Прикладная математика и механика, Том 32, 1968

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ПРИ АКТИВНЫХ ПОМЕХАХ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Рассматриваются некоторые модельные задачи оптимальной коррекции движения системы, на которую, помимо управляющих сил, действуют еще неконтролируемые силы — помехи. Ошибки измерений не учитываются. Предполагается, что помехи активны и действуют наихудшим для управляющей стороны образом. Задачи решаются в минимаксной (игровой) постановке, и полученные оптимальные решения будут гарантирующими. По сравнению с обычным статистическим подходом, минимаксный подход обладает как некоторыми недостатками (минимаксная стратегия иногда слишком осторожна), так и рядом преимуществ: 1) не требуется знания вероятностных характеристик помех, которые зачастую неизвестны; 2) минимаксный подход применим и в тех случаях, когда помехи создаются активно действующим противником; 3) результат минимаксного подхода наиболее надежен.

Ниже рассматривается несколько вариантов задачи коррекции, в которых как управляющие силы, так и помехи могут быть импульсными или ограниченными. На основе полученных решений делаются некоторые качественные выводы о сравнительной эффективности непрерывной и импульсной коррекции.

1. Постановка задачи. Пусть движение управляемой системы описывается дифференциальными уравнениями при начальных условиях и ограничениях

$$dx' / dt' = y', \qquad dy' / dt' = u' + v', \qquad x'(0) = y'(0) = 0$$
$$\int_0^T |u'(t')|\,dt' \leqslant p, \qquad \int_0^T |v'(t')|\,dt' \leqslant q \tag{1.1}$$

Здесь t' — время, x' — вектор обобщенных координат, y' — вектор скоростей, u' — вектор управляющих сил, v' — вектор сил, создаваемых помехами, T — заданное время окончания процесса, p и q — заданные суммарные величины импульсов сил коррекции и помех. Все векторы в (1.1) имеют произвольную, но одинаковую размерность.

Уравнения (1.1) можно рассматривать, в частности, как уравнения в вариациях относительно некоторой невозмущенной номинальной траектории системы.

Ставится задача: выбрать управление $u'(t')$ на интервале $[0, T]$ так, чтобы достичь минимального значения длины вектора обобщенных координат в конце процесса $|x'(T)|$. При этом предполагается, что помехи $v'(t')$ выбираются из условия максимизации функционала $|x'(T)|$, т. е. задача рассматривается в минимаксной (игровой) постановке. Считаем, что обе управляющие стороны в каждый момент времени могут точно измерять текущие координаты x' и скорости y' системы.

Перейдем к безразмерным переменным, обозначенным буквами без штрихов

$$t' = Tt, \quad x' = qTx, \quad y' = qy, \quad u' = qT^{-1}u, \quad v' = qT^{-1}v, \quad p = qk \qquad (1.2)$$

В переменных (1.2) соотношения (1.1) примут вид

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = u + v, \qquad x(0) = y(0) = 0$$

$$\int_0^1 |u(t)|\,dt \leqslant k, \qquad \int_0^1 |v(t)|\,dt \leqslant 1 \qquad (1.3)$$

Управление $u(t)$ должно выбираться из условия минимизации функционала $|x(1)|$, а помеха $v(t)$ — из условия его максимизации. Помимо условий (1.3), на выбор функций u, v будем накладывать еще следующие ограничения: эти функции либо ограничены по модулю, либо имеют характер одного импульса. Чтобы удовлетворить интегральным ограничениям (1.3), в первом случае будем требовать неравенств

$$|u(t)| \leqslant k, \quad |v(t)| \leqslant 1 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

а во втором случае будем полагать

$$u(t) = U\delta(t - \tau), \qquad v(t) = V\delta(t - \theta) \qquad (|U| \leqslant k, \quad |V| \leqslant 1)$$

Здесь δ — дельта-функция, τ и θ — произвольные моменты времени в интервале [0, 1], а U, V — постоянные векторы. Ниже задача решается при различных комбинациях этих ограничений и без них.

2. Непрерывная коррекция непрерывной помехи. Пусть управляющие функции в (1.3) подчинены ограничениям $|u(t)| \leqslant k$, $|v(t)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда задача коррекции сводится к задаче дифференциальной игры [1] для системы (1.3) с функционалом $|x(1)|$.

Решение этой задачи легко получить элементарными рассуждениями, не прибегая к теории дифференциальных игр. Пусть сначала $k \geqslant 1$. Так как обе стороны имеют полную информацию о движении системы, то управляющая сторона может с любой степенью точности обеспечить выполнение равенства $u(t) = -v(t)$ при всех t.

Функционал задачи при этом будет равен $J_1(k) = |x(1)| = 0$, где нижний индекс указывает номер рассматриваемого случая. Если же $k < 1$, то управление, очевидно, выгоднее всего выбирать максимальным по величине и направленным против помехи. Помеха в этом случае также будет максимальна по величине, а направление ее можно брать произвольным, но постоянным (изменять ее направление не имеет смысла ввиду наличия полной информации).

Следовательно, имеем $u = -ke$, $v = e$ при всех t, где e — произвольный единичный вектор. Здесь функционал оказывается равным $J_1(k) = (1 - k)/2$. Таким образом, в рассмотренном случае функционал $|x(1)|$ для оптимальной коррекции равен

$$J_1 = (1 - k)/2 \quad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant 1, \qquad J_1 = 0 \quad \text{при } k \geqslant 1 \qquad (2.1)$$

3. Импульсная коррекция непрерывной помехи. Помеха по-прежнему ограничена условием $|v(t)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, а корректирующее управление имеет вид $u(t) = U\delta(t - \tau)$, где вектор U и момент коррекции τ могут выбираться из областей $|U| \leqslant k$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Функционал J_2 для этого случая определяется равенством

$$J_2 = \min_{\tau} \max_{v[0,\tau]} \min_{U} \max_{v[\tau,1]} |x(1)| \tag{3.1}$$

Здесь последовательность экстремумов отвечает принятой гипотезе о полной информации сторон. Экстремумы в (3.1) вычислим, начиная с конца. Для определения последнего максимума в (3.1) надо решить задачу оптимального управления системой

$$dx / dt = y, \qquad dy / dt = v, \qquad |v| \leqslant 1 \tag{3.2}$$

на интервале $[\tau, 1]$ при начальных условиях и функционале

$$\begin{gathered} x(\tau) = x^+, \qquad y(\tau) = y^+, \qquad x_0(1) = -x^2(1) \to \min \\ dx_0 / dt = -2(x, y), \qquad x_0(\tau) = -(x^+)^2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь $x^+ = x(\tau + 0)$, $y^+ = y(\tau + 0)$ — значения координат и скоростей сразу после импульсной коррекции, $x_0 = -x^2$ — вспомогательная фазовая координата, производная которой вычислена согласно уравнениям (3.2). Скобками обозначается скалярное произведение.

В соответствии с принципом максимума [2], введем векторы сопряженных переменных p_x и p_y, соответствующих векторам x и y, и составим функцию Гамильтона, сопряженные уравнения и условия трансверсальности для задачи (3.2), (3.3)

$$\begin{gathered} H = (p_x, y) + (p_y, v) + 2(x, y), \qquad dp_x / dt = -2y \\ dp_y / dt = -p_x - 2x, \qquad p_x(1) = p_y(1) = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь принято, как обычно, $p_0 \equiv -1$. Из уравнений и граничных условий (3.2), (3.4) получим последовательно

$$\begin{gathered} dp_x / dt = -2dx / dt, \qquad p_x(t) = 2[x(1) - x(t)] \\ dp_y / dt = -2x(1), \qquad p_y(t) = 2x(1)(1 - t) \end{gathered} \tag{3.5}$$

Вектор v, согласно условию максимальности функции H по v, коллинеарен вектору p_y и равен по величине своему наибольшему значению $|v| = 1$. Так как вектор p_y, согласно (3.5), постоянен по направлению, то $v(t) = f$ при $\tau \leqslant t \leqslant 1$, где f — единичный постоянный вектор. Интегрируя систему (3.2) при начальных условиях (3.3), получим

$$x(1) = x^+ + y^+(1 - \tau) + f(1 - \tau)^2 / 2 \tag{3.6}$$

Единичный вектор f выберем из условия максимальности выражения $x^2(1)$, определенного равенством (3.6). После максимизации будем иметь

$$\begin{gathered} f = [x^+ + y^+(1 - \tau)] / |x^+ + y^+(1 - \tau)| \\ |x(1)| = |x^+ + y^+(1 - \tau)| + (1 - \tau)^2 / 2 \end{gathered} \tag{3.7}$$

В соотношении (3.6) положим $x^+ = x^-$, $y^+ = y^- + U$, где $x^- = x(\tau-0)$, $y^- = y(\tau - 0)$ — значения координат и скоростей непосредственно перед коррекцией. Тогда получим

$$|x(1)| = (1-\tau)|s+U| + (1-\tau)^2/2, \qquad s = y^- + x^-/(1-\tau) \tag{3.8}$$

Найдем, согласно (3.1), минимум выражения $|x(1)|$ из (3.8) по вектору $|U| \leqslant k$. Минимизирующий вектор U и минимальное значение $|x(1)|$, как нетрудно проверить, оказываются равными

$$\begin{aligned} U &= -s, & |x(1)| &= (1-\tau)^2/2 \quad \text{при } |s| \leqslant k \\ U &= -ks/|s|, & |x(1)| &= (1-\tau)(|s|-k) + (1-\tau)^2/2 \quad \text{при } |s| \geqslant k \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из равенств (3.9) видно, что $|x(1)|$ монотонно зависит от $|s|$. Для вычисления первого из максимумов в (3.1) достаточно решить задачу оптимального управления системой (3.2) на интервале $[0, \tau]$ с нулевыми начальными условиями (1.3) и максимизируемым функционалом $|s|$. Решение этой задачи легко получить, учитывая очевидное неравенство

$$\max|s| \leqslant \max|y(\tau-0)| + (1-\tau)^{-1}\max|x(\tau-0)|$$

Каждый в отдельности максимум из правой части этого неравенства, очевидно, достигается, если управление v в системе (3.2) с нулевыми начальными условиями (1.3) принять максимальным по величине и произвольным, но постоянным по направлению. Следовательно, максимум $|s|$ достигается, если принять $v = e$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, где e — произвольный постоянный вектор единичной длины. Интегрируя систему (3.2) и вычисляя s по формуле (3.8) и $|x(1)|$ по формулам (3.9), получим

$$y^- = e\tau, \qquad x^- = e\tau^2/2, \qquad |s| = \tau + \tau^2[2(1-\tau)]^{-1} \tag{3.10}$$

$$|x(1)| = (1-\tau)^2/2 \quad \text{при } |s| \leqslant k, \qquad |x(1)| = 1/2 - k(1-\tau) \quad \text{при } |s| \geqslant k$$

Легко видеть, что $|s|$ монотонно зависит от τ и минимум $|x(1)|$ по τ из интервала $[0, 1]$ достигается при условии $|s| = k$. Из этого условия и соотношений (3.10) найдем оптимальный момент коррекции τ_2 и функционал (3.1) для данного случая (3.11)

$$\tau_2 = 1 + k - \sqrt{1+k^2}, \qquad J_2 = (1-\tau_2)^2/2 = (1 + 2k^2 - 2k\sqrt{1+k^2})/2$$

4. Непрерывная коррекция импульсной помехи. На управление и помеху наложим ограничения $|u(t)| \leqslant k$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $v = V\delta(t-\theta)$, где $|V| \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Очевидно, что до воздействия помехи не следует производить коррекцию, т. е. $u = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \theta$. Очевидно также, что следует рассчитывать на максимальный импульс помехи, т. е. $V = e$, где e — единичный вектор произвольного направления. Движение системы после действия помехи, т. е. при $t \geqslant \theta$, будет определяться уравнениями и начальными условиями

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = u, \quad |u(t)| \leqslant k, \quad x(\theta) = 0, \quad y(\theta) = e \tag{4.1}$$

Очевидно, что для оптимальной коррекции управление $u(t)$ должно быть направлено против импульса помехи и должно иметь максимальную величину k, т. е. $u = -ke$, если отклонение $|x(1)|$ в конце процесса не может быть сведено к нулю. Отсюда, интегрируя уравнения (4.1), найдем

$$\begin{aligned} &|x(1)| = (1-\theta) - k(1-\theta)^2/2 \quad \text{при } 1-\theta-k(1-\theta)^2/2 \geqslant 0 \\ &|x(1)| = 0 \quad \text{при } 1-\theta-k(1-\theta)^2/2 \leqslant 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Второй случай отвечает ситуации, при которой помеха может быть полностью нейтрализована. Определяя максимум выражения (4.2) для $|x(1)|$ по θ из интервала $[0, 1]$, найдем наихудший с точки зрения коррекции момент помехи θ_3 и соответствующее ему минимаксное значение функционала $J_3 = |x(1)|$ в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} &\theta_3 = 0, \quad J_3 = 1 - k/2 \quad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant 1 \\ &\theta_3 = 1 - 1/k, \quad J_3 = 1/2k \quad \text{при } k \geqslant 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

5. Импульсная коррекция импульсной помехи. Полагаем теперь $u = U\delta(t-\tau)$, $v = V\delta(t-\theta)$, где $|U| \leqslant k$, $|V| \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau, \theta \leqslant 1$. Если $k \geqslant 1$, то со сколь угодно высокой степенью точности можно полностью нейтрализовать помеху, полагая $U = -V$, $\tau = \theta$. В случае $k < 1$ для получения минимаксного решения следует, очевидно, положить $V = e$, $U = -ke$, где e — по-прежнему произвольный единичный вектор. Отклонение в конце процесса, согласно уравнениям (1.3), равно

$$|x(1)| = 1 - \theta - k(1-\tau)$$

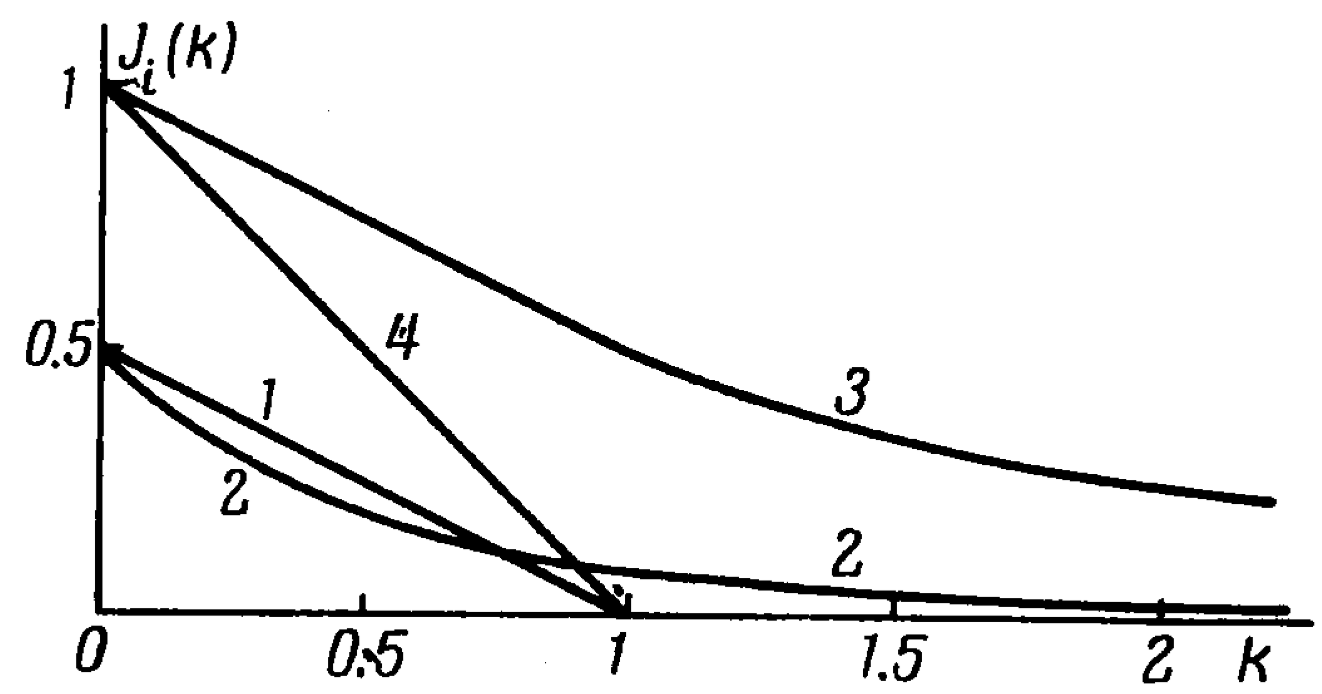
Найдем сначала минимум этой величины по τ при $\theta \leqslant \tau \leqslant 1$ (коррекция производится лишь после того, когда известно направление помехи), а затем ее максимум по θ при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Тогда получим оптимальные моменты помехи и коррекции и величину функционала

$$\tau_4 = \theta_4 = 0, \quad J_4 = 1 - k \quad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant 1, \qquad J_4 = 0 \quad \text{при } k \geqslant 1 \tag{5.1}$$

Таким образом, в данном случае (в отличие от двух предыдущих) и помеху, и коррекцию всегда выгодно производить в начале процесса.

6. Обсуждение результатов. Сравнивая равенства (2.1) и (3.11), нетрудно убедиться, что $J_1 \geqslant J_2$ при $0 \leqslant k \leqslant 3/4$ и $J_1 \leqslant J_2$ при $k \geqslant 3/4$. Следовательно, если помеха непрерывна (ограничена по модулю), то при $k \leqslant 3/4$ выгоднее применять импульсную коррекцию, а при $k \geqslant 3/4$ — непрерывную коррекцию. Другими словами, если суммарный импульс сил коррекции достаточно велик ($k \geqslant 3/4$), то выгоднее расходовать его постепенно, осуществляя более точную непрерывную коррекцию непрерывной помехи. Если же суммарный импульс коррекции мал, то выгоднее сконцентрировать его в виде одного импульса. Из соотношений (4.3) и (5.1) следует, что $J_3 \geqslant J_4$ при всех k, т. е. при импульсной помехе импульсная коррекция всегда выгоднее, чем непрерывная. Отметим еще, что

$J_i(k) = 0$ лишь при $i = 1$, $i = 4$ и $k \geqslant 1$, т. е. точная коррекция может быть осуществлена в тех и только в тех случаях, когда она имеет тот же характер, что и помеха (непрерывная или импульсная), и когда при этом суммарный импульс достаточно велик. На фигуре изображены зависимости $J_i(k)$, определяемые соотношениями (2.1), (3.11), (4.3), (5.1), причем номер $i = 1, 2, 3, 4$ указан цифрой у кривых.



7. Решение без ограничений. В заключение приведем решение задачи о минимаксе функционала $J = |x(1)|$ для системы (1.3) при наличии лишь интегральных ограничений (1.3), т. е. без дополнительных ограничений, введенных в пп. 2—5. Если $k \geqslant 1$, то, как и в пп. 2 и 5, можно выбрать управление в виде $u(t) = -v(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, и поэтому в этом случае $J = 0$. Если $k < 1$, то для минимаксного решения помеха и управление будут постоянно и противоположно направлены, т. е. $v = |v| e$, $u = -|u| e$, где e — постоянный единичный вектор произвольного направления. Тогда, интегрируя уравнения (1.3), получим

$$|x(1)| = \int_0^1 (1-t)\,[|v(t)| - |u(t)|]\,dt$$

Из полученного соотношения и интегральных ограничений (1.3) следует, что минимакс функционала $|x(1)|$ достигается при импульсной помехе и импульсной коррекции, причем оба импульса прикладываются в начале процесса. Таким образом, имеем $v = e\delta(t)$, $u = -ke\delta(t)$. Полученное решение полностью совпадает с решением п. 5 об импульсной коррекции импульсной помехи. В частности, $J = J_4$, где J_4 определено соотношением (5.1).

Поступила 20 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.