Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ОБ ИГРОВОЙ ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИМПУЛЬСЫ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается задача об игровой встрече однотипных линейных объектов при условии минимакса времени T до совпадения заданных координат фазовых векторов и при ограничениях на импульсы управляющих сил [1,2]. Обосновывается вычислительная схема, которая модифицирует для этого случая правило экстремального прицеливания [3,4].

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу [3] о минимаксе времени T до встречи преследующего ($y\,[t]$) и преследуемого ($z\,[t]$) движений, описываемых уравнениями

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bu, \qquad \frac{dz}{dt} = Az + Bv \tag{1.1}$$

где допускаются лишь управления u и v, реализации которых $u\,[t]$ и $v\,[t]$ удовлетворяют интегральным ограничениям

$$\int_\tau^\infty \|u\,[t]\|\,dt \leqslant \mu\,[\tau], \qquad \int_\tau^\infty \|v\,[t]\|\,dt \leqslant \nu\,[\tau] \tag{1.2}$$

которые трактуются как ограничения на импульсы управляющих сил. Здесь y, z — фазовые n-векторы объектов; u, v — r-векторы управлений, символ $\|q\|$ означает евклидову норму вектора q. Рассматриваемые векторы трактуются как векторы-столбцы, верхний индекс $*$ будет означать транспонирование, символ $\{Q\}_{[m]}$ будет означать матрицу, составленную из первых m строк матрицы Q.

Цель преследования заключается в совпадении векторов $\{y\,[t]\}_{[m]}$ и $\{z\,[t]\}_{[m]}$, где m — заданное число ($m \leqslant n$). Управление u должно формироваться по принципу обратной связи в каждый текущий момент $t = \tau$, исходя из реализовавшихся значений $y\,[\tau]$, $z\,[t]$, $\mu\,[\tau]$ и $\nu\,[\tau]$, т. е.

$$u\,[\tau] = u\,[y\,[\tau],\ z\,[\tau],\ \mu\,[\tau],\ \nu\,[\tau]] \tag{1.3}$$

Чтобы отличать программные управления u и v, задаваемые априори в виде функций времени t, от реализаций управлений u и v, конструируемых по принципу обратной связи в виде функций

$$u = u[y,\ z;\ \mu,\ \nu], \qquad v = v[y,\ z;\ \mu,\ \nu] \tag{1.4}$$

но осуществляющихся в замкнутой системе в каждом конкретном случае в виде функций от времени t, будем обозначать первые символами $u\,(t)$ и $v\,(t)$, а вторые — символами $u\,[t]$ и $v\,[t]$. Вообще квадратные скобки, заключающие аргументы t и τ, будут служить указанием на то, что речь идет о реализациях рассматриваемых процессов. В качестве допустимых управлений u и v будем рассматривать такие управления, реализации которых $u\,[t]$ и $v\,[t]$ можно представить в виде суммы ограниченной интегрируемой функции с линейной комбинацией δ-функций $\delta\,(t - t_*)$.

Итак, имеем задачу: найти управление u (1.4), которое обеспечивает

$$T^\circ = \min_u \sup_v T \qquad \text{при } \{y[\tau + T]\}_{[m]} = \{z[\tau + T]\}_{[m]} \tag{1.5}$$

каковы бы ни были начальные условия $y[\tau]$, $z[\tau]$, $\mu[\tau]$, $\nu[\tau]$ из заданной области их изменения. При этом управление u должно строиться в виде (1.4), а управление v может выбираться и среди функций (1.4) и среди программных управлений $v(t)$.

Примечание 1.1. Данная задача относится к теории дифференциальных игр (см. библиографию в обзоре [5]). При ограничениях (1.2) она обладает той особенностью, что оказывается целесообразным допускать реализации управлений в виде импульсных δ-функций. Это создает известные трудности при прямом решении задачи [2]. Для случая $m = n = 2$ эта задача с учетом указанных трудностей исследована весьма подробно в работе [1]. Ниже для общего случая $n \geqslant m \geqslant 1$ описывается модификация задачи (1.1), (1.2), (1.5) и дается схема, разрешающая данную модифицированную задачу. Эта модификация подобна задаче преследования в случае линейных объектов (1.1), описанной в [4], но при ограничениях

$$\| u[t] \| \leqslant \mu, \qquad \| v[t] \| \leqslant \nu \tag{1.6}$$

Предлагаемая схема позволяет обойти некоторые трудности и переносит на рассматриваемую задачу несколько видоизмененное правило экстремального прицеливания [4]. Отметим, что в данной статье изучается лишь проблема *минимакса* времени T до встречи; задача же о седловой точке игры, когда $\max \min T = \min \max T$ здесь не обсуждается, как это проводится в [1].

При интегральных ограничениях на u и v различение этих задач существенно, так как если в случае ограничений (1.6) исследование вопроса о максимине T часто не доставляет новых трудностей, то в случае интегральных ограничений на управления u и v проблема максимина времени T до встречи требует нередко нового специального исследования (см. например [6]).

§ 2. Модификация задачи. Основу рассматриваемой модификации задачи составляет переход к дискретной схеме с последующим предельным переходом. В одном частном случае задачи (1.1), (1.2) подобная регуляризирующая схема, естественная в отношении моделирования на ЭВЦМ, описана в статье [2]. Здесь описывается конструкция для общего случая задачи (1.1), (1.2).

Пусть процесс преследования начинается в момент $t = t_0$. Введем последовательность $\{\tau_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ моментов времени $t = \tau_k$ $(\tau_0 = t_0$, $\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta > 0)$ и примем, что выбор управления $u[t]$ на всем интервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$ определяется реализовавшимися значениями $y[\tau_k]$, $z[\tau_k]$, $\mu[\tau_k]$, $\nu[\tau_k]$. Кроме того, в число аргументов, определяющих функцию $u[t]$ при $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$, введем дополнительную переменную $\vartheta[\tau_k]$, смысл которой будет выяснен ниже. Пока отметим лишь, что при $\tau_k > \tau_0$ величина $\vartheta[\tau_k]$ определяется по значениям $y[\tau_k]$, $z[\tau_k]$, $\mu[\tau_k]$, $\nu[\tau_k]$ и $\vartheta[\tau_{k-1}]$, а при $\tau_k = \tau_0$, когда начинается процесс преследования, величина $\vartheta[\tau_0]$ определяется по значениям $y[\tau_0]$, $z[\tau_0]$, $\mu[\tau_0]$, $\nu[\tau_0]$.

Итак, пусть выбран некоторый алгоритм, определяющий управление u по правилу

$$u[t] = u_t[y[\tau_k], z[\tau_k], \mu[\tau_k], \nu[\tau_k], \vartheta[\tau_{k-1}]] \qquad (\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}) \tag{2.1}$$

Этот алгоритм, включающий описание способа вычисления функций (2.1) при каждом достаточно малом $\Delta > 0$, будем в дальнейшем для краткости называть законом управления или короче — управлением u.

Обозначим символом $t = \tau + T^{\varepsilon}_{u,v}$ — момент времени, когда при выбранных законах управления u и v впервые выполняется неравенство

$$\|\{y[t] - z[t]\}_{[m]}\| \leqslant \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \tag{2.2}$$

Здесь τ — какой-либо фиксированный временно, текущий момент $t = \tau \geqslant t_0$. (Поскольку допускаются, вообще говоря, импульсные управления $u[t]$ и $v[t]$ ($v(t)$), величины $y[t]$ и $z[t]$ в (2.2) строго надлежит понимать как величины $y[t+0]$ и $z[t+0]$. Это замечание следует иметь в виду и ниже в аналогичных случаях.) Результат преследования при выбранном законе управления (2.1) оценим величиной

$$\gamma_u = \sup_{\varepsilon}[\limsup_{\Delta\to 0}(\sup_v T^{\varepsilon}_{u,v})] \qquad (\varepsilon > 0) \tag{2.3}$$

Задача состоит в выборе управления $u_t[y, z, \mu, \nu, \vartheta]$ (2.1), которое обеспечивает минимум величины γ_u для каждого возможного состояния $y[\tau]$, $z[\tau]$, $\mu[\tau]$, $\nu[\tau]$, $\tau \geqslant \tau_0$ объектов (1.1).

Таким образом, требуется найти оптимальное управление

$$u[t] = u^{\circ}_t[y, z, \mu, \nu, \vartheta]$$

которое обеспечивает минимум

$$T^{\circ} = \gamma_{u^{\circ}} = \min_u \gamma_u \tag{2.4}$$

Иначе говоря оптимальный закон управления u° должен обладать следующим свойством: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое число $\Delta = \Delta_0$, что при $\Delta \leqslant \Delta_0$ управление $u = u_t^{\circ}[y, z, \mu, \nu, \vartheta]$, реализуемое в виде (2.1), удовлетворяет условию (1.2) и обеспечивает ε-сближение (2.2) движений $y[\tau]$ и $z[\tau]$ не позже, чем в момент

$$t \leqslant \tau + T^{\circ} + \varepsilon$$

каково бы ни было допустимое управление $v[t]$ или $v(t)$, удовлетворяющее ограничению (1.2).

При этом не должно существовать управления $u = u_*$, которое обеспечивало бы выполнение аналогичных условий при $T_* < T^{\circ}$.

Примечание 2.1. Введение аргумента $\vartheta[\tau_k]$, определяемого по значениям $\vartheta[\tau_{k-1}]$, вводит в закон управления некоторое последействие. Это нежелательное обстоятельство можно исключить, дискриминируя [2] движение $z[t]$, т. е. разрешив по условиям задачи при вычислении управления $u[t]$ в каждый текущий момент t использовать реализовавшиеся значения $v[t]$ или хотя бы значения $v[t-\eta]$ ($\eta > 0$ — малое запаздывание). Тогда в рассматриваемом случае задача существенно упрощается. Однако при этом проблема теряет характер позиционной игры, пожалуй в большей мере, чем в описанной здесь схеме, включающей величину $\vartheta[\tau_k]$. Кроме того, введение в закон управления u в качестве аргумента величины $\vartheta[\tau_k]$ по сравнению с введением аргумента $v[t]$ имеет иногда то преимущество, что величина $\vartheta[\tau_k]$ вычисляется по текущим позиционным величинам $y[t]$, $z[t]$, $\mu[t]$ и $\nu[t]$ устойчиво, в то время как косвенное определение управляющей силы $v[t]$ по изменению величин $z[t]$ и $\nu[t]$ связано подчас с существенными ошибками.

§ 3. Решение модифицированной задачи. Рассмотрим сначала две вспомогательные задачи об оптимальном программном управлении.

Задача 1. Рассмотрим управляемую систему

$$dx/dt = Ax + Bw \tag{3.1}$$

При заданных $\varepsilon \geqslant 0$, $\zeta \geqslant 0$ и начальных условиях τ, $x[\tau]$ требуется найти оптимальное управление $w^{\varepsilon}_{x[\tau],\zeta}(t)$ $(t \geqslant \tau)$, которое стеснено условием

$$\int_{\tau}^{\infty} \|w(t)\| dt \leqslant \zeta \tag{3.2}$$

и обеспечивает наискорейшее приведение системы (3.1) в состояние

$$\|\{x(\tau + T)\}_{[m]}\| \leqslant \varepsilon \tag{3.3}$$

Время предельного быстродействия для задачи 1 обозначим символом $T_\varepsilon[x[\tau], \zeta]$.

Задача 2. Пусть даны числа $T > 0$ и $\zeta \geqslant 0$. При заданных начальных условиях τ, $x[\tau]$ требуется найти оптимальное управление $w_{x[\tau],\zeta}(t)^\circ$ $(t \geqslant \tau)$, которое стеснено условием (3.2) и обеспечивает минимум

$$\varepsilon^\circ = \min \|\{x(\tau + T)\}_{[m]}\| \tag{3.4}$$

Опираясь на решения задач 1 и 2, построим управление u°. Примем, что при $\tau = \tau_0$ выполняется неравенство $\mu[\tau_0] \geqslant \nu[\tau_0]$ и для

$$x[\tau_0] = y[\tau_0] - z[\tau_0], \qquad \zeta = \zeta[\tau_0] = \mu[\tau_0] - \nu[\tau_0]$$

задача 1 при $\varepsilon = 0$ имеет конечное решение $T = T_0[\tau_0]$. Это условие предполагается выполненным во всем дальнейшем изложении. Решение рассматриваемой задачи 1 известно [7-9]. Оптимальное управление $w^\circ(t)$ состоит из последовательности импульсов и имеет вид

$$w^0_{x[\tau_0],\, \zeta[\tau_0]}(t) = \sum_{s=1}^{l} \lambda_s \delta(t - t_s) \tag{3.5}$$

Пусть в интервал $[\tau_0, \tau_1)$ попадают точки $t_1, \ldots, t_p$. Полагаем $\vartheta[\tau_0] = \tau_0 + T_0[\tau_0]$ и функцию $u[t]$ строим по формуле

$$u[t] = u_t^\circ[x[\tau_0], \zeta[\tau_0], \vartheta[\tau_0]] = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{p} \lambda_s \quad (\tau_0 \leqslant t < \tau_1) \tag{3.6}$$

(Если в интервал $[\tau_0, \tau_1)$ не попадает ни одной точки t_s, то полагаем $u[t] \equiv 0$ при $\tau_0 \leqslant t < \tau_1$. Аналогичное замечание следует иметь в виду всюду ниже в подобных ситуациях, хотя для краткости оно и не будет упоминаться.)

Рассмотрим теперь момент $t = \tau_k > \tau_0$ и будем считать известной величину $\vartheta[t_{k-1}]$. Если при $\varepsilon = 0$ и при условиях

$$\tau = \tau_k,\ x[\tau_k] = y[\tau_k] - z[\tau_k],\ \zeta[\tau_k] = \mu[\tau_k] - \nu[\tau_k]$$

задача 1 имеет решение

$$T_0[\tau_k] \leqslant \vartheta[\tau_{k-1}] - \tau_k,$$

то полагаем $\vartheta[\tau_k] = \tau_k + T_0[\tau_k]$, берем соответствующее решение

$$\overset{\circ}{w}_{x[\tau_k],\,\zeta[\tau_k]}(t) = \sum_{s=1}^{l^{(k)}} \lambda_s^{(k)} \delta(t - t_s^{(k)}) \tag{3.7}$$

и на основании его составляем снова функцию u° в виде

$$u^\circ[t] = u_t^\circ[x[\tau_k],\ \zeta[\tau_k],\ \vartheta[\tau_k]] = \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{p^{(k)}} \lambda_s^{(k)} \qquad (\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}) \tag{3.8}$$

Здесь $p^{(k)}$ обозначает количество точек $t_s^{(k)}$ из (3.7), попавших в интервал $[\tau_k, \tau_{k+1})$.

Если же при $\varepsilon = 0$ и при данных условиях $\tau = \tau_k$, $x[\tau_k]$, $\zeta[\tau_k]$ задача 1 не имеет решения $T_0[\tau_k] \leqslant \vartheta[\tau_{k-1}] - \tau_k$, то решаем задачу 2 при данных $\tau = \tau_k$, $x[\tau_k]$, $\zeta[\tau_k]$ и $T = \vartheta[\tau_{k-1}] - \tau_k$.

Пусть решение этой задачи есть $\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ[\tau_k]$. Найдя число $\varepsilon^\circ[\tau_k]$, решаем задачу 1 при $\varepsilon = \varepsilon^\circ[\tau_k]$. По выбору ε задача 1 имеет решение $T_{\varepsilon^\circ}[\tau_k] \leqslant \vartheta[\tau_{k-1}] - \tau_k$. Полагаем теперь $\vartheta[\tau_k] = \tau_k + T_{\varepsilon^\circ}[\tau_k]$. Решение $\overset{\varepsilon^\circ}{w}_{x[\tau_k],\,\zeta[\tau_k]}(t)$ задачи 1 опять имеет вид (3.7) и функция $u[t] = u_t^\circ$ конструируется из этого решения снова в виде (3.8). Описанное построение выполняется до тех пор, пока оказывается $\vartheta[\tau_{k-1}] > \tau_k$. Если в некоторый момент τ_k оказывается $\vartheta[\tau_{k-1}] \leqslant \tau_k$, то в дальнейшем все время полагаем $\vartheta[\tau_k] = \tau_k$, а все остальные построения, определяющие функцию u_t°, сохраняются без изменения.

Построенное таким образом управление u_t° разрешает задачу, поставленную в § 2.

Приведем краткое обоснование высказанного утверждения. Пусть сначала $\tau = \tau_0$. Выбирая при каждом $u[t]$ управление $v[t] = \mu[t]\, u[t] / \nu[t]$, можно проверить, что $T^\circ[\tau_0]$ не меньше величины $T_0[\tau_0]$, так как иначе получилось бы, что система (3.1) переводится некоторым управлением $w(t) = u[t] - v[t]$, удовлетворяющим условию (3.2), из данного состояния $x[\tau_0]$ в состояние $\{x(\tau_0 + T_*)\}_{[m]} = 0$ при $T_* < T_0$. Итак, для доказательства утверждения в случае $\tau = \tau_0$ достаточно проверить, что для каждого выбранного $\varepsilon > 0$ при достаточно малых значениях $\Delta > 0$ построенное управление u° к моменту $t \leqslant \tau_0 + T_0[\tau_0] + \varepsilon$ обеспечивает ε-сближение (2.2) движений $y[t]$ и $z[t]$, каково бы ни было допустимое управление v. Проверим это.

Прежде всего, заметим, что по построению функции u_t° величина $\zeta[\tau_k]$ все время остается неотрицательной. Следовательно, построение $\vartheta[\tau_k]$ и u_t° $(\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1})$ возможно все время вплоть до желаемого сближения $y[t]$ и $z[t]$ (либо — неограниченно долго, если это сближение не наступит). При этом по построению значения $\vartheta[\tau_k]$ не возрастают до тех пор, пока $\vartheta[\tau_k] > \tau_{k+1}$. Следовательно, либо требуемое ε-сближение происходит при $t \leqslant \vartheta[\tau_k] \leqslant \tau_0 + T_0[\tau_0]$, что и требуется, либо наступит момент $\tau_{k'}$, когда выполнится равенство $\tau_{k'} = \vartheta[\tau_{k'}]$, однако к этому моменту требуемого ε-сближения еще не произойдет.

Рассмотрим вторую возможность. Можно проверить, что при достаточно малых значениях Δ величины $\varepsilon^\circ[\tau_k]$ $(k \leqslant k')$, которые встречаются по ходу решения вспомогательных задач 2, не превзойдут наперед выбранного числа $\eta > 0$. В самом деле $\varepsilon^\circ[\tau_0] = 0$. С другой стороны, возможное возрастание величины $\varepsilon^\circ[\tau_k] \to \varepsilon^\circ[\tau_{k+1}]$ за один шаг Δ оценивается следующим образом.

Пусть на интервале $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ работало управление $v_*[t]$, причем был выработан импульс, который характеризуется величинами

$$\varkappa = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} v_*[t]\,dt, \qquad \varkappa_* = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \|v_*[t]\|\,dt$$

Если бы на этом же интервале работало управление

$$u_*[t] = \sum_{s=1}^{l(k)} \lambda_s^{(k)} \delta(t - t_s^{(k)}) + v_*[t]$$

то вследствие оптимальности управления, составляющего первое слагаемое, выполнилось бы неравенство $\varepsilon_*^\circ[\tau_{k+1}] \leqslant \varepsilon^\circ[\tau_k]$, так как в системе (3.1), где $x = y - z$ работало бы здесь оптимальное управление (3.7). Обозначим через $x_*[\tau_{k+1}]$ значение разности $y - z$, которая реализовалась бы при управлениях u_*, v_*. Однако на деле на интервале $[\tau_k, \tau_{k-1})$ работает управление u_t° вида (3.8). Управление $u_{**}[t] = u_t^\circ + \varkappa\delta^-(t - \tau_{k+1})$, работая в системе (1.1) с управлением $v_*[t]$, привело бы систему в состояние $x_{**}[\tau_{k+1}] = y - z$, которое отличается от $x_*[\tau_{k+1}]$ на величину порядка величины

$$(\varkappa_* + \sum_{s=1}^{p(k)} |\lambda_s^{(k)}|)\,\Delta$$

Здесь символ $\delta^-(t)$ означает «левую» δ-функцию, порождающую импульс в точке $t = -0$. Отсюда выводится, что величина $\varepsilon_{**}^\circ[\tau_{k+1}]$, которая получилась бы в этом случае, удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon_{**}^\circ[\tau_{k+1}] \leqslant \varepsilon_*^\circ[\tau_k] + \lambda\Delta\left(\varkappa_* + \sum_{s=1}^{p(k)} |\lambda_s^{(k)}|\right) \qquad (\lambda = \mathrm{const})$$

Но по смыслу величины $\varepsilon^\circ[\tau_{k+1}]$, которая реализуется на деле, ясно, что $\varepsilon^\circ[\tau_{k+1}] \leqslant \varepsilon_{**}^\circ[\tau_{k+1}]$. Таким образом, получаем оценку

$$\xi_k = \varepsilon^\circ[\tau_{k+1}] - \varepsilon^\circ[\tau_k] \leqslant \lambda\Delta\left(\varkappa_* + \sum_{s=1}^{p(k)} |\lambda_s^{(k)}|\right) \tag{3.9}$$

из которой в свою очередь следует оценка:

$$\varepsilon^\circ[\tau_k] \leqslant \sum_{s=0}^{k} \xi_k \leqslant \lambda\Delta(\mu[\tau_0] + \nu[\tau_0]) = \eta \tag{3.10}$$

Из (3.10) заключаем далее, что в случае, если к моменту $t = \tau_{k'}$, когда впервые $\vartheta[\tau_{k'}] = \tau_{k'}$, нужного сближения движений y и z еще не произошло, то во всяком случае область [2] достижимости $G_2[\tau_{k'}, \tau_{k'}, z[\tau_{k'}]]$ движения $z[t]$ лежит в η-окрестности области достижимости $G_1[\tau_{k'}, \tau_{k'}, y[\tau_{k'}]]$ движения $y[t]$.

Вследствие произвольной малости величины η (3.10) отсюда выводится, что при достаточно малых Δ нужное ε-сближение движений $y[t]$ и $z[t]$ осуществится не позже, чем через $2\nu[\tau_0] / \varepsilon$ шагов после момента $\tau = \tau_{k'}$. Этим завершается проверка оптимальности построенного управления u_t° для выбранных начальных данных $\tau = \tau_0$ и $x[\tau_0]$.

Доказательство оптимальности построенного управления u_t°, обеспечивающего минимаксное ε-сближение движений $y[t]$ и $z[t]$ (в смысле (2.3), (2.4)), если отсчитывать величину $\gamma_u^\circ = T_0[\tau_k]$ от произвольного момента $\tau = \tau_k > \tau_0$ и для соответствующих реализаций $y[\tau_k]$, $z[\tau_k]$, $\mu[\tau_k]$, $\nu[\tau_k]$, производится аналогичным образом, ибо на основании предыдущего можно утверждать, что при достаточно малых значениях $\Delta > 0$ величина $\varepsilon[\tau_k]$, определяющая весь дальнейший ход преследования, достаточно мала.

Таким путем доказывается следующее утверждение. Пусть выбрано произвольно малое число $\varepsilon > 0$. Тогда можно указать столь малое Δ_0, что для $\Delta \leqslant \Delta_0$ при реализации соответствующей дискретной схемы управления выполнится условие: если $\tau = \tau_k \geqslant \tau_0$ — некоторый текущий момент процесса преследования и $x[\tau_k] = y[\tau_k] - z[\tau_k]$, $\zeta[\tau_k] = \mu[\tau_k] - \nu[\tau_k]$ — реализовавшиеся в этот момент величины, то управление u_t°, работая при $t \geqslant \tau_k$ при любом допустимом управлении v, обеспечит ε-сближение движений $y[t]$ и $z[t]$ не позже, чем в момент $t \leqslant \vartheta[\tau_k] + \varepsilon \leqslant \tau_k + T_0[\tau_k] + \varepsilon$. В то же время нельзя указать никакого способа выбора управления u_*, которое, начиная работать с момента $t = \tau_k$ для любого $\varepsilon > 0$ и для любого допустимого управления v обеспечивало бы ε-сближение (2.1) движений y и z (1.1) в момент $t \leqslant \tau_k + T_* + \varepsilon$, где $T_* < T^\circ$. Отсюда следует оптимальность построенного управления u_t° в смысле условий (2.2), (2.3).

Примечание 3.1. Построение управления u°, описанное выше, опирается на решения задач 1 и 2, которые должны находиться при каждом $\tau = \tau_k$ по ходу процесса. Способы построения этих решений известны из общей теории управления линейными объектами. Приведем их кратко для полноты изложения, трактуя данные задачи [10], как проблемы моментов. Пусть $s(t)$ — решение уравнения

$$ds/dt = -A^*s \tag{3.11}$$

Условие осуществимости перевода системы (3.1) из заданного состояния $x[\tau]$ в состояние $\{x(\tau + T)]\}_{[m]} = \{z\}_{[m]}$ при ограничении (3.2), если трактовать задачу как проблему моментов [11]

$$\{c_T(z)\}_{[m]} = \int\limits_{\tau}^{\tau+T} \{X[T + \tau - t]\, Bw(t)\}_{[m]}\, dt \tag{3.12}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.1) (при $u \equiv 0$) и $c_T(z) = z - X(T)\, x[\tau]$, можно записать в виде

$$\xi_T(l, z) - \zeta\rho_T(l) \leqslant 0 \tag{3.13}$$

при всех l.

Здесь

$$\xi_T(l, z) = l^* c_T(z), \qquad \rho_T(l) = \max_t \|s^*(t)\, B\| \tag{3.14}$$

причем l — вектор краевых условий $l = s(\tau + T)$ решения $s(t) = X[T + \tau - t]\, l$ уравнения (3.11), причем $l_i = 0$ для $i = m + 1, \ldots, n$. Следовательно, решение T° задачи 1 при $\varepsilon = 0$ определяется, как наименьшее число $T \geqslant 0$, удовлетворяющее условию (3.13) при $z = 0$. Если предполагать координаты x_i $(i = 1, \ldots, m)$ управляемыми, т. е. $\rho(l) > 0$ при $l \neq 0$, то условие (3.13) можно записать в виде

$$\xi^\circ = \xi(l^\circ, 0) = \max_l \xi(l, 0) \leqslant \zeta \quad \text{при } \rho(l) = 1 \tag{3.15}$$

Само оптимальное управление $w^\circ(t)$ определяется из условия максимума

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+T} s^{\circ *}(t)\, Bw^\circ(t)\, dt = \max_w \quad \text{при} \quad \int\limits_{\tau}^{\tau+T} \|w(t)\|\, dt \leqslant \xi^\circ \tag{3.16}$$

причем $s^\circ[\tau + T] = l^\circ$ — решение задачи (3.15). При $\varepsilon > 0$ решение задач 1 и 2 получается из условий отделения области достижимости процесса (3.1) к моменту $t = \tau + T$ и сферы $\|z\| \leqslant \varepsilon$ (см., например, [12,13]). В то же время, как это отмечено в [10], решения задач 1 и 2 выводятся и непосредственно из соотношения (3.13).

Для этого достаточно, например, записать (3.13) в виде $\max_l [\xi_T(l,z) - \zeta\rho_T(l)] \leqslant 0$ при $\|l\| \leqslant 1$. Тогда условие попадания в ε-сферу $\|z\| \leqslant \varepsilon$ принимает вид $\min_z \max_l [\xi_T(l, z) - \zeta\rho_T(l)] \leqslant 0$ при $\|l\| \leqslant 1$ и $\|z\| \leqslant \varepsilon$. Отсюда вследствие перестановочности здесь операций min и max и с учетом выражений для ξ, c_T имеем условие

$$\max_l [l^* X(T) x[\tau] - \zeta\rho_T(l) - \varepsilon] \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \|l\| = 1$$

которое и определяет решение задач 1 и 2 (наименьшее $T \geqslant 0$ при данном ε и, наоборот,— наименьшее $\varepsilon \geqslant 0$ при данном T). Сами оптимальные управления $w(t)$ определяются снова из условий максимума, подобных (3.16).

Примечание 3.2. На примере

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \zeta[\tau_0] = 1, \qquad x[\tau_0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

можно убедиться, что без введения замораживаемой искусственно величины $\vartheta[\tau_k]$ аналогичное построение управления u_t, опирающееся только на решение вспомогательной задачи 1, т. е. при выборе $\vartheta[\tau_k] = \tau_k + T_0[\tau_k]$, приводит к трудностям, так как может теряться данный неустойчивый корень $\vartheta[\tau_k]$.

Примечание 3.3. Аналогичное построение схемы, регуляризирующей оптимальное управление u°, осуществляется (с понятными изменениями) и для задачи о минимаксе времени $T^{(\varepsilon^\circ)}$ до ε°-встречи $\|\{y[t] - z[t]\}_{[m]}\| \leqslant \varepsilon^\circ$ движений $y[t]$ и $z[t]$ (при заданном ε°), а также, естественно, и для более регулярной задачи о минимаксе величины $\|\{y(\vartheta) - z(\vartheta)\}_{[m]}\|$ в заданный фиксированный момент $t = \vartheta$ окончания процесса. Наконец схема переносится без существенных изменений на случай, когда в ограничениях (1.2) фигурирует не евклидова, а какая-либо другая норма векторов u и v.

Поступила 25 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожарицкий Г. К. Импульсные преследования в случае линейных однотипных объектов второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
2. Красовский Н. Н., Третьяков В. Е. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 5.
3. Красовский Н. Н. К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. Красовский Н. Н. К задаче об игровой встрече движений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, вып. 3.
5. Симакова Э. Н. Дифференциальные игры (обзор). Автоматика и телемеханика, 1966, № 11.
6. Субботин А. И. К задаче об игровой встрече движений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
7. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. М., «Наука», 1967.
8. Neustadt L. W. Optimization, a moment problem, and nonlinear programming. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1964, No 1.
9. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
10. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. I.
11. Данфорд Н., Шварц. Дж. Линейные оператора. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
12. Antosiewicz N. A. Linear control systems. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1963, vol. 12, No 4.
13. Габасов Р., Кириллова Ф. М. О решении некоторых задач теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 7.