Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СОЧЕТАНИИ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ

Г. С. Шелементьев

(Свердловск)

Решается задача о наилучшем приведении управляемой системы к заданному состоянию при заданном ограничении на управляющее воздействие и при условии наблюдения части фазовых координат. Определяется оптимальный момент времени перехода от наблюдения к управлению. Рассматриваемая задача является некоторым минимаксным аналогом стохастической проблемы управления, изложенной в [1].

§ 1. Постановка задачи. Пусть имеется управляемый объект, состояние которого на отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_\beta$ описывается дифференциальным уравнением

$$dx / dt = Ax + Bu \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат управляемого объекта, u — r-мерный вектор управляющего воздействия, A и B — постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Будем исследовать движение этого объекта при следующих условиях.

(1) Состояние $x(t_0) = x^\circ$ объекта точно неизвестно, но стеснено некоторым заданным ограничением $x(t_0) \in G\{t_0\}$.

(2) Для уточнения фазового состояния объекта движение $x(t)$ сначала наблюдается на некотором промежутке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha \leqslant t_\beta$, после чего с момента $t = t_\alpha$ начинается процесс управления. При этом предполагаем, что измеряются координаты $z_j(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha$ $(j = 1, \ldots, m)$ некоторого m-мерного вектора $z(\tau)$, связанного с фазовым вектором $x(t)$ соотношением

$$z(\tau) = Hx(\tau) + \Delta(\tau) \tag{1.2}$$

где H — постоянная матрица порядка $m \times n$, а $\Delta(\tau)$ — погрешность, которая может носить случайный характер. Реализация ошибки $\Delta(\tau)$ неизвестна, но априори дана оценка ее интенсивности

$$\chi[\Delta(\tau)] \leqslant \nu, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha, \quad \nu = \text{const} > 0 \tag{1.3}$$

В дальнейшем примем, что величина $\chi[\Delta(\tau)]$ имеет смысл какой-нибудь нормы функции $\Delta(\tau)$ (например, $\chi[\Delta(\tau)] = \max_\tau \|\Delta(\tau)\|$, $\|\Delta\|$ — евклидова норма вектора Δ).

Фазовые координаты $x_i(t_\alpha)$ вычисляются по сигналу $z(\tau)$ с помощью соответствующих разрешающих операций [2-4].

(3) Интенсивность $\varkappa[u]$ допустимого управляющего воздействия на участке $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$ ограничена некоторой постоянной величиной $\mu > 0$:

$$\varkappa[u(t)] \leqslant \mu \tag{1.4}$$

И здесь примем, что величина $\varkappa\,[u]$ имеет смысл какой-нибудь нормы функции, например,

$$\left[\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \|u(\tau)\|^2 d\tau\right]^{1/2} \leqslant \mu$$

Итак, отрезок времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_\beta$ разбивается на два участка: участок наблюдения $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha$ и участок управления $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$. Возникает вопрос о наилучшем согласовании наблюдения и управления с точки зрения оптимальности конечного результата процесса. В связи с этим представляет интерес отыскание такого момента времени $t = t_\alpha$ переключения с наблюдения движения системы на управление ею, чтобы оптимизировать некоторый критерий качества [1]. Таким критерием является, например, степень близости $\varepsilon\,[x\,(t_\beta)]$ объекта к заданному состоянию $x = x_*$ в момент $t = t_\beta$ окончания процесса. Примером может служить задача о наилучшем сближении фазовой точки $x\,(t_\beta)$ с началом координат $x = 0$. В этом случае

$$\varepsilon\,[x\,(t_\beta)] = (x_1^2\,(t_\beta) + \ldots + x_n^2\,(t_\beta))^{1/2}$$

Однако возможны ситуации, когда требуется обеспечить близость к заданному состоянию только по части координат. В частности, тогда может быть

$$\varepsilon\,[x\,(t_\beta)] = (x_1^2\,(t_\beta) + \ldots + x_k^2\,(t_\beta))^{1/2} \qquad (k < n)$$

В общем случае $\varepsilon\,[x\,(t_\beta)]$ — некоторая заданная функция.

Уточним постановку задачи.

Проблема определения с наименьшей ошибкой координат $x_i\,(t_\alpha)$ объекта по доступным наблюдению величинам $z_j\,(\tau)$ (1.2), (1.3) есть задача об оптимальном наблюдении динамической системы. Эта задача формулируется следующим образом [3, 4].

Задача 1. Требуется найти оптимальную операцию $\varphi_i{}^\circ\,[z\,(\tau)]$, вычисляющую координату

$$x_i\,(t_\alpha) = \varphi_i^\circ\,[z\,(\tau)] + \omega_i = x_i^* + \omega_i \tag{1.5}$$

с наименьшей гарантированной ошибкой ω_i. Искомая разрешающая операция $\varphi_i{}^\circ$ должна удовлетворять условию минимакса $\min_\varphi \sup_\Delta |\,\omega_i\,|$ ошибки ω_i по всем возможным погрешностям Δ сигнала $z\,(\tau)$ и по всем допустимым операциям φ.

Верхняя грань $\delta_i\,(t_\alpha)$ модуля ошибки ω_i, т. е. величина $\delta_i\,(t_\alpha) = \sup_\Delta |\,\omega_i\,|$ при $\chi\,[\Delta] \leqslant \nu$ оценивается известным образом [3, 4] и выражается через величину ν (1.3) и через норму операции $\varphi_i{}^\circ$, разрешающей задачу 1 о наблюдении.

---

[1] Практически участки наблюдения и управления разделяются некоторым третьим интервалом, в течение которого принимается решение о переходе к управлению. Однако идеализируем задачу, предполагая, что все вычисления, нужные для принятия этого решения, выполняются мгновенно и, принимая даже, что переход к управлению возможен в тот же момент $t = t_\alpha$, когда закончено наблюдение.

Таким образом, в результате решения задачи об оптимальном наблюдении к моменту $t = t_\alpha$ в фазовом пространстве вокруг точки $x^* = \{\varphi_i^\circ [z(\tau)]\}$ очерчивается некоторая область $R\ \{t_\alpha, x^*\}$, точки которой только и могут явиться истинным положением объекта $x(t_\alpha)$ в этот момент. Согласно предыдущему, эта область описывается неравенствами

$$x_i^* - \delta_i \leqslant x_i \leqslant x_i^* + \delta_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Кроме того, здесь следует учесть еще результат предыдущих наблюдений на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha'$ $(t_\alpha' < t_\alpha)$ и начальное ограничение $x(t_0) \in G\{t_0\}$. Этот учет определим рекуррентно. Именно предположим, что последнее наблюдение перед моментом $t = t_\alpha$ было произведено в момент $t = t_\alpha' < t_\alpha$ и была найдена область $G\{t_\alpha'\}$ возможных значений $x(t_\alpha')$. Область $G\{t_\alpha'\}$ определяет область $G\{t_\alpha \mid t_\alpha'\}$ состояний $x(t_\alpha)$, в которые может перейти система (1.1) уравнений при $u \equiv 0$ из состояний $x(t_\alpha') \in G\{t_\alpha'\}$. Иначе говоря, точки области $G\{t_\alpha \mid t_\alpha'\}$ определяются равенствами

$$x = X[t_\alpha, t_\alpha'] \, x(t_\alpha') \tag{1.7}$$

где $X[t, t_\alpha']$ — фундаментальная матрица системы (1.1) $x(t_\alpha')$ из $G\{t_\alpha'\}$. Теперь заключаем, что областью возможных состояний $x(t_\alpha)$ будет служить множество $G\{t_\alpha\}$, являющееся пересечением $G\{t_\alpha \mid t_\alpha'\}$ и $R\{t_\alpha\}$.

Задача об определении области $G\{t_\alpha\}$ должна решаться по ходу реализации процесса.

Предположим теперь, что в момент $t = t_\alpha$ произошел переход к управлению. Тогда целесообразно рассмотреть следующую задачу.

Задача 2. Пусть движение управляемого объекта на промежутке $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$ описывается уравнением (1.1) и заданы в момент $t = t_\alpha$ область возможных состояний $G\{t_\alpha\}$ и ограничение (1.4) на управляющее воздействие u. Требуется определить оптимальное управление $u(t)$, которое обеспечивает

$$\varepsilon(t_\alpha) = \min_u \max_{x(t_\alpha)} \varepsilon[x(t_\beta)] \qquad (\varkappa[u] \leqslant \mu, \ x(t_\alpha) \text{ из } G\{t_\alpha\}) \tag{1.8}$$

Решение задачи 2, вытекающее из известной теории управления линейными системами, будет описано ниже. Примем пока, что величина $\varepsilon(t_\alpha)$ в момент $t = t_\alpha$ найдена. Для решения вопроса о целесообразности перехода в данный момент $t = t_\alpha$ к управлению требуется еще прогноз величины $\varepsilon(t_\alpha')$ при $t_\alpha' > t_\alpha$. Прогнозируемую величину $\varepsilon(t_\alpha')$, вычисляемую на основании результатов наблюдения, полученных к моменту $t = t_\alpha$, обозначим символом $\varepsilon(t_\alpha' \mid t_\alpha)$.

Эту величину будем вычислять исходя из самой неблагоприятной ситуации, которую можно ожидать в будущем при $t_\alpha' > t_\alpha$ на основании полученных в момент $t = t_\alpha$ данных об области $G\{t_\alpha\}$. Поясним точнее смысл величины $\varepsilon(t_\alpha' \mid t_\alpha)$. Итак пусть $t = t_\alpha'$ — некоторый момент времени $(t_\alpha' > t_\alpha)$. Фиксируем некоторое значение $x(t_\alpha) = x^\alpha$ из $G\{t_\alpha\}$. Исходя из этого состояния, система, не подверженная управлению, к моменту $t = t_\alpha'$ придет в состояние

$$x^\alpha(t_\alpha') = X[t_\alpha', t_\alpha] x^\alpha$$

Решая в будущем задачу о наблюдении на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_\alpha'$, согласно предыдущему, получим значение

$$x^* (t_\alpha') = \{\varphi_i^0 [z (\tau)]\} \quad (t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha')$$

такое, что

$$| x_i^* (t_\alpha') - x_i^\alpha (t_\alpha') | \leqslant \delta (t_\alpha).$$

Но значения $x^\alpha (t_\alpha')$ составляют область $G \{t_\alpha' | t_\alpha\}$. Таким образом, прогнозируя процесс, надлежит учесть все точки x_i^*, лежащие в $\{\delta_i (t_\alpha')\}$ окрестности области $G \{t_\alpha' | t_\alpha\}$. Обозначим эту окрестность символом $Q \{t_\alpha' | t_\alpha\}$. Теперь можно заключить, что в будущем при $t_\alpha' > t_\alpha$ можно встретиться лишь с областями $R \{t_\alpha', x^* (t_\alpha')\}$, каждая из которых будет пересечением области, определенной неравенствами

$$| x_i^* (t_\alpha') - x_i | \leqslant \delta_i (t_\alpha')$$

с областью $G \{t_\alpha' | t_\alpha\}$, причем $x^* (t_\alpha')$ из $Q \{t_\alpha' | t_\alpha\}$. Далее для каждой такой области $G \{t_\alpha', x^* (t_\alpha')\}$ придется решать задачу 2 об управлении на отрезке $[t_\alpha', t_\beta]$. Пусть это решение дает величину $\varepsilon (t_\alpha', x^* (t_\alpha'))$.

Далее надлежит рассмотреть следующую задачу.

Задача 3. Найти величину $\varepsilon (t_\alpha' | t_\alpha)$, которая определяется из условия

$$\varepsilon (t_\alpha' | t_\alpha) = \sup_{x^* (t_\alpha')} \varepsilon (t_\alpha'; x^* (t_\alpha')) \quad \text{при } x^* (t_\alpha') \in Q \{t_\alpha' | t_\alpha\} \tag{1.9}$$

Теперь вопрос о выборе момента $t = t_\alpha$, когда следует переходить к управлению, решается следующим образом. Пусть $t = t_\alpha$ — некоторый момент времени $t_\alpha \geqslant 0$. По реализовавшимся данным $z (\tau)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha)$, решаем задачу 1, определяем область $G \{t_\alpha\}$ и, решая задачу 2, находим величину $\varepsilon (t_\alpha)$. Далее решаем задачу 3 и составляем функцию $\varepsilon (\tau | t_\alpha)$ для всех $\tau > t_\alpha$. Если для всех $\tau > t_\alpha$ окажется $\varepsilon (\tau | t_\alpha) > \varepsilon (t_\alpha)$, то следует в момент $t = t_\alpha$ переходить к управлению, так как иначе в дальнейшем при $\tau = t_\alpha' > t_\alpha$ не будем гарантированы от встречи только с худшими ситуациями. Если же функция $\varepsilon (\tau | t_\alpha)$ на отрезке времени $t_\alpha < \tau \leqslant t_\beta$ такова, что для некоторых моментов t_α' из этого отрезка выполняется неравенство $\varepsilon (t_\alpha' | t_\alpha) \leqslant \varepsilon (t_\alpha)$, то можно отложить переход к управлению до момента $t = t_\alpha'$, в который функция $\varepsilon (\tau | t_\alpha)$ имеет минимум, так как даже в самом худшем случае при переходе к управлению в момент $t = t_\alpha'$ будет гарантирован лучший результат, чем при переходе к управлению в момент $t = t_\alpha$.

Решая теперь в момент $t = t_\alpha'$ последовательно задачи 1, 2 и 3 по сигналу $z (\tau)$, реализовавшемуся на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha'$, определяем момент $\tau = t_\alpha''$ нового минимума функции $\varepsilon (\tau | t_\alpha')$, до которого можно продолжить наблюдение, и так далее до того момента $t = t_\alpha^0$, когда для всех $\tau > t_\alpha^0$ окажется $\varepsilon (\tau'_\alpha | t_\alpha^0) > \varepsilon (t_\alpha^0)$.

Таким образом получаем алгоритм для определения оптимального момента времени $t = t_\alpha^0$ перехода от наблюдения к управлению движением системы.

§ 2. Решение задачи 1. Для определения области $G\{t_\alpha\}$ необходимо вычислить величины x_i^* и $\delta_i(t_\alpha)$ (1.6), характеризующие многогранник $R\{t_\alpha\}$. Опишем здесь кратко процедуру решения [4] задачи об оптимальном наблюдении, в ходе которой определяются эти величины.

Пусть в системе (1.1) управление $u(\tau) \equiv 0$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha$, а на сигнал $z(\tau)$ (1.2) наложено ограничение (1.3). Считая, что вектор-функции $z(\tau)$, $\Delta(\tau)$ и $y(\tau) = Hx(\tau)$ будут элементами $h(\tau)$ некоторого функционального пространства $B\{h(\tau), t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha\}$, в котором норма $\rho[h]$ определена равенством $\rho[h] = \chi[h(\tau)]$ (1.3), можно определить в этом пространстве всевозможные линейные ограниченные операции $\varphi_i[z(\tau)]$, среди которых надлежит найти операцию, вычисляющую координаты $x_i(t_\alpha)$ по сигналу $z(\tau)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha)$. При этом функции $v_i(\tau)$, порождающие операции $\varphi_i[h(\tau)]$ в пространстве B, составляют сопряженное пространство B^*, в котором норма функций v_i и норма операций φ_i совпадают, $\chi^*[v_i] = \chi^*[\varphi_i]$. Вид операции φ_i определяется всякий раз выбором пространства B.

Например, если сигналы $z(\tau)$ образуют пространство $C\{h(\tau)\}$ непрерывных на $[t_0, t_\alpha]$ функций с нормой

$$\chi[h] = \max_\tau \| h(\tau) \|$$

то общий вид линейной операции выражается интегралом Стильтьеса

$$\varphi[h(\tau)] = \int_{t_0}^{t_\alpha} h'(\tau)\, dV(\tau)$$

а норма $\chi^*[\varphi]$ операции φ определяется равенством

$$\chi^*[\varphi] = \operatorname{var}[V,\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha]$$

Здесь $V(\tau)$ — функция с ограниченным изменением, а $\operatorname{var}[V, t_0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha]$ — полное изменение функции $V(\tau)$ на отрезке $[t_0, t_\alpha]$.

Чтобы теперь среди операций φ_i выделить оптимальную разрешающую операцию $\varphi_i^\circ[z(\tau)]$, дающую наименьшую абсолютную ошибку ω_i в самом неблагоприятном случае сигнала $z(\tau)$ (1.2), (1.3), воспользуемся правилом минимакса [4]. Для этого среди сигналов $y(\tau)$ выберем сигналы, несущие величины $x_i(t_\alpha) = 1$.

Следуя обозначениям, принятым в [4], имеем

$$\{y(\tau) \mid x_i(t_\alpha) = 1\} = [HX[\tau, t_\alpha]\, x(t_\alpha)]_{x(t_\alpha)=1}$$

Зная теперь сигналы $\{y(\tau) \mid x_i(t_\alpha) = 1\}$, найдем минимальный сигнал $y^\circ(\tau)$ из условия

$$\chi^\circ = \chi[y^\circ(\tau)] = \min_y \chi[\{y(\tau) \mid x_i(t_\alpha) = 1\}]$$

Задача об оптимальном наблюдении имеет решение в том и только в том случае, когда $\chi^\circ = \chi[y^\circ(\tau)] > 0$.

Оптимальная разрешающая операция φ_i°, согласно правилу минимакса, имеет норму $\chi^*[\varphi_i^\circ[z(\tau)]] = 1 / \chi^\circ$ и выделяется среди других линейных операций φ_i свойством максимума: на минимальном сигнале $y^\circ(\tau)$ эта операция дает наибольший возможный результат по сравнению со всеми другими операциями φ_i с той же нормой $\chi^*[\varphi_i] = 1 / \chi^\circ$, т. е.

$$\overset{\circ}{\varphi}_i[y^\circ(\tau)] = \max_\varphi \{\varphi_i[y^\circ(\tau)] \quad \text{при } \chi^*[\varphi_i] = 1/\chi^\circ\}$$

Величины $\delta_i(t_\alpha)$ находятся по формуле

$$\delta_i(t_\alpha) = \sup_\Delta |\overset{\circ}{\varphi}_i[\Delta(\tau)]| = \nu\chi^*[\overset{\circ}{\varphi}_i[z(\tau)]] = \nu/\chi^\circ$$

Пересечение областей $R\{t_\alpha\}$ (1.6) и $G\{t_\alpha \mid t_\alpha'\}$ (1.7) определяет искомую область $G\{t_\alpha\}$ возможных состояний системы в момент $t = t_\alpha$.

§ 3. Решение задачи 2. Перейдем теперь к определению величины $\varepsilon(t_\alpha)$ (1.8), характеризующей близость фазовой точки $x(t_\beta)$ к заданному состоянию $x = x_*$ в момент окончания процесса $t = t_\beta$.

Итак пусть заданы момент времени $t = t_\alpha$, область $G\{t_\alpha\}$ возможных состояний системы в этот момент и множество $P\{u : \varkappa[u] \leqslant \mu\}$ допустимых управлений u (1.4). При каждом фиксированном управлении u из $P\{u\}$ величина $\varepsilon[x(t_\beta)]$ будет зависеть от выбора начального значения $x(t_\alpha)$, и самый неблагоприятный случай наибольшего удаления фазовой точки $x(t_\beta)$ от заданного значения $x = x_*$ определится выражением

$$\varepsilon_u(t_\alpha) = \max\nolimits_{x(t_\alpha)} \varepsilon[x(t_\beta)] \quad \text{при } x(t_\alpha) \text{ из } G\{t_\alpha\}$$

Если требуется получить наименьшее отклонение фазовой точки от положения $x = x_*$ к моменту $t = t_\beta$ при любом начальном состоянии $x(t_\alpha)$ из $G\{t_\alpha\}$, то надлежит выбрать такое управление u из $P\{u\}$, которое обеспечивало бы минимум величине $\varepsilon_u(t_\alpha)$. Тогда максимальная гарантированная близость $\varepsilon(t_\alpha)$ определится из условия

$$\varepsilon(t_\alpha) = \min\nolimits_u \varepsilon_u(t_\alpha) = \min\nolimits_u \max\nolimits_{x(t_\alpha)} \varepsilon[x(t_\beta)] \tag{3.1}$$
$$\text{при } u \text{ из } P\{u\},\ x(t_\alpha) \text{ из } G\{t_\alpha\}$$

Для решения задачи (3.1) заменой переменных $x = y + w$ разобьем систему (1.1) на две подсистемы

$$dy/dt = Ay + Bu, \qquad y(t_\alpha) = y^\alpha \tag{3.2}$$

$$dw/dt = Aw, \quad w(t_\alpha) = x(t_\alpha) - y^\alpha, \quad x(t_\alpha) \in G\{t_\alpha\} \tag{3.3}$$

Точка y^α выбирается из удобства счета, в частности, можно положить $y^\alpha = 0$. Линейное преобразование

$$w = X[t_\beta, t_\alpha]\, w(t_\alpha) \tag{3.4}$$

переводит область $G\{t_\alpha\}$ в некоторую область $W\{t_\alpha\}$. Решения $y(t_\beta)$ системы (3.2) при различных u (1.4) образуют область достижимости $\Gamma[y^\alpha, t_\alpha, t_\beta, \mu]$ процесса $y(t)$ к моменту $t = t_\beta$ при $y(t_\alpha) = y^\alpha$ и при $u = u(t)$ (1.4). При этом по формуле Коши

$$y(t_\beta) = X[t_\beta, t_\alpha]\, y^\alpha + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} X[t_\beta, \tau]\, Bu(\tau)\, d\tau \tag{3.5}$$

Из (3.1), (3.4) и (3.5) следует, что

$$\varepsilon(t_\alpha) = \min\nolimits_u \gamma[y(t_\beta)] \quad \text{при } \varkappa[u] \leqslant \mu \tag{3.6}$$

Здесь

$$\gamma[y(t_\beta)] = \max\nolimits_w \varepsilon[y(t_\beta) + w] \quad \text{при } w \text{ из } W\{t_\alpha\} \tag{3.7}$$

Задача (3.6), (3.7) состоит в определении точки $y_0{}^\beta$ из области $\Gamma[y^\alpha, t_\alpha, t_\beta, \mu]$ и управления $u = u^\circ(t)$, обеспечивающих минимум функции $\gamma[y(t_\beta)]$ при условии (1.4). Иначе говоря, нужно определить точки

$y(t_\beta)$, образующие область достижимости процесса $y(t)$. Чтобы найти область достижимости $\Gamma[y^\alpha, t_\alpha, t_\beta, \mu]$, рассмотрим задачу об оптимальном переводе [3] системы (3.2) из начальной точки y^α в какую-нибудь временно зафиксированную точку y^β за время $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$ при условии минимума интенсивности $\varkappa[u]$. Решение такой задачи, как известно [4], сводится к нахождению вектора k, решающего задачу

$$\max_k c'[y^\beta]k = \zeta^\circ[y^\beta] \tag{3.8}$$

при условии

$$\rho[B'S[\tau, t_\beta]k] \leqslant 1 \tag{3.9}$$

где $S[t, t_\beta]$ — фундаментальная матрица системы $ds/dt = -A's$, сопряженной системе (3.3), и $c[y^\beta] = y^\beta - X[t_\beta, t_\alpha]y^\alpha$. Управление $u^\circ(t)$, решающее задачу оптимального перевода системы (3.2) из положения y^α в положение y^β, имеет норму $\rho^*[u] = \zeta^\circ[y^\beta]$ и определяется по правилу максимума [4]

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta} k^{\circ\prime}S[\tau, t_\beta]Bu^\circ(\tau)d\tau = \max_u \int_{t_\alpha}^{t_\beta} k^{\circ\prime}S[\tau, t_\beta]Bu(\tau)d\tau \tag{3.10}$$

$$\text{при } \rho^*[u] \leqslant \zeta^\circ[y^\beta]$$

где k° и $\zeta^\circ[y^\beta]$ — решение задачи (3.8), (3.9).

Таким образом, решая задачу (3.8), (3.9), получим выражение интенсивности управления в виде функции $\zeta^\circ[y^\beta]$ от конечного состояния $y(t_\beta)$ системы (3.2) в момент $t = t_\beta$. Учитывая, что величина интенсивности ограничена постоянной μ (1.4), из (3.6), (3.7), получим, что задача определения $\varepsilon(t_\alpha)$ сводится к задаче на условный экстремум

$$\min_y \gamma[y(t_\beta)] \doteq \varepsilon(t_\alpha) \tag{3.11}$$

при условии

$$\zeta^\circ[y(t_\beta)] \leqslant \mu \tag{3.12}$$

где $\zeta^\circ[y(t_\beta)]$ находится из условий (3.8), (3.9).

Определив из (3.7), (3.11) и (3.12) точку y_0^β, на которой достигается минимум, из (3.8), (3.9) можно найти и оптимальное управление $u^\circ(t)$, обеспечивающее максимальную близость $\varepsilon(t_\alpha)$ фазовой точки к заданному состоянию $x = x_*$.

Примечания. 3.1. Заметим, что в тех случаях, когда в задаче (3.6), (3.7) речь идет о минимизации функции $\gamma[y(t_\beta)]$, поверхности уровня $\gamma[y(t_\beta)] = \text{const}$ которой обладают свойством выпуклости, то задача определения величины $\varepsilon(t_\alpha)$ упрощается, так как некоторые операции взятия минимума и максимума в задаче (3.8) — (3.10) можно переставлять местами [3,5,6].

3.2. Выше указана процедура определения оптимального момента t_α° перехода от наблюдения к управлению движением объекта в предположении, что задача о наблюдении решается каждый раз в момент $\tau = t_\alpha'$, когда функция $\varepsilon(\tau \mid t_\alpha)$ принимает на отрезке $[t_\alpha', t_\beta]$ минимальное значение. Иногда аналогичную процедуру удобно строить, задаваясь заранее последовательностью моментов наблюдений $t_k = t_{k-1} + \Delta t$, но не выбирая эти моменты из условия минимума функции $\varepsilon(\tau \mid t_\alpha)$.

§ 4. **Пример.** Рассмотрим материальную точку, движение которой по прямой ξ описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1 \qquad \left(x_1=\xi,\ x_2=\frac{d\xi}{dt}\right) \tag{4.1}$$

Предположим, что точное значение скорости точки при $t = 0$ неизвестно, но заданы границы возможных значений скорости в этот момент $m_0 \leqslant x_2(0) \leqslant n_0$. Величину скорости $x_2(t)$ в текущий момент $\tau = t$ будем определять на основании измерения координаты x_1. Измерение же производится с некоторой ошибкой $\omega_1(t)$, величина которой ограничена

$$|\omega_1(t)| \leqslant \delta, \qquad \delta > 0 - \mathrm{const} \tag{4.2}$$

Допустим также, что движение точки можно корректировать с целью изменения величины скорости точки, но при этом запас энергии $\varkappa[u]$, который можно использовать на коррекцию движения, ограничен

$$\varkappa[u]=\left[\int_{t_\alpha}^{t_\beta} u^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}\leqslant\mu, \quad \mu>0-\mathrm{const} \tag{4.3}$$

Пусть в задаче требуется так подобрать момент $t = t_\alpha^\circ$ перехода от наблюдения к управлению, чтобы за оставшееся на управление время $(1 - t_\alpha^\circ)$ управлением u (4.3) можно было сделать скорость точки минимальной, т. е. чтобы в момент $t = t_\beta$ окончания процесса движения выполнялось соотношение

$$\varepsilon[x(t_\beta)]=|x_2(t_\beta)|=\min_{t_\alpha} \tag{4.4}$$

Известно [4], что оптимальная разрешающая операция $\varphi^\circ[x_1]$, определяющая момент $t = t_\alpha$ величину скорости $x_2(t_\alpha)$ точки, движущейся по инерции $(u(\tau)\equiv 0,$ $0 \leqslant \tau \leqslant t_\alpha)$ при условии (4.2), имеет вид

$$\varphi^\circ[x_1]=[x_1(t_\alpha)-x_1(0)]\,/\,t_\alpha=x_2(t_\alpha) \tag{4.5}$$

и совпадает, следовательно, с обычной формулой вычисления скорости равномерно движущейся точки. Заметим здесь, что при другом задании интенсивности помехи $\Delta(\tau)$ (1.3) оптимальная разрешающая операция $\varphi^\circ[x_1]$ будет иметь вид, отличный от (4.5). Скорость $x_2(t_\alpha)$ вычисляется с ошибкой $\omega_2(t_\alpha)$, причем $|\omega_2(t_\alpha)| \leqslant 2\delta / t_\alpha$.

Область возможных состояний $G\{t_{\alpha i}\}$ представляет собой отрезок $[n_i, m_i]$, где

$$n_i=\begin{cases} n_{i-1} & \text{при } y_{\alpha i}+\Lambda_i \geqslant n_{i-1} \\ y_{\alpha i}+\Lambda_i & \text{при } y_{\alpha i}+\Lambda_i < n_{i-1}\end{cases}, \qquad m_i=\begin{cases} m_{i-1} & \text{при } y_{\alpha i}-\Lambda_i \leqslant m_{i-1} \\ y_{\alpha i}-\Lambda_i & \text{при } y_{\alpha i}-\Lambda_i > m_{i-1}\end{cases}$$

Здесь $y_{\alpha i} = x_2(t_{\alpha i})$ (1.5), (4.5) и $\Lambda_i = 2\delta / t_{\alpha i}$, а моменты времени $t_{\alpha i}$ определяются в результате решения задачи 3 на $(i - 1)$-м шаге. Учитывая, что максимум функции $\varepsilon[x(t_\beta)]$ по w достигается на границе области $W\{t_{\alpha i}\}$ (3.4), т. е. в точке $w_{\alpha i} = (n_i - m_i) / 2$, получаем, что для каждого момента $t = t_{\alpha i}$ функция $\gamma[y]$ (3.7) имеет вид

$$\gamma[y]=|y|+w_{\alpha i} \tag{4.6}$$

а функция $\zeta^\circ[y]$ после решения задачи (3.8), (3.9), (4.3) определяется выражением

$$\zeta^\circ[y]=\frac{\mu\,|y-\mathring{y}_i|}{M(t_{\alpha i})}, \quad y_i^\circ=\frac{n_i+m_i}{2}, \quad M(t_{\alpha i})=\mu(1-t_{\alpha i})^{1/2} \tag{4.7}$$

Таким образом, решение задачи свелось к отысканию минимума функции (4.6) при условии (4.7). В каждый момент $t = t_{\alpha i}$ минимум $\varepsilon(t_\alpha)$ (3.11) функции $\gamma[y]$ (4.6) равен или $w_{\alpha i}$ и достигается в точке $y = 0$, если $|y_{\alpha i}| \leqslant M(t_{\alpha i})$, или $w_{\alpha i} + |y_{\alpha i}| - M(t_{\alpha i})$ и достигается на одном из концов отрезка $[y_{\alpha i} - M(t_{\alpha i}),\ y_{\alpha i} + M(t_{\alpha i})]$, если $|y_{\alpha i}| > M(t_{\alpha i})$. В последнем случае следует сразу же переходить на управление.

Прогнозирующая функция $\varepsilon(\tau \mid t_{\alpha i})$ для всех $\tau > t_{\alpha i}$ имеет вид

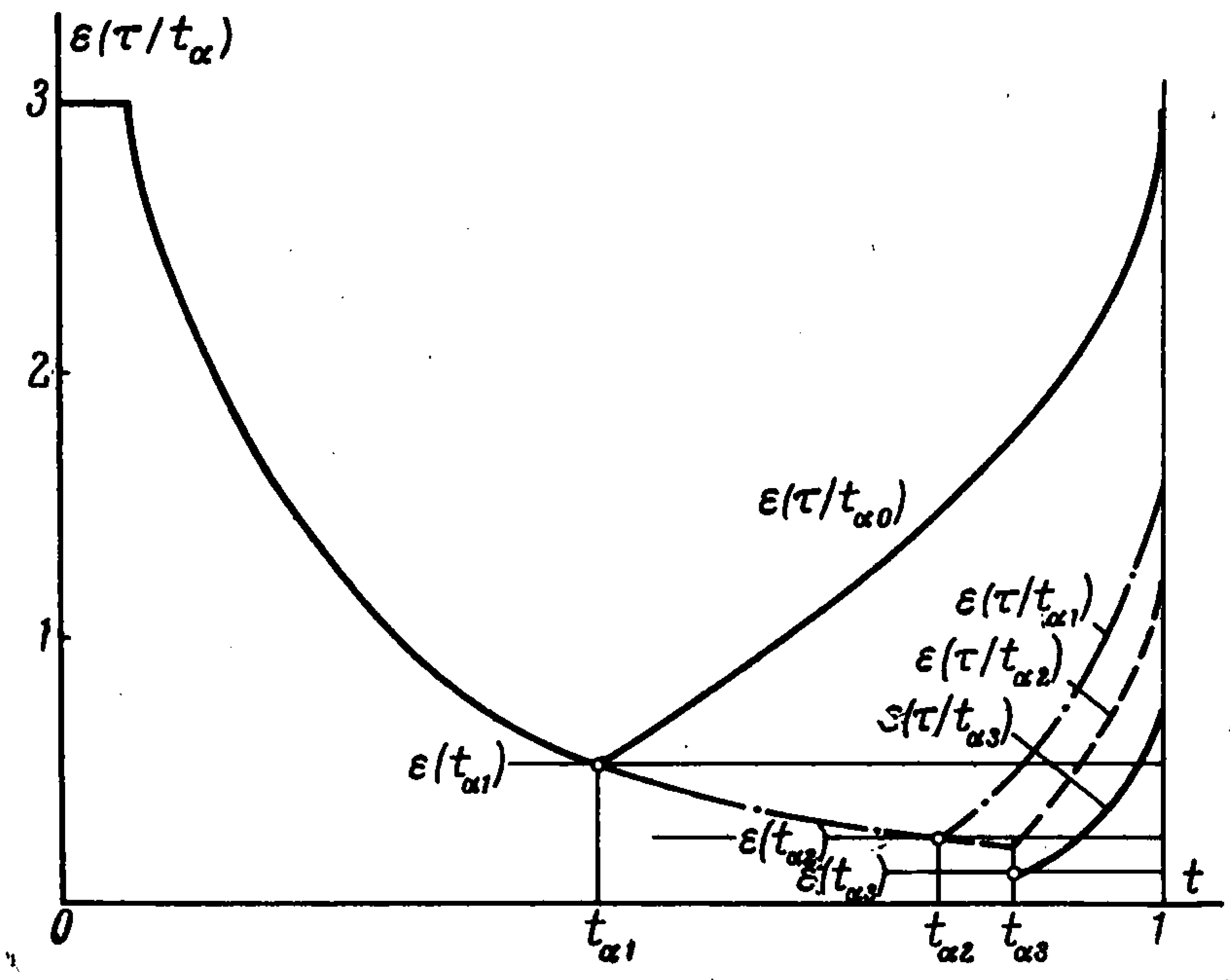
$$\varepsilon(\tau \mid t_{\alpha i}) = \begin{cases} w_{\tau i} & \text{при } |y_{\tau i}| \leqslant M(\tau) \\ w_{\tau i} + |y_{\tau i}| - M(\tau) & \text{при } |y_{\tau i}| > M(\tau) \end{cases}$$

где через $w_{\tau i}$, $y_{\tau i}$ и $M(\tau)$ обозначены величины

$$w_{\tau i} = \begin{cases} \Lambda & \text{при } \Lambda \leqslant w_{\alpha i}, \\ w_{\alpha i} & \text{при } \Lambda > w_{\alpha i}, \end{cases} \qquad y_{\tau i} = \begin{cases} (|N_i| - \Lambda)\operatorname{sign} N_i & \text{при } \Lambda \leqslant w_{\alpha i} \\ y_i^\circ & \text{при } \Lambda > w_{\alpha i} \end{cases}$$

$$N_i = \begin{cases} n_i & \text{при } |n_i| \geqslant |m_i| \\ m_i & \text{при } |n_i| < |m_i| \end{cases}, \qquad \Lambda = \frac{2\delta}{\tau}, \qquad M(\tau) = \mu(1-\tau)^{1/2}$$

Описанная процедура была реализована на ЭВМ при различных значениях постоянных δ, μ, m_0, n_0. В частности (фигура), при $\delta = 0.1, \mu = 3.5, n_0 = -m_0 = 3, x_2^* = 1$



оказалось, что моментами прогнозирования являются значения $t_{\alpha 1} = 0.462$, $t_{\alpha 2} = 0.867$, $t_{\alpha 3} = 0.902$. При $t = t_{\alpha 3}$ получили $\varepsilon(\tau \mid t_{\alpha 3}) > \varepsilon(t_{\alpha 3}) = 0.137$ для всех $\tau > t_{\alpha 3}$. Следовательно, момент $t = t_{\alpha 3}$ является оптимальным моментом перехода от наблюдения к управлению движением точки.

Поступила 9 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Рясин В. А. Оптимальная одноразовая коррекция в модельной задаче. Теория вероятностей и ее применения. 1966, т. 11, вып. 4.
2. Калмэн Р. Об общей теории систем управления. Тр. Первого конгресса ИФАК, т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1967.
5. Antosiewicz H. A. Linear control systems. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1963, vol. 12, No 4.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. О решении некоторых задач теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 7.