Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ФАЗОВЫМИ КООРДИНАТАМИ

А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов

(Свердловск)

Рассматривается задача об управлении линейной системой при ограничениях на фазовые координаты. Основное содержание статьи посвящено исследованию предельного перехода к искомому решению от решения задач, аппроксимирующих исходную. Используется подход к решению данных задач об управлении, трактующий их как проблему моментов (см. например [1], где приведена соответствующая библиография).

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемое движение $x(t)$, описываемое дифференциальным уравнением

$$dx(t) / dt = Ax + Bu + w(t) \tag{1.1}$$

Здесь x — n-вектор фазовых координат; u — скаляр-управляющее воздействие; $w(t)$ — непрерывная n-вектор-функция — заданное возмущение; A, B — постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Задача 1. Заданы промежуток времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, начальное $x(t_0) = x^\circ$ и конечное $x(T) = x^T$ состояния фазового вектора x. Заданы также m функций $f_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m \leqslant n)$, непрерывных на $[t_0, T]$ и строго положительных (при $t > t_0$). Требуется среди воздействий $u(t)$, переводящих за время $T - t_0$ систему (1.1) из x° в x^T при ограничениях

$$|x_k(t)| \leqslant f_k(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T;\ k = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

выбрать такое управление $u^\circ(t)$, для которого

$$\varkappa[u^\circ] = \operatorname{vrai} \max_t |u^\circ(t)| = \min_u \varkappa[u] = \min_u \operatorname{vrai} \max_t |u(t)| \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.3}$$

Управление $u^\circ(t)$ будем называть оптимальным.

§ 2. Метод решения и основной результат. Разобьем промежуток $t_0 \leqslant t \leqslant T$ на N равных частей точками

$$t_i = t_0 + i\Delta_N t, \qquad \Delta_N t = (T - t_0) / N \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

и рассмотрим задачу 1, заменив в ней ограничения (1.2) на условия

$$|x_k(t_i)| \leqslant f_k(t_i) \qquad (k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

Назовем эту задачу для краткости задачей 1_N. Исходную задачу 1 будем изучать путем предельного перехода $(N \to \infty)$ в решениях задачи 1_N.

Согласно известной процедуре решения [1], задача 1_N сводится к проблеме моментов: среди функций $u_N(t)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\int_{t_0}^{T} h_s[T, \tau]\, u_N(\tau)\, d\tau = c_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

$$\int_{t_0}^{T} h_k[t_i, \tau]\, u_N(\tau)\, d\tau - z_{ki} = c_{ki}, \quad |z_{ki}| \leqslant f_k(t_i) \quad (i = 1, \ldots, N-1;\ k = 1, \ldots, m)$$

найти такую функцию $u_N{}^\circ(t)$, для которой

$$\varkappa[u^\circ] = \min\nolimits_u \varkappa[u]$$

Здесь z_{ki} — постоянные числа; $h_j[t, \tau]$ — j-я компонента вектора

$$H[t, \tau] = X[t, \tau]\, B \quad (dX[t, \tau]/dt = AX[t, \tau],\ X[t, t] = E)$$

причем $h_j[t, \tau] \equiv 0$ при $\tau \geqslant t$; числа c_k и c_{ki} суть, соответственно, k-е компоненты векторов

$$\begin{aligned} c &= x^T - X[T, t_0]\, x^\circ - \int_{t_0}^{T} X[T, \tau]\, w(\tau)\, d\tau \\ c^{(i)} &= -X[t_i, t_0]\, x^\circ - \int_{t_0}^{t_i} X[t_i, \tau]\, w(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{2.3}$$

Предположим, что система (1.1) вполне управляема [1]. Функции

$$h_s[T, \tau],\ h_k[t_i, \tau] \quad (s = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, N-1)$$

будут тогда линейно независимыми, а проблема (2.2), (2.3) — разрешимой: решение доставляет функция

$$u_N^\circ(t) = \nu_N^\circ \operatorname{sign} h_N^\circ(t) \tag{2.4}$$

$$h_N^\circ(\tau) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sN}^\circ h_s[T, \tau] + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N-1} l_{kiN}^\circ h_k[t_i, \tau]\, \Delta_N t \tag{2.5}$$

Числа λ_{sN}°, l_{kiN}°, ν_N° будут решением задачи на условный экстремум

$$\nu_N^\circ = \Phi(\lambda_N^\circ, l_N^\circ) = \max_{\lambda, l} \Phi(\lambda_N, l_N) = \max_{\lambda, l} \frac{S}{J} \tag{2.6}$$

$$S = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sN} c_s + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N-1} l_{kiN}\, c_{ki} \Delta_N t - \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N-1} f_k(t_i)\, |l_{kiN}|\, \Delta_N t$$

$$J = \int_{t_0}^{T} \Big| \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sN} h_s[T, \tau] + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N-1} l_{kiN} h_k[t_i, \tau]\, \Delta_N t \Big|\, d\tau$$

при

$$\rho^2[\lambda_N, l_N] = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sN}^2 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N-1} l_{kiN}^2 \leqslant 1 \quad \max\nolimits_i \sum_{k=1}^{m} |l_{kiN}| \leqslant 1 \tag{2.7}$$

Отметим, что в силу сделанных предположений знаменатель в (2.6) при любом N отличен от нуля, а число ν_N° — положительное.

Рассмотрим последовательность разбиений промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant T$ на N равных частей, полагая $N = N_\alpha$, $N_\alpha = 2N_{\alpha-1}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$.

Обозначим через $l_{kN}(t)$ функцию (2.8)

$$l_{kN}(t) = l_{kiN} \quad \text{при } t_{i-1} < t \leqslant t_i \quad (i = 1, \ldots, N-1) \quad l_{kN}(t) \equiv 0 \quad \text{при } t_{N-1} < t \leqslant T$$

Соотношения (2.6), (2.7) можно представить тогда в виде

$$\nu_N^\circ = \Phi(\lambda_N^\circ, l_N^\circ(t)) = \max_{\lambda, l} \Phi(\lambda_N, l_N(t)) = \tag{2.9}$$

$$= \max_{\lambda,\, l(t)} \frac{1}{J^\circ} \{\varphi_1[\lambda_N, l_N(t)] + o_1(\Delta_N t) - \varphi_3[l_N(t)] + o_3(\Delta_N t)\}$$

$$J^\circ = \int_{t_0}^{T} |\varphi_2[\lambda_N, l_N(t); \tau] + o_2(\Delta_N t)|\, d\tau$$

при (2.10)

$$\rho^2[\lambda_N, l_N(t)] = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sN}^2 + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} l_{kN}^2(t)\, dt \leqslant 1, \qquad \operatorname{vrai\,max}_t \sum_{k=1}^{m} |l_{kN}(t)| \leqslant 1$$

Здесь

$$\varphi_1 = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sN} c_s + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} c_k(t)\, l_{kN}(t)\, dt \tag{2.11}$$

$$\varphi_2 = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sN} h_s[T, \tau] + \sum_{k=1}^{m} \int_{\tau}^{T} l_{kN}(t)\, h_k[t, \tau]\, dt \tag{2.12}$$

$$\varphi_3 = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} f_k(t)\, |l_{kN}(t)|\, dt \tag{2.13}$$

В (2.9) символы $o_i(\Delta_N t)$ означают величины, стремящиеся к нулю при $\Delta_N t \to 0$, причем

$$|o_1(\Delta_N t)| = \left| \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} (c_k(t) - c_{kN}(t))\, l_{kN}(t)\, dt \right| \leqslant k_1 \Delta_N t$$

$$c_{kN}(t) = c_{ki} \quad \text{при } t_{i-1} < t \leqslant t_i,$$

$$|o_2(\Delta_N t)| = \left| \sum_{k=1}^{m} \int_{\tau}^{T} (h_k[t, \tau] - h_{kN}[t, \tau])\, l_{kN}(t)\, dt \right| \leqslant k_2 \Delta_N t$$

$$h_{kN} = h_{kN}[t_i, \tau] \quad \text{при } t_{i-1} < t \leqslant t_i$$

$$|o_3(\Delta_N t)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} |(f_k(t) - f_{kN}(t))\, l_{kN}(t)|\, dt$$

$$f_{kN}(t) = f_k(t_i) \quad \text{при } t_{i-1} < t \leqslant t_i \qquad (0 < k_j = \text{const} < \infty)$$

Здесь $c_k(t)$-я компонента вектор-функции

$$c(t) = -X[t, t_0]\, x^\circ - \int_{t_0}^{t} X[t, \tau]\, w(\tau)\, d\tau$$

Упорядоченная система

$$\overset{\circ}{\xi}_N = \{\overset{\circ}{\lambda}_N,\ \overset{\circ}{l}_N(t)\} = \{\overset{\circ}{\lambda}_{1N}, \ldots, \overset{\circ}{\lambda}_{nN};\ \overset{\circ}{l}_{1N}(t), \ldots \overset{\circ}{l}_{mN}(t)\}$$

будет элементом множества (2.10) гильбертова пространства $H\{\xi\}$ с метрикой $\rho[\xi] = \rho[\lambda,\ l(t)]$.

Из свойства слабой компактности [2] сферы в $H_{\{\xi\}}$ вытекает, что последовательность величин ξ°_N содержит слабо сходящуюся последовательность обладающую слабым пределом $\xi^\circ = \{\lambda^\circ,\ l^\circ(t)\} = \{\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ;\ l_1^\circ(t), \ldots, l_m^\circ(t)\}$, причем $\rho[\xi^\circ] \leqslant 1$ и, кроме того, в силу второго из условий (2.10), $\operatorname{vrai}\max_t |l_k^\circ(t)| \leqslant 1$. (Ниже для этой подпоследовательности сохраняется прежнее обозначение $\{\xi_N^\circ\}$.) Заметим, далее, что функции $h_s[T,\tau]$, $c_k(t)$ из (2.9) — (2.12) — непрерывные. Операции φ_1 (2.11) и φ_2 (2.12) (при фиксированном τ) суть, следовательно, линейные функционалы над $H\{\xi\}$.

Таким образом

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_1[\overset{\circ}{\xi}_N] = \varphi_1[\xi^\circ], \qquad \lim_{N\to\infty} \varphi_2[\overset{\circ}{\xi}_N;\ \tau] = \varphi_2[\xi^\circ;\ \tau] \tag{2.14}$$

Условие (2.14) для φ_2 обеспечивает существование предела

$$\lim_{N\to\infty} \int_{t_0}^{T} |\varphi_2[\overset{\circ}{\xi}_N;\tau] + o_2(\Delta_N t)|\,d\tau = \int_{t_0}^{T} |\varphi_2[\xi^\circ;\ \tau]|\,d\tau$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_3[l_N^\circ(t)] = \varphi_3[l^\circ(t)] \tag{2.15}$$

Отметим, что последовательность $l_N^\circ(t) = \{l_{1N}^\circ(t),\ \ldots,\ l_{mN}^\circ(t)\}$ слабо сходится к величине $l^\circ(t) = \{l_1^\circ(t),\ \ldots,\ l_m^\circ(t)\}$ в пространстве L_2 m-вектор-функций. Учитывая, далее, что величина $\varphi_3[l_N(t)]$ является формой элемента $l_N(t)$, получаем неравенство [2]

$$\liminf \varphi_3[\overset{\circ}{l}_N(t)] \geqslant \varphi_3[l^\circ(t)] \quad \text{при } N \to \infty \tag{2.16}$$

Будем предполагать, что величина

$$h^\circ(\tau) = \varphi_2[\xi^\circ;\ \tau] = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^\circ h_s[T,\tau] + \sum_{k=1}^{m} \int_{\tau}^{T} l_k^\circ(t)\, h_k[t,\tau]\,dt \tag{2.17}$$

не равна тождественно нулю на множестве ненулевой меры из $[t_0,\ T]$. Тогда существует, очевидно, предел $\liminf \Phi(\lambda_N^\circ,\ l_N^\circ(t))$ при $N\to\infty$, а величина $\Phi(\lambda^\circ,\ l^\circ(t))$ имеет смысл. Покажем, что справедливо соотношение

$$\Phi(\lambda^\circ,\ l^\circ(t)) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \Phi(\overset{\circ}{\lambda}_N,\ \overset{\circ}{l}_N(t))$$

Тем самым будет установлено неравенство

$$\limsup_{N\to\infty} \varphi_3[\overset{\circ}{l}_N(t)] \leqslant \varphi_3[l^\circ(t)]$$

а вместе с ним, в силу (2.16), и условие (2.15).

Предположим противное. Тогда

$$\Phi(\lambda^\circ,\ l^\circ(t)) - \liminf_{N\to\infty} \Phi(\lambda_N^\circ,\ l_N^\circ(t)) \geqslant \sigma > 0$$

По вектор-функции $l^\circ(t)$, не являющейся, вообще говоря, непрерывной, построим непрерывную вектор-функцию $l^\circ(t)_\sigma$, каждая из компонент которой отличается от соответствующих компонент функции $l^\circ(t)$ лишь на некотором множестве меры меньшей, чем σ, и такую, что

$$|\Phi(\lambda^\circ,\ l^\circ(t)_\sigma) - \Phi(\lambda^\circ,\ l^\circ(t))| \leqslant \sigma/2 \tag{2.18}$$

Последнее возможно в силу теоремы Н. Н. Лузина [3]. Функции $l_k^\circ(t)_\sigma$ будут при этом ограничены: $\max_t |l_k^\circ(t)| \leqslant 1$. Для функций $l_k^\circ(t)_\sigma$ имеем соотношения

$$\int_{t_0}^{T} c_k(t)\, l_k^\circ(t)_\sigma\, dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} c_k(t_i)\, l_k^\circ(t_i)_\sigma$$

$$\int_{\tau}^{T} h_k[t,\tau]\, l_k^\circ(t)_\sigma dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=i(\tau)}^{N} h_k[t_i,\ \tau]\, l_k^\circ(t_i)_\sigma$$

$$\int_{t_0}^{T} f_k(t)\, |l_k^\circ(t)_\sigma|\, dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f_k(t_i)\, |l_k^\circ(t_i)_\sigma|$$

причем суммы в правых частях (2.18) суть интегральные суммы Римана, соответствующие непрерывной $l_k^\circ(t)_\sigma$. Подставляя в функционал $\Phi(\lambda_N,\ l_N)$ из (2.6), с одной стороны, величины

$$\lambda^\circ = \{\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ\},\quad l^\circ(t_i)_\sigma = \{l_1^\circ(t_i)_\sigma, \ldots, l_m^\circ(t_i)_\sigma\} \quad (i = 1, \ldots, N)$$

а, с другой,— решение

$$\lambda_N^\circ = \{\lambda_{1N}^\circ, \ldots, \lambda_{nN}^\circ\},\ \{l_{kiN}^\circ;\ k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, N-1\}$$

задачи (2.6), (2.7), получаем неравенство

$$\Phi(\lambda^\circ,\ l^\circ(t_i)_\sigma) \leqslant \Phi(\lambda_N^\circ,\ l_N^\circ) \tag{2.19}$$

Перейдем в обеих частях предыдущего неравенства к пределу ($N \to \infty$). Заметим при этом, что величина $\Phi(\lambda_N,\ l_N^\circ)$ в этом неравенстве может быть представлена (с учетом (2.8)) в виде $\Phi(\lambda_N,\ l_N^\circ(t))$ (см. (2.9) — (2.13)). Тогда, учитывая слабую сходимость $\{\lambda_N^\circ,\ l_N^\circ(t)\}$ к $\{\lambda^\circ,\ l^\circ(t)\}$, а также соотношения (2.18), (2.19), получаем неравенство

$$\Phi(\lambda^\circ,\ l^\circ(t)) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \Phi(\lambda_N^\circ,\ l_N^\circ(t)) + \sigma/2$$

Полученное неравенство, очевидно, противоречит сделанному предположению.

Таким образом, существует подпоследовательность величин $\{\xi_N^\circ\}$, обеспечивающая выполнение условий (2.14), (2.15) одновременно. В результате предельного перехода получаем величину $\xi^\circ = \{\lambda^\circ,\ l^\circ(t)\}$. Рассмотрим подпоследовательность чисел $\{\nu_N^\circ\}$, отвечающую этой подпоследовательности $\{\xi_N^\circ\}$. Из (2.6) вытекает неравенство $\nu_{N_2}^\circ \geqslant \nu_{N_1}^\circ$, каковы бы ни были $N_2 > N_1$.

Подпоследовательность $\{\nu_N^\circ\}$, следовательно, монотонна; она является ограниченной и сходится к конечному пределу ν°. Переходя (2.9), (2.10) к пределу ($N \to \infty$), получаем равенство

$$\nu^\circ = \Psi(\xi^\circ) = \{\varphi_1[\xi^\circ] - \varphi_3[l^\circ(t)]\} \left(\int_{t^\circ}^{T} |\varphi_2[\xi^\circ;\ \tau]|\,d\tau\right)^{-1} \tag{2.20}$$

Рассуждая, далее, от противного и используя представления (2.18), (2.19), убеждаемся в том, что имеет место условие

$$\nu^\circ = \Psi(\xi^\circ) = \max_\xi \Psi(\xi) = \max_{\lambda,\, l(t)} \{\varphi_1[\xi] - \varphi_3[l(t)]\} \left(\int_{t_0}^{T} |\varphi_2[\xi;\ \tau]|\,d\tau\right)^{-1} \tag{2.21}$$

при

$$\rho[\xi] = \rho[\lambda,\quad l(t)] \leqslant 1,\quad \operatorname{vrai}\max_t \sum_{\lambda=1}^{m} |l_k(t)| \leqslant 1$$

Величина $\xi^\circ = \{\lambda^\circ,\ l^\circ\}$ оказывается, таким образом, экстремальным элементом задачи (2.21) на условный экстремум, являющейся предельным случаем для задачи (2.6), (2.7).

Покажем, что из последовательности оптимальных управлений $u_N^\circ(t)$ (2.4) для задач 1_N можно выделить подпоследовательность, имеющую слабый предел $u^\circ(t)$, и этот предел $u^\circ(t)$ и является оптимальным управлением для задачи 1. (При указанных условиях последовательности траекторий $x[t;\ u^\circ_N]$ будет равномерно сходиться к оптимальной траектории $x[t;\ u^\circ]$.)

Действительно, величины $u_N^\circ(t) = \nu_N^\circ \operatorname{sign} h_N^\circ(t)$ ограничены в метрике L_2 и потому содержат подпоследовательность $\{u_N^\circ\}$, слабо сходящуюся в L_2 к некоторой функции $u^\circ(t)$. Функция $u^\circ(t)$ удовлетворяет, очевидно, условиям задачи 1 (см. (2.2), (2.3)). При этом имеем [2]: $\operatorname{vrai}\max_t |u^\circ(t)| \leqslant \nu^\circ$. Покажем, что $\operatorname{vrai}\max_t |u^\circ(t)| = \nu^\circ$. В самом деле, предполагая, что $\operatorname{vrai}\max_t |u^\circ(t)| = \eta < \nu^\circ$, можем указать такое число N, что $\eta < \nu_N^\circ = \operatorname{vrai}\max_t |u_N^\circ(t)| < \nu^\circ$. Последнее противоречит оптимальности управления u_N°. Аналогичными рассуждениями можно показать, что управление $u^\circ(t)$ оптимальное.

Опишем кратко структуру функции $u^\circ(t)$. При этом сразу оградим себя от того случая, когда в окрестности каждой точки множества $[t_0,\ T]$, где $h^\circ(t) = 0$, могут содержаться точки из $[t_0,\ T]$, где $h^\circ(t) \neq 0$. Рассмотрим сначала множество $e \subset [t_0,\ T]$, где $h^\circ(t) > 0$. Множество e — открытое.

Выберем последовательность $\{\gamma_k\}$ положительных чисел γ_k, сходящуюся к нулю. Символом e_k обозначим множество $e_k \subset e$, где $h^\circ(t) \geqslant \gamma_k$. Фиксируем число $k = j$, полагая его таким, что множество e_j не пусто. Множество e_j — замкнутое. Используя (2.8), представим функции $h_N^\circ(t)$ (2.5) в виде $h_N^\circ(\tau) = \varphi_2[\xi_N^\circ;\ \tau] + o_2(\Delta_N t)$. Эти функции не являются, вообще говоря, непрерывными. Функции же $\varphi_2[\xi_N^\circ;\ \tau]$ (2.12) — непрерывные, и, более того, образуют, в силу условия (2.10) и свойств величин $h_s[T,\tau]$, $h_k[t,\tau]$, компактное [2] в пространстве C множество. Поэтому существует подпоследовательность величин $\{\xi_N^\circ\}$ (здесь для этой подпоследовательности сохраняем прежнее обозначение), на которой сходимость функций $\varphi_2[\xi_N^\circ;\ \tau]$ к функции $h^\circ(\tau)$ (2.17) будет равномерной.

Выбирая числа N_1, N_2 так, чтобы при $N > N_1$ имело место $\varphi_2[\xi_N;\ \tau] \geqslant 2\gamma_j / 3$, а при $N > N_2$ — неравенство $o_2(\Delta_N t) \leqslant \gamma_j / 3$, видим, что при $N = N(j) = \max(N_1, N_2)$ будет выполняться соотношение $h_N^\circ(t) \geqslant \gamma_j / 3$. В соответствии с (2.4) получаем что подпоследовательность управлений $u_N^\circ(t)$ сходится на множестве e_j к постоянной ν°.

Отсюда следует, что и слабый предел $u^\circ(t)$ равен ν° на множестве e_j. Проводя эти рассуждения для каждого $k > j$, видим, что $u^\circ(t) = \nu^\circ$ на каждом из соответствующих множеств e_k. Учитывая, далее, что $e = \bigcup e_k$, получаем: $u^\circ(t) = \nu^\circ$, если $h^\circ(t) > 0$. Аналогично показывается, что $u^\circ(t) = -\nu^\circ$, если $h^\circ(t) < 0$. Таким образом, приходим к выводу, что $u^\circ(t) = \nu^\circ \operatorname{sign} h^\circ(t)$, если $h^\circ(t) \not\equiv 0$ и $u^\circ(t)$ является слабым пределом подпоследовательности функций $u_N{}^\circ(t)$, если $h^\circ(t) \equiv 0$.

Из сказанного вытекает, что оптимальное управление $u^\circ(t)$ удовлетворяет следующему соотношению максимума:

$$h^\circ(t)\, u^\circ(t) = \max\nolimits_u h^\circ(t)\, u(t) \quad \text{при} \quad \operatorname{vrai}\max\nolimits_t |u(t)| \leqslant \nu^\circ \tag{2.22}$$

Соотношение (2.22) аналогично для задачи 1 принципу максимума Л. С. Понтрягина и подобно необходимым условиям оптимальности управления u°, полученным для такого рода задач, в работе [5].

Заметим однако, что рассматриваемый переход устанавливает условие существования решения задачи, указывает дополнительное условие (2.21), которое определяет функцию $h^\circ(t)$ и дает значение ν°, оценивающее оптимальное управление u°. Наконец, и это самое важное в данной работе, предельный переход позволяет получить оптимальное управление на тех интервалах времени, где $h^\circ(t) \equiv 0$.

В самом деле условие (2.22) не доставляет информации о том, как выбрать управление $u^\circ(t)$, когда $h^\circ(t) \equiv 0$.

Выше было показано, что оптимальное управление $u^\circ(t)$ можно в таких ситуациях искать как слабый предел подпоследовательности функции $u_N{}^\circ(t)$.

Однако, конкретное вычисление таким путем $u^\circ(t)$ затруднено тем обстоятельством, что управление $u_N{}^\circ(t)$ на интервалах времени, где $h^\circ(t) \equiv 0$, будут, как правило, скачкообразными управлениями, с возрастающим при $N \to \infty$ числом переключений, и приводят к так называемому «скользящему режиму» в системе (1.1). Чтобы обойти, в известной мере, указанную трудность, рассмотрим следующий способ построения $u^\circ(t)$ на интервалах времени, где $h^\circ(t) \equiv 0$. Пусть t — произвольная точка какого-нибудь из таких интервалов. Рассмотрим функции

$$\overset{\circ}{u}_\varepsilon(t) = \lim_{N\to\infty} \overset{\circ}{u}_{\varepsilon N}(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \overset{\circ}{u}_N(t+\vartheta)\, d\vartheta \tag{2.23}$$

Функции (2.23) будут непрерывными [2]. Суть операции (2.23) заключается в том, что подпоследовательность $\{u_N{}^\circ\}$ скачкообразных, вообще говоря, управлений $u_N{}^\circ$ (2.4) заменяется здесь последовательностью $\{u_{\varepsilon_k}{}^\circ\}$ ($\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$) усредненных (непрерывных) управлений $u_\varepsilon{}^\circ$ (2.23), и можно говорить о слабом пределе $\{u_{\varepsilon_k}{}^\circ(t)\}$, который в дальнейшем будем называть регуляризированным оптимальным управлением. Здесь проверим лишь, что $\{u_{\varepsilon_k}{}^\circ(t)\}$ приводит к той же траектории, что и управление $u^\circ(t)$. С этой целью, составляя разности $|x_s[t;\, u_\varepsilon] - x_s[t,\, u^\circ]|$ и учитывая слабую сходимость $\{u_N{}^\circ\}$ к u°, получаем

$$|x_s[t,\, u_\varepsilon^0] - x_s[t,\, u^\circ]| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \left\{ \lim_{N\to\infty} \left[\int_\vartheta^{t+\vartheta} h_s[t,\, \eta - \vartheta]\, \overset{\circ}{u}_{\varepsilon N}(\eta)\, d\eta - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_0^t h_s[t,\, \eta]\, u^\circ(\eta)\, d\eta \right]\right\} d\vartheta \right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \left\{ \left| \int_\vartheta^{t+\vartheta} [h_s[t,\, \eta - \vartheta] - h_s[t,\, \eta]\, u^\circ(\eta)\, d\eta \right| + \right.$$

$$+ \left| \int_\vartheta^t [h_s[t,\, \eta - \vartheta] - h_s[t,\, \eta]]\, u^\circ(\eta)\, d\eta \right| +$$

$$\left. + \left| \int_0^\vartheta [h_s[t,\, \eta - \vartheta] - h_s[t,\, \eta]]\, u^\circ(\eta)\, d\eta \right| \right\} d\vartheta \leqslant \varepsilon$$

Таким образом, получаем, что для всех $t_0 \leqslant t \leqslant T$ выполняется условие

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_s [t, u_\varepsilon^\circ] = x_s [t, u^\circ] \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Суммируя сказанное, приходим к выводу.

Теорема. Управление $u^\circ(t)$, найденное как слабый или регуляризированный предел оптимальных управлений $u_N{}^\circ$ в задачах 1_N, является оптимальным для задачи 1. Оно удовлетворяет принципу максимума (2.22), где минимальная функция $h^\circ(t)$ и число ν° являются решением задачи (2.21) на условный экстремум, являющейся предельной для задач (2.6), (2.7). На участках, где $h_0(t) \not\equiv 0$, $u^\circ(t) = \nu^\circ \operatorname{sign} h^\circ(t)$. На участках, где $h^\circ(t) \equiv 0$, управление $u^\circ(t)$ может быть определено путем регуляризированного предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ от непрерывных функций $u_\varepsilon{}^\circ(t)$ (2.23).

Аналогичным образом решается задача оптимального быстродействия при заданных ограничениях на управление ($\varkappa[u] \leqslant \nu$) и фазовые координаты (1.2). Отличие состоит лишь в том, что в задачах (2.6), (2.7) и (2.21) неизвестной величиной будет время T, а постоянная ν — заданной. [1]

Примечания. 1. Равенства (2.23) указывают лишь один из способов построения управления $u^\circ(t)$ при $h^\circ(t) \equiv 0$. Обсуждению иных способов построения $u^\circ(t)$ в таких случаях будет посвящена отдельная работа.

2. Приведенная схема рассуждений при исследовании задачи 1 сохраняется и в случаях нормы $\varkappa[u]$ иного, чем $\varkappa[u] = \operatorname{vrai} \max_t |u(t)|$ вида и обобщается автоматически на случай выпуклого положительного функционала $\varkappa[u]$ и на случай нестационарной системы (1.1) с векторным управлением u.

3. Изложенный подход к решению задачи 1 позволяет охватить также задачи о минимуме на заданном промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$ максимального отклонения фазовых координат системы (1.1) при заданном ограничении $\varkappa[u] \leqslant \nu$.

В качестве элементарного примера (где, однако, хорошо прослеживаются все основные операции, составляющие суть изложенного подхода и который можно, разумеется, легко решить из простых механических соображений) рассмотрим движение $x^{\cdot\cdot} = u$ материальной точки, которую при помощи силы u ($|u| \leqslant 1$) требуется перевести за минимальное время T из положения $\{x(0) = 0,\ x^\cdot(0) = 0\}$ в положение $\{x(T) = 1,\ x^\cdot(T) = 0\}$ при ограничении $|x^\cdot(t)| \leqslant f(t) = t/2$. Задача (2.21) сводится к следующей: найти

$$\max_{\lambda,\, l(t)} \left\{ \left(\lambda_2 - \int_0^T 0.5t\, |l(t)|\, dt\right) \left(\int_0^T \left| (T-\tau)\lambda_1 + \lambda_2 + \int_\tau^T l(t)\, dt \right| d\tau\right)^{-1} \right\} = 1$$

при

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \int_0^T l(t)\, dt = r, \qquad |l(t)| \leqslant r, \qquad r = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{3}$$

(Изложенные на стр. 195—199 рассуждения сохраняют силу и в том случае, когда ограничения в (2.7) не обязательно единичные.)

Решение этой задачи доставляют величины

$$\lambda_1^\circ = 1, \qquad \lambda_2^\circ = -\sqrt{6}/3, \qquad T = \sqrt{6}$$

$$l^\circ(t) = -1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\sqrt{6}/3, \qquad l^\circ(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 2\sqrt{6}/3 < t \leqslant \sqrt{6}$$

---

[1] Частный случай этой задачи (без обсуждения случая $h^\circ(t) \equiv 0$) рассматривался в работе [6].

Из (2.17) получаем, что

$$h^\circ(t) \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 2\sqrt{6}/3, \qquad h^\circ(t) = -t + 2\sqrt{6}/3 \quad \text{при } 2\sqrt{6}/3 \leqslant t \leqslant \sqrt{6}$$

Согласно теореме, $u^\circ(t) = -1$ при $2\sqrt{6}/3 \leqslant t \leqslant \sqrt{6}$. Для определения $u^\circ(t)$ при $0 \leqslant t < 2\sqrt{6}/3$ составляем функции $u_\varepsilon{}^\circ(t)$ (2.23). Для этого, решая задачу 1_N с шагом $\Delta_N t = 2\sqrt{6}/3N$, находим, что на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2\sqrt{6}/3$:

$$u^\circ(t) = 1 \quad \text{при } t_{i-1} \leqslant t < t_i + \Delta_N t\, {}^3/_4$$
$$u^\circ(t) = 1 \quad \text{при } t_{i-1} + 3\Delta_N t/4 \leqslant t < t_i + \Delta_N t$$

(Управления $\overset{\circ}{u}_N(t)$ приводят, как видим, к «скользящему» режиму.) Регуляризированные функции $\overset{\circ}{u}_\varepsilon(t)$ (2.23) имеют вид $\overset{\circ}{u}_\varepsilon(t) = {}^1/_2\ (0 \leqslant t < 2\sqrt{6}/3 - \varepsilon)$ и дают регуляризированную последовательность управлений $\{u_\varepsilon{}^\circ\}$, которая сходится (в данном примере, как видим, уже в обычном смысле) к функции $u^\circ(t) = {}^1/_2$, которая как раз и является слабым пределом величин $u_N{}^\circ(t)$. Окончательно

$$u^\circ(t) = {}^1/_2 \ \text{при } 0 \leqslant t < 2\sqrt{6}/3$$
$$\text{и } u^\circ(t) = -1 \ \text{при } 2\sqrt{6}/3 \leqslant t \leqslant \sqrt{6}.$$

Задача, рассмотренная в статье была поставлена на семинаре Н. Н. Красовского в Уральском университете. Авторы благодарят руководителя семинара за ценные советы.

Поступила 14 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Физматгиз, 1967.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. С. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 2, М., Гостехиздат, 1956.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
5. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Некоторые оптимальные задачи для линейных систем. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 12.
6. Кириллова Ф. М. Об одном направлении в теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, 1967, № 11.