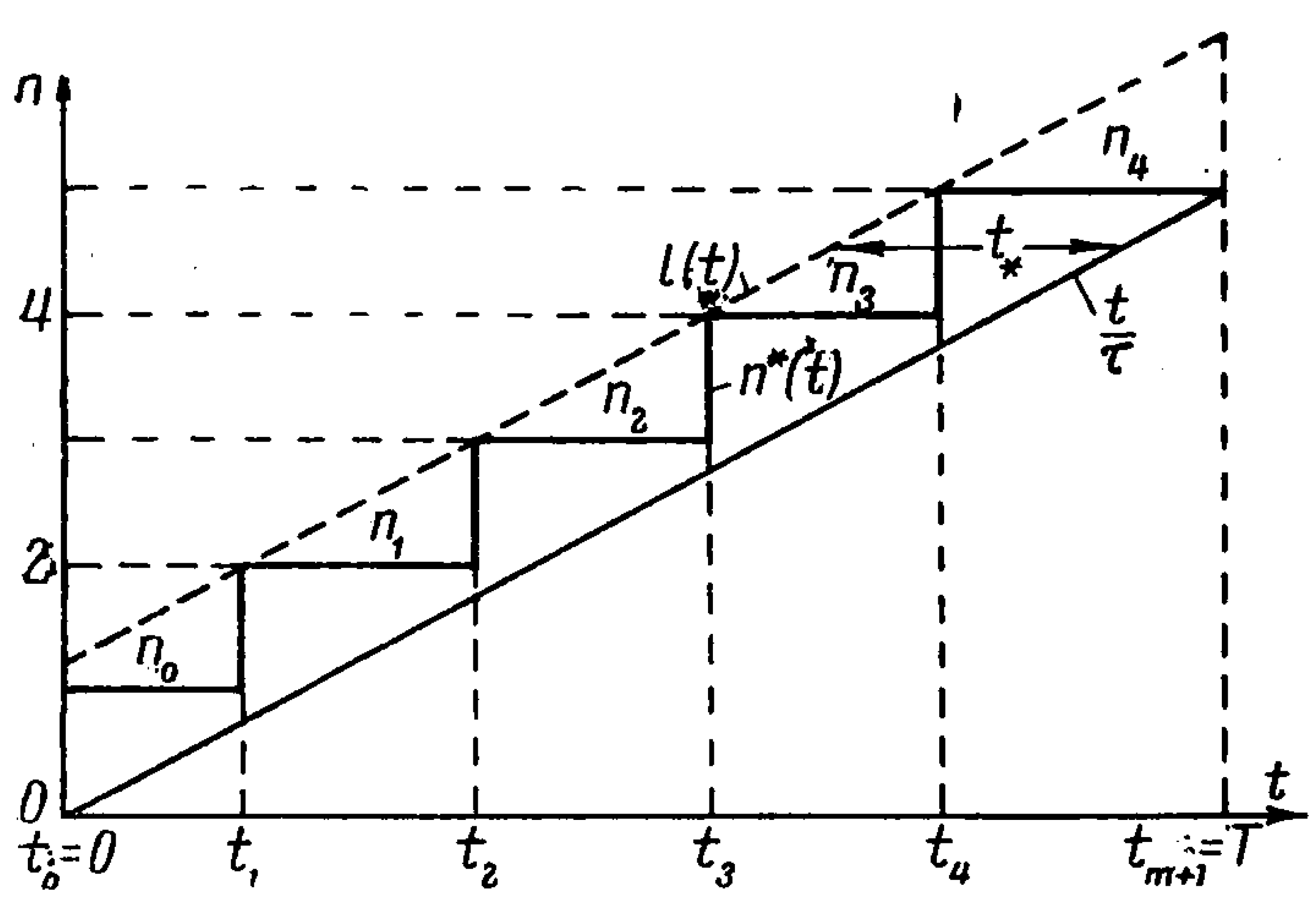
Таким образом, при дальнейшем решении задачи величины t_j, n_j и m, определяющие ожидаемый закон $n(t)$ появления заявок, должны выбираться так, чтобы выполнялось условие $P\{A\}\geqslant R$.

3. Минимальная производительность системы. К моменту времени t появляются $\nu(t)$ заявок; система может обслужить к этому моменту t/τ заявок (τ — время, потребное для обслуживания одной заявки). Время ожидания заявки не будет превышать t_*, если реализация $\nu(t)$ лежит не выше прямой

$$l(t) = (t + t_*)/\tau \geqslant \nu(t), \qquad t \in [0, T] \tag{3.1}$$

Это очевидно, из геометрических соображений (фиг. 1). Следовательно, в качестве ожидаемых законов $n(t)$ можно рассматривать только те из (2.1), которые удовлетворяют условию (3.1).

Для облегчения процедуры построения ожидаемого закона появления заявок перейдем от постановки на минимум производительности системы при фиксированной вероятности реализации решения к взаимной постановке. Зададим производительность системы и будем искать такой закон $n(t)$, который обеспечивал бы максимум вероятности R.



Фиг. 1

Сравним по вероятности реализации два закона $n^{(1)}(t)$ и $n^{(2)}(t)$ таких, что

$$n^{(1)}(t) \geqslant n^{(2)}(t), \qquad t \in [0, T] \tag{3.2}$$

Сразу можно сделать вывод относительно вероятностей их реализации

$$P\{n^{(1)}(t) \geqslant \nu(t), \quad t \in [0, T]\} \geqslant P\{n^{(2)}(t) \geqslant \nu(t), \quad t \in [0, T]\} \tag{3.3}$$

так как все ситуации, которые благоприятствуют второму событию, благоприятны и для первого, но остаются еще варианты, благоприятные только для первого события.

Таким образом, закон $n^*(t)$, обеспечивающий максимальную вероятность реализации и удовлетворяющий ограничению (3.1) по времени ожидания, строится из условия (фиг. 1)

$$n^*(t) = \max\{0, 1, 2, \ldots\} \leqslant (t + t_*)/\tau, \quad n^*(T) \leqslant T/\tau \tag{3.4}$$

Отсюда уровни n_j моменты t_j, и число m скачков, определяющие ожидаемый закон (2.1), будут равны

$$n_0 = E(t_*/\tau), \qquad n_j = n_0 + j, \qquad t_j = (n_0 + j)\tau - t_* \qquad (j = 1, \ldots, m),$$
$$m = E(T/\tau) - n_0 \tag{3.5}$$

Здесь $E(t_*/\tau)$ и $E(T/\tau)$ обозначают целую часть чисел t_*/τ и T/τ (максимальное целое число, не превосходящее данное).

Подставив (3.5) в (2.9), (2.10), получим выражение для максимальной (при данной производительности системы τ) вероятности реализации решения

$$R = e^{-\langle n\rangle} \sum_{k_m=0}^{\mu_m} \sum_{k_{m-1}=0}^{\mu_{m-1}} \ldots \sum_{k_0=0}^{\mu_0} \prod_{j=0}^{m} \frac{\Delta\Lambda_j^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})\,!} \qquad \begin{pmatrix} \mu_0 = \min(n_0, k_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu_{m-1} = \min(n_0 + m - 1, k_m) \\ \mu_m = n_0 + m \end{pmatrix}$$

$$\Delta\Lambda_0 = \int\limits_0^{(n_0+1)\tau-t_*} \lambda(t)\,dt, \qquad \Delta\Lambda_m = \int\limits_{(n_0+m)\tau-t_*}^{T} \lambda(t)\,dt \tag{3.6}$$

$$\Delta\Lambda_j = \int\limits_0^{\tau} \lambda\,[(n_0+j)\tau - t_* + \xi]\,d\xi \quad (j=1,\ldots,m-1), \quad \langle n\rangle = \int\limits_0^{T} \lambda(t)\,dt$$

$$n_0 = E(t_*/\tau), \quad m = E(T/\tau) - n_0, \quad k_{-1} = 0$$

Полученные формулы полностью решают задачу в постановке, взаимной к исходной. Их же можно рассматривать как неявное выражение минимальной производительности системы, характеризуемой временем τ обслуживания одной заявки, через вероятность реализации R при решении задачи в исходной постановке.

4. Стационарный поток заявок. Рассмотрим случай стационарного потока заявок

$$\lambda(t) \equiv \lambda_0, \qquad t \in [0, T] \tag{4.1}$$

Тогда интегралы (3.7) будут равны

$$\begin{aligned} &\Delta\Lambda_0 = \Delta\tau_0 / x && (\Delta\tau_0 = 1 + E(t_*/\tau) - t_*/\tau) \\ &\Delta\Lambda_j = 1/x && (j=1,\ldots,m-1), \quad \langle n\rangle = \lambda_0 T \\ &\Delta\Lambda_m = \Delta\tau_m / x && (\Delta\tau_m = T/\tau - E(T/\tau) + t_*/\tau) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь через x обозначена безразмерная производительность системы

$$x = \frac{1}{\lambda_0\tau} = \frac{T/\tau}{\lambda_0 T} = \frac{T/\tau}{\langle n\rangle} \tag{4.3}$$

— отношение числа заявок, которые может обслужить система за время T, к математическому ожиданию числа заявок, поступивших за то же время.

Подставив соотношения (4.2) в (3.6), получим следующее выражение для вероятности реализации решения

$$R = e^{-\langle n\rangle} \sum_{k_m=0}^{\mu_m} x^{-k_m} \sum_{k_{m-1}=0}^{\mu_{m-1}} \frac{\Delta\tau_m^{k_m-k_{m-1}}}{(k_m-k_{m-1})!} \sum_{k_{m-2}=0}^{\mu_{m-2}} \frac{1}{(k_{m-1}-k_{m-2})!} \cdots \tag{4.4}$$

$$\cdots \sum_{k_j=0}^{\mu_j} \frac{1}{(k_{j+1}-k_j)!} \cdots \sum_{k_0=0}^{\mu_0} \frac{1}{(k_1-k_0)!} \frac{\Delta\tau_0^{k_0}}{k_0!} \qquad \begin{pmatrix} \mu_0 = \min(n_0, k_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{m-1} = \min(n_0 + m - 1, k_m) \\ \mu_m = n_0 + m \end{pmatrix}$$

Вычислим первые $(m-1)$ сумм по $k_0, \ldots, k_{m-2}$, записав для них рекуррентные соотношения

$$s_0^{(r)} = \frac{\Delta\tau_0^r}{r!}, \quad s_1^{(r)} = \sum_{q=0}^{\min(n_0, r)} \frac{s_0^{(q)}}{(r-q)!}, \ldots, s_{j+1}^{(r)} = \sum_{q=0}^{\min(n_0+j, r)} \frac{s_j^{(q)}}{(r-q)!} \tag{4.5}$$

$$(r = 0, 1, \ldots, n_0 + j;\ j = 1, \ldots, m-2)$$

Воспользовавшись методом полной индукции, получим явные выражения для введенных сумм:

при $r = 0, 1, \ldots, n_0$

$$s_j^{(r)} = \frac{1}{r!}\,(j + \Delta\tau_0)^r \tag{4.6}$$

при $r = n_0 + 1, \ldots, \quad n_0 + j \qquad (j = 1, \ldots, m - 1)$

$$s_j^{(r)} = \frac{1}{r!}\,(j + \Delta\tau_0)^r - (j + n_0 + 1 - r)\sum_{l=n_0+1}^{r}\frac{(j + n_0 + 1 - l)^{r-l-1}}{(r-l)!}\,\frac{(l - n_0 - 1 + \Delta\tau_0)^l}{l!}$$

Вероятность R, согласно (4.4) и (4.5), может быть записана в виде ($k_m = q, k_{m-1} = r$

$$R = e^{-\langle n\rangle}\sum_{q=0}^{n_0+m} x^{-q}\sum_{r=0}^{\mu} s_{m-1}^{(r)}\,\frac{\Delta\tau_m^{\,q-r}}{(q-r)!} \qquad (\mu = \min\,[n_0 + m - 1,\ q]) \tag{4.7}$$

Подставив сюда выражение для $s_{m-1}^{(r)}$ из (4.6) и просуммировав по r положительные члены, получим

$$R = e^{-\langle n\rangle}\left[\sum_{q=0}^{n_0+m}\frac{\langle n\rangle^q}{q!} - \frac{1}{n_0!\,x^{n_0}}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x^i}\sum_{j=1}^{i}(m - j)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\frac{\Delta\tau_m^{\,i-j}}{(i-j)!}\sum_{k=1}^{j}\frac{(m-k)^{j-k-1}}{(j-k)!}\,\frac{(k - 1 + \Delta\tau_0)^{n_0+k}}{(n_0 + k)(n_0 + k - 1)\ldots(n_0 + 1)}\right] \tag{4.8}$$

где при $i = j = k = m$ считается $(m - m)(m - m)^{-1} = 1$.

Если максимально допустимое время ожидания заявки равно нулю ($t_* = 0$, $n_0 = 0$, $\Delta\tau_0 = 1$), удается вычислить сумму по k:

$$(m - j)\sum_{k=1}^{j}\frac{(m-k)^{j-k-1}}{(j-k)!}\,\frac{k^k}{k!} = \frac{m^{j-1}}{(j-1)!} \tag{4.9}$$

а затем — и по j:

$$\sum_{j=1}^{i}\frac{m^{j-1}}{(j-1)!}\,\frac{\Delta\tau_m^{\,i-j}}{(i-j)!} = \frac{(m + \Delta\tau_m)^{i-1}}{(i-1)!} = \frac{(x\,\langle n\rangle)^{i-1}}{(i-1)!} \tag{4.10}$$

Окончательное выражение для вероятности в этом случае следующее:

$$R = e^{-\langle n\rangle}\left[\frac{\langle n\rangle^m}{m!} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sum_{q=0}^{m-1}\frac{\langle n\rangle^q}{q!}\right] \qquad \text{при } t_* = 0 \tag{4.11}$$

Вероятность (4.8) определяется тремя безразмерными величинами

$$\langle n\rangle = \lambda_0 T_э \qquad x = 1\,/\,(\lambda_0\tau), \qquad \omega = \lambda_0 t_* \tag{4.12}$$

математическим ожиданием числа заявок $\langle n\rangle$, безразмерной производительностью системы x и безразмерным временем ожидания ω (характеризуется математическим числом заявок за максимально допустимое время ожидания заявки). Параметры n_0, $\Delta\tau_0$, m, $\Delta\tau_m$, фигурирующие в (4.8), выражаются через $\langle n\rangle$, x, ω (см. (3.7), (4.2))

$$n_0 = E\,(\omega x), \qquad \Delta\tau_0 = 1 + E\,(\omega x) - \omega x \tag{4.13}$$

$$m = E\,(\langle n\rangle\,x) - E\,(\omega x), \qquad \Delta\tau_m = \langle n\rangle x - E\,(\langle n\rangle\,x) + \omega x$$

При больших значениях m расчеты по формуле (4.8) трудоемки. Однако здесь можно получить асимптотическую формулу.

Введем обозначения для суммы по k и тройной суммы из (4.8)

$$S_j = (m-j)\sum_{k=1}^{j}\frac{(m-k)^{j-k-1}}{(j-k)!}\;\frac{(k-1+\Delta\tau_0)^{n_0+k}}{(n_0+k)(n_0+k-1)\dots(n_0+1)} \tag{4.14}$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x^i}\sum_{j=1}^{i} S_j\,\frac{\Delta\tau_m{}^{i-j}}{(i-j)!}$$

тогда (4.8) запишется в виде:

$$R = e^{-\langle n\rangle}\left(\sum_{q=0}^{n_0+m}\frac{\langle n\rangle^q}{q!} - \frac{\Omega}{n_0!\,x^{n_0}}\right) \tag{4.15}$$

Изменим в выражении (4.14) для Ω порядок суммирования и введем новый индекс суммирования $l = i - j$

$$\Omega = \sum_{j=1}^{m}\frac{S_j}{x^j}\sum_{l=0}^{m-j}\frac{1}{l!}\left(\frac{\Delta\tau_m}{x}\right)^l \tag{4.16}$$

Далее с целью упрощения выкладок будет рассматриваться случай $\langle n\rangle x = E(\langle n\rangle x)$, для которого $\Delta\tau_m / x = \omega$ и $m = \langle n\rangle x - n_0$ (см. (4.13)). Выразим сумму по l в (4.16) через экспоненту с показателем ω

$$\sum_{l=0}^{m-j}\frac{\omega^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\omega^l}{l!} - \sum_{l=m-j+1}^{\infty}\frac{\omega^l}{l!} = e^{\omega} - R_{m-j}(\omega) \tag{4.17}$$

Здесь $R_{m-j}(\omega)$ — остаточный член разложения, определяемый по формуле Лагранжа

$$R_{m-j}(\omega) = \frac{\omega^{m-j+1}}{(m-j+1)!}\,e^{\omega\theta_{m-j}} \quad (0<\theta_{m-j}<1) \tag{4.18}$$

Сумму S_j из (4.14) представим по степеням $(\langle n\rangle x)$, заменив $m = \langle n\rangle x - n_0$

$$S_j = \alpha_1\frac{(\langle n\rangle x)^{j-1}}{(j-1)!} + \alpha_2\frac{(\langle n\rangle x)^{j-2}}{(j-2)!} + \dots + \alpha_k\frac{(\langle n\rangle x)^{j-k}}{(j-k)!} + \dots + \alpha_j \tag{4.19}$$

Коэффициенты α_k не зависят от j и равны

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\tau_0{}^{n_0+1}}{(n_0+1)},\qquad \alpha_2 = \frac{(1+\Delta\tau_0)^{n_0+2}}{(n_0+1)(n_0+2)} - \frac{\Delta\tau_0{}^{n_0+1}(n_0+2)}{n_0+1},\ \dots,$$

$$\alpha_k = (n_0+k)\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\frac{(n_0+l)^{k-l-1}}{(k-l)!}\;\frac{(l-1+\Delta\tau_0)^{n_0+l}}{(n_0+1)\dots(n_0+l)} \tag{4.20}$$

$$(k = 1, \dots, m)$$

Подставим выражения (4.17) и (4.19) в (4.16). После изменения порядка суммирования и введения вместо j нового индекса суммирования $q = j - k$, получим

$$\Omega = e^{\omega}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{x^k}\sum_{q=0}^{m-k}\frac{\langle n\rangle^q}{q!} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{x^k}\sum_{q=0}^{m-k}R_{m-(k+q)}(\omega)\,\frac{\langle n\rangle^q}{q!} \tag{4.21}$$

Первую сумму по q в (4.21) представим аналогично (4.17), (4.18)

$$\sum_{q=0}^{m-k}\frac{\langle n\rangle^q}{q!} = e^{\langle n\rangle} - R_{m-k}(\langle n\rangle) \tag{4.22}$$

Тогда выражение (4.20) примет вид:

$$\Omega = e^{\omega} e^{\langle n\rangle} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{x^k} - e^{\omega} \sum_{k=1}^{m} R_{m-k}(\langle n\rangle)\frac{\alpha_k}{x^k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{x^k} \sum_{q=0}^{m-k} R_{m-(k+q)}(\omega)\frac{\langle n\rangle^q}{q!} \tag{4.23}$$

Подставив (4.23) в (4.15) и выразив сумму по q из (4.15) через экспоненту, получим

$$R = 1 - \frac{e^{\omega}}{n_0!\, x^{n_0}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{x^k} + e^{-\langle n\rangle}\left[\frac{e^{\omega}}{n_0!\, x^{n_0}} \sum_{k=1}^{m} R_{m-k}(\langle n\rangle)\frac{\alpha_k}{x^k} + \right.$$

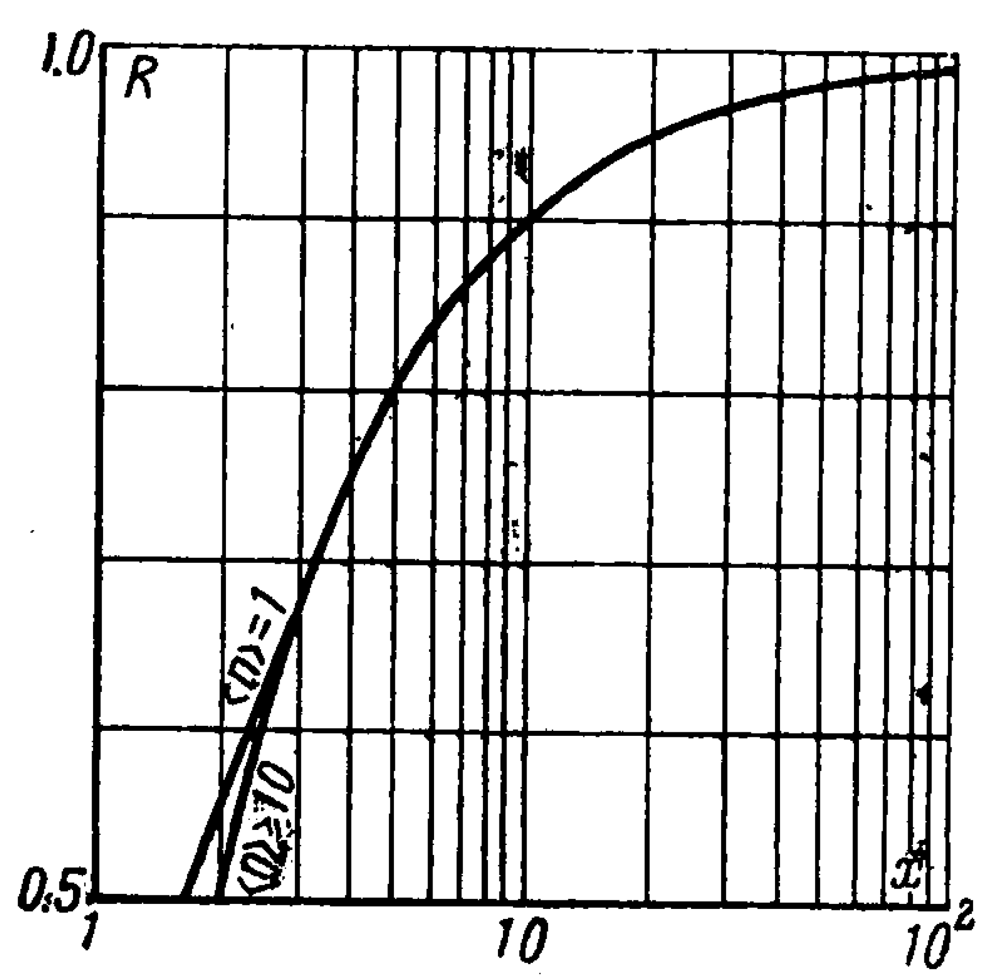
$$\left. + \frac{1}{n_0!\, x^{n_0}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{x^k} \sum_{q=0}^{m-k} R_{m-(k+q)}(\omega)\frac{\langle n\rangle^q}{q!} - R_{n_0+m}(\langle n\rangle)\right] \tag{4.24}$$

Пусть теперь $\langle n\rangle \gg 1$ и $x \gg 1$; тогда

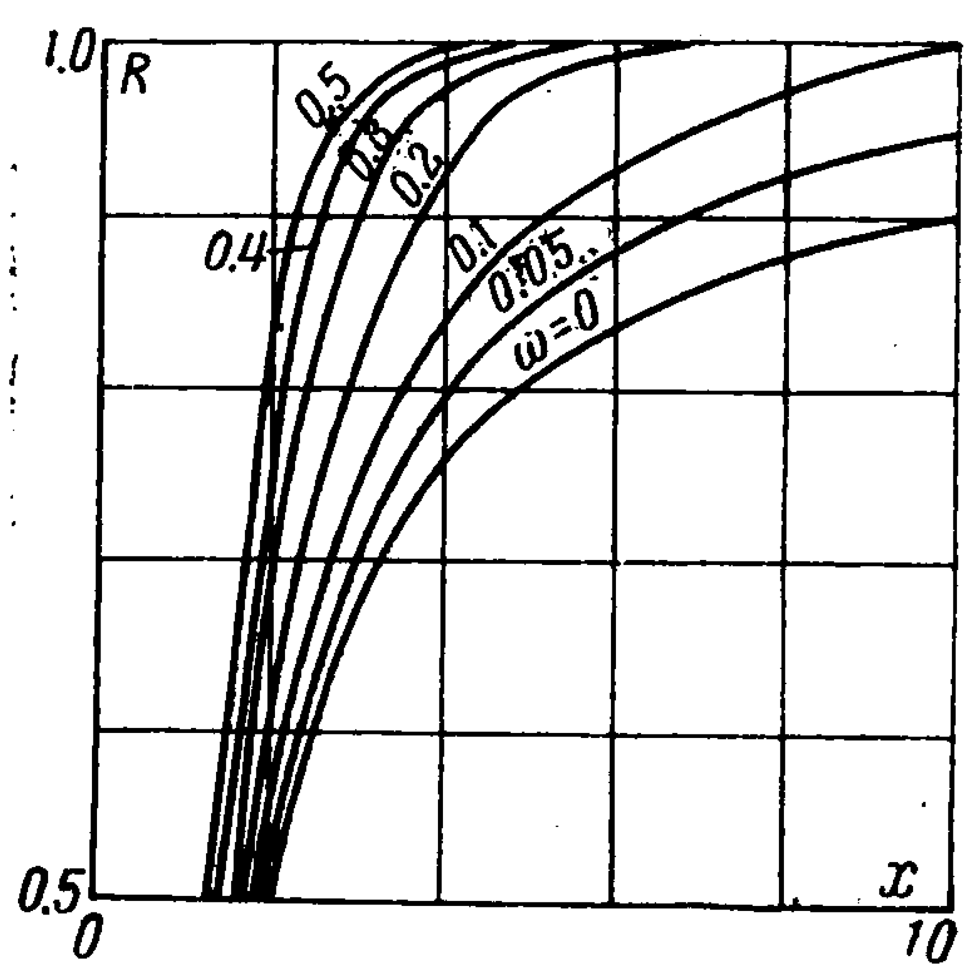
$$R \approx 1 - \frac{e^{\omega}}{n_0!\, x^{n_0}}\left(\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right) \tag{4.25}$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ задаются формулами (4.20).

Таким образом, в рассмотренном выше предельном случае вероятность R перестает зависеть от $\langle n\rangle$. Это иллюстрируется фиг. 2, где приведена зависимость $R(x)$ для



Фиг. 2



Фиг. 3

различных значений $\langle n\rangle$ при $\omega = 0$. Асимптотическая формула (4.25) здесь имеет вид $R = 1 - 1/x$.

Влияние времени ожидания ω на вероятность R видно из фиг. 3. С увеличением ω при той же самой производительности системы x вероятность реализации R существенно возрастает.

Поступила 6 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1955, № 49.
2. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., «Наука», 1965.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.