Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦ, ВЗВЕШЕННЫХ В ПОТОКЕ ГАЗА

Ю. А. Буевич

(Москва)

Предложена статистическая теория локальных пульсационных движений фаз в однородных течениях двухкомпонентной монодисперсной системы газ — частицы в предположении, что изменения, вносимые пульсациями в среднее течение, относительно невелики. Показано, что процесс изменения пульсационных скоростей отдельных частиц нельзя считать марковским, так что движение совокупности частиц в газовом потоке в общем случае непредставимо в виде случайного процесса с независимыми приращениями. Получены выражения, характеризующие интенсивность случайных движений и флуктуационные потоки фаз, а также коэффициенты переноса в системе взвешенных частиц.

§ 1. Модель случайных движений. Рассматриваем ниже только стационарные однородные течения дисперсной среды, когда макроскопические переменные (как-то: объемная концентрация частиц ρ, скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ жидкой и диспергированной фаз в гидродинамическом приближении и т. п.) не зависят от координат и времени. В нулевом приближении диспергированную фазу можно рассматривать как упорядоченную решетку частиц, обтекаемую газовым потоком, считая, что частицы не взаимодействуют и их взаимное расположение не изменяется. В этом приближении справедливы уравнения работ [1-3], в которых диспергированная фаза рассматривается как идеальная сплошная среда. Полагая для простоты регулярную силу вязкого взаимодействия между фазами линейной по скорости межфазового скольжения и пренебрегая весом газа, в системе координат, где $\mathbf{w}_0 \equiv 0$ и $\mathbf{v}_0 = (u, 0, 0)$, получим уравнения (1.1)

$$-(1-\rho)\frac{dp}{dx} - \beta\rho K u = 0, \qquad -\rho\frac{dp}{dx} + \beta\rho K u - d_2 g\rho = 0, \qquad \beta = \frac{9}{2}\frac{\mu_0}{a^2}$$

Здесь p, μ_0 — давление и вязкость газа, d_2 — плотность материала частиц, a — их радиус, g — ускорение свободного падения, $K(\rho)$ — функция, учитывающая возрастание эффективной силы вязкого сопротивления упорядоченной недеформируемой решетки частиц при стесненном режиме обтекания ($K(0) = 1$, $dK / d\rho > 0$).

Решение уравнений (1.1) имеет вид

$$p = \mathrm{const} - d_2 g\rho x, \qquad u = (1-\rho)\, d_2 g\, (\beta K)^{-1}, \qquad \mathbf{u} = -u\,(\mathbf{g} / g) \tag{1.2}$$

В действительности каждая взвешенная частица совершает в потоке хаотические пульсации, что приводит к колебаниям мгновеннных узлов решетки и локальным нарушениям ее упорядоченности. Такие пульсации частицы обусловливают появление локальных возмущений в движении газового потока вблизи этой частицы, существенно влияющих на условия обтекания ближайших соседних частиц. Согласно модели работы [4], эти индивидуальные мелкомасштабные движения приводят к возникновению флуктуаций пористости дисперсной среды и нарушению баланса сил, выражаемого уравнениями (1.1). В результате в системе появляются макроскопические флуктуации скорости и давления газового потока, имеющие масштаб, значительно превосходящий среднее расстояние между частицами; эти флуктуации обусловливают появление крупномасштабных существенно анизотропных пульсаций больших групп («пакетов») частиц. Физические аспекты модели и ее соответствие эксперименту подробно обсуждаются в [4]; новейшие опытные подтверждения ее содержатся, например, в [5], где исследовалось псевдоожижение воздухом весьма крупных полых шариков и удалось четко различить движение пакетов и пульсации отдельных частиц внутри них, приводящие к их расплыванию.

Мгновенную скорость некоторой частицы можно представить в виде суммы $\delta\mathbf{w} + \mathbf{W}$, где $\delta\mathbf{w}$ — гидродинамическая скорость диспергированной фазы, полученная усреднением по весьма большому числу частиц (скорость пакета), а $\mathbf{W}$ — скорость индивидуального движения частицы внутри пакета. Для упрощения считаем ниже скорости $\delta\mathbf{w}$, $\mathbf{W}$, а также флуктуацию средней скорости газа $\delta\mathbf{v}$ малыми по сравнению с $\mathbf{u}$, так что можно рассматривать линеаризованную задачу, используя соотношения (1.2), характеризующие поведение упорядоченной решетки невзаимодействующих частиц, как нулевое приближение.

На каждую частицу в потоке действует сила, которую можно представить в виде суммы регулярной и нерегулярной составляющих. Регулярная сила в расчете на частицы в единице объема записана во втором уравнении (1.1), нерегулярная сила также распадается на две составляющие. Первая из них связана с изменением регулярной силы при макроскопических флуктуациях параметров. Она имеет вид

$$-v^\circ \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} + \alpha_0 K(\delta v_i - \delta w_i) + \alpha_0 \frac{dK}{d\rho} u \delta_{1i} \delta\rho, \qquad \alpha_0 = \beta v^\circ \tag{1.3}$$

Здесь v° — объем частицы. Вторая составляющая вызвана, во-первых, вязким сопротивлением относительному мелкомасштабному движению, а во-вторых, случайными взаимодействиями частицы с локальными возмущениями несущего потока, имеющими масштаб порядка среднего расстояния между частицами, и с соседними частицами путем непосредственных столкновений. Суммируя результаты, получим уравнение Ланжевена для частицы в виде (1.4)

$$m \frac{d}{dt}(\delta w_i + W_i) = -v^\circ \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} + \alpha_0 K(\delta v_i - \delta w_i) + \alpha_0 \frac{dK}{d\rho} u \delta_{1i} \delta\rho - \alpha W_i + F_i$$

Здесь $m = d_2 v^\circ$ — масса частицы, $\mathbf{F}$ — случайная сила, а коэффициент α отличается от α_0 в (1.3) только тем, что в нем вместо физической вязкости газа μ_0 содержится эффективная вязкость μ, подсчитанная в работе [6]. При $\delta v_i = \delta w_i = \delta p = \delta\rho = 0$ уравнение (1.4) превращается в уравнение Ланжевена для броуновской частицы [7] в среде с вязкостью μ.

Производя в (1.4) суммирование по большому числу частиц в единице объема (n можно всегда считать большим за счет выбора этой единицы), получим уравнение движения диспергированной фазы в гидродинамическом приближении

$$d_2\rho \frac{\partial \delta w_i}{\partial t} = -\rho \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} + \beta\rho K(\delta v_i - \delta w_i) + \beta\rho \frac{dK}{d\rho} u\delta_{1i}\delta\rho \qquad (1.5)$$

Здесь было учтено, что при больших n имеем $\Sigma W_i \sim n^{1/2}\langle|W_i|\rangle$ и $\Sigma F_i \sim n^{1/2}\langle|F_i|\rangle$, а лагранжева производная, фигурирующая в (1.4), заменена на эйлерову, что всегда может быть сделано ввиду предполагаемой малости $\delta\mathbf{w} + \mathbf{W}$. Уравнение (1.5) совпадает с линеаризованным уравнением, которое можно получить непосредственно из уравнения движения диспергированной фазы в [1-3] в предположении, что перенос импульса в этой фазе осуществляется только за счет ее движения.

Для скорости $\delta\mathbf{v}$ используем линеаризованное уравнение, следующее из уравнения движения дисперсионной среды [1-3]. Пренебрегая инерцией и вязкой диссипацией энергии в газе, имеем с учетом (1.2)

$$0 = -(1-\rho)\frac{\partial \delta p}{\partial x_i} - \beta\rho K(\delta v_i - \delta w_i) - \beta\rho \frac{dK}{d\rho} u\delta_{1i}\delta\rho - d_2 g\delta_{1i}\delta\rho \qquad (1.6)$$

Уравнение сохранения массы газа в предположении о его несжимаемости примет после линеаризации форму

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\rho = (1-\rho)\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} \qquad (1.7)$$

Мелкомасштабные движения частиц способствуют расплыванию флуктуаций пористости дисперсной среды. Этот процесс описываем ниже при помощи уравнения диффузии

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x_i \partial x_i} \qquad (1.8)$$

Здесь D — коэффициент самодиффузии частиц, обусловленной изотропными мелкомасштабными движениями.

Заметим, что флуктуации эффективного давления в (1.5), (1.6) связаны с импульсом, переносимым не только молекулами газа в их тепловом движении, но и локальными возмущениями, которые не описываются, конечно, усредненными уравнениями (1.6). Поэтому в общем случае δp — тензорная величина. Ввиду симметрии в рассматриваемой задаче отличны от нуля лишь диагональные элементы этого тензора, причем $\delta p_1 \neq \delta p_2 = \delta p_3$.

§ 2. Стохастические уравнения и их решение. Используем в дальнейшем аппарат корреляционной теории стационарных случайных процессов. Представим случайные величины в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса

$$\{\delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{w}, \delta p, \delta\rho\} = \int e^{i\omega t + i\mathbf{kr}}\{d\mathbf{Z}_v, d\mathbf{Z}_w, dZ_p, dZ_\rho\} \qquad (2.1)$$

Интегрирование здесь производится по всему волновому пространству и по всем частотам, случайные процессы dZ в (2.1) предполагаются удовлетворяющими всем необходимым требованиям, представляя собой дифференциалы случайных функций точки $(\omega, \mathbf{k})$ с некоррелированными приращениями [8]. Спектральные плотности различных корреляций определяются как вторые моменты соответствующих величин dZ; например, спектральная плотность пространственно-временной корреляции величины $\delta\rho$ определяется посредством равенства

$$f_{\rho\rho}(\omega, \mathbf{k}) = \lim_{d\mathbf{k},\, d\omega \to 0} \frac{\langle dZ_\rho(\omega, \mathbf{k})\, dZ_\rho^*(\omega, \mathbf{k})\rangle}{dk_1 dk_2 dk_3 d\omega}$$

Выделим далее во всех случайных процессах изотропные части

$$\delta v_i = v'\delta_{i1} + v_i'', \qquad \delta w_i = w'\delta_{i1} + w_i'', \qquad \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} = \frac{\partial p'}{\partial x}\delta_{1i} + \frac{\partial p''}{\partial x_i} \qquad (2.2)$$

$$dZ_{vi} = dZ_v'\delta_{1i} + dZ_{vi}'', \quad dZ_{wi} = dZ_w'\delta_{1i} + dZ_{wi}'', \quad k_i dZ_p = k_1 dZ_p' + k_i dZ_p''$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в уравнения (1.5) — (1.7) и разделяя в них изотропную и анизотропную части, получим две системы уравнений

$$-i\rho k_1 dZ_p' + \beta\rho K(dZ_v' - dZ_w') + \beta\rho \frac{dK}{d\rho} u dZ_\rho = id_2\rho\omega dZ_w'$$

$$-i(1-\rho) k_1 dZ_p' - \beta\rho K(dZ_v' - dZ_w') - \beta\rho \frac{dK}{d\rho} u dZ_\rho - d_2 g dZ_\rho = 0$$

$$(1-\rho) k_1 dZ_v' = u k_1 dZ_\rho \qquad (2.3)$$

$$-i\rho k_i dZ_p'' + \beta\rho K(dZ_{vi}'' - dZ_{wi}'') = id_2\rho\omega dZ_{vi}''$$

$$-i(1-\rho) k_i dZ_p'' - \beta\rho K(dZ_{vi}'' - dZ_{wi}'') = 0, \qquad (1-\rho) k_i dZ_{vi}'' = \omega dZ_\rho \quad (2.4)$$

Решения систем (2.3) и (2.4) имеют вид

$$dZ_w' = \frac{\beta K u}{\beta K + id_2(1-\rho)\omega}\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right) dZ_\rho, \qquad dZ_v' = \frac{u}{1-\rho} dZ_\rho \quad (2.5)$$

$$dZ_p' = d_2 k_1^{-1}(-\rho\omega dZ_w' + igdZ_\rho)$$

$$dZ_w'' = \frac{\beta K}{\beta K + id_2(1-\rho)\omega} \frac{\omega \mathbf{k}}{(1-\rho)k^2} dZ_\rho, \qquad dZ''_v = \frac{\omega \mathbf{k}}{(1-\rho)k^2} dZ_\rho$$

$$dZ_p'' = -d_2\rho\omega k^{-2}(\mathbf{k} dZ_w'') \qquad (2.6)$$

Эти уравнения позволяют найти все искомые спектральные плотности, если известна спектральная плотность процесса $\delta\rho$. Последняя, разумеется, должна определяться из независимых соображений.

Отметим, что рассматриваемая задача представляет естественное обобщение задачи о фильтрации жидкости в среде со случайной пористостью, исследованной в [9]. По аналогии с фильтрацией крупномасштабные движения в дисперсной системе можно назвать псевдотурбулентностью; существенное отличие псевдотурбулентности в дисперсной системе от фильтрационной состоит в том, что в данном случае и диспергированная фаза, представляющая аналог пористой среды, вовлечена в псевдотурбулентные движения.

§ 3. Спектральная плотность случайного процесса $\delta\rho$. Величину δn, представляющую отклонение истинного числа частиц в единице объема от среднего значения, можно для точечных частиц выразить в виде суммы по δ-функциям, отмечающим положения отдельных частиц в пространстве [10]. При этом ввиду равноправия частиц и статистической однородности пространства значения δn в разных объемах в любой фиксированный момент времени можно считать независимыми, т. е. спектральная плотность процесса δn, определенная по одновременным двухточечным корреляциям, не зависит от $\mathbf{k}$ [8]. То же справедливо, очевидно, и для процесса $\delta\rho$. Поэтому, используя уравнение диффузии (1.8), для спектральной плотности $f_{\rho\rho}$ $(\omega, \mathbf{k})$ получим соотношение

$$f_{\rho\rho}(\omega, \mathbf{k}) = C'Dk^2 (\omega^2 + D^2 k^4)^{-1}, \qquad C' = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

В действительности частицы занимают конечный объем, и их положения определяются не δ-функциями, а с точностью до функции

$$\Theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) = (v^\circ / \rho)^{-1} Y(b - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)|), \qquad b = a\rho^{-1/3}$$

где Y — функция Хевисайда, а введение функции $\Theta(\mathbf{r})$ соответствует процедуре сглаживания коротковолновых деталей спектра, предложенной Массиньоном [10], причем соответствующая спектральная плотность процесса $\delta\rho$ отличается от плотности (3.1), характеризующей систему точечных частиц с детально определенными координатами, множителем

$$F\Theta(\mathbf{k}) = \frac{\rho}{v^\circ} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} Y(b - |\mathbf{r}|)\, d\mathbf{r} = 3\,\frac{\sin kb - kb\cos kb}{k^3 b^3} \tag{3.2}$$

Поэтому вместо (3.1) получим следующее выражение:

$$f_{\rho\rho}(\omega, k) = \frac{CDk^2}{\omega^2 + D^2 k^4}\,\frac{\sin kb - kb\cos kb}{(kb)^3}, \qquad C = 3C' \tag{3.3}$$

Заметим, что в [4] вместо введения сглаживающей функции $\Theta(\mathbf{r})$ было использовано условие равенства полного числа степеней свободы системы частиц в волновом пространстве числу истинных степеней свободы всех частиц. Тогда интегрирование по волновому пространству фактически заменяется суммированием по зоне Бриллюэна для данной системы, т. е. вместо умножения функции (3.1) на величину (3.2) производится обрезание в коротковолновой области спектра. Этот метод, основанный на идеях Дебая, имеет тот недостаток, что не позволяет произвести однозначный выбор требуемого числа гармоник в волновом пространстве и, таким образом, содержит элемент произвола в определении статистического веса различных гармоник. Ясно, что истинный вес определяется функцией (3.3).

Для вычисления постоянной C в (3.3) найдем независимым путем флуктуацию $\langle \delta n^2 \rangle$. Введем числа «ячеек» N_V и N в объемах V и $A = 1$, причем $V \gg 1$, представляющие числа частиц, которые могут быть размещены в этих объемах в состоянии плотной упаковки. Ясно, что

$$N_V = V(\rho_* / v^\circ), \qquad N = \rho_* / v^\circ$$

где ρ_* — объемная концентрация, а v° / ρ_* — удельный объем частицы в плотноупакованной системе. Пусть число частиц в объеме V, т. е. число занятых ячеек, равно $n_V \leqslant N_V$; требуется найти вероятность присутствия n частиц в объеме A.

Предполагая все ячейки решетки, моделирующей объем V, равноправными и рассматривая процесс заполнения пустой решетки с N_V ячейками n_V частицами, для искомой вероятности получим соотношение

$$P_V(n) = \binom{N_V}{n_V}^{-1} \binom{N_V - N}{n_V - n} \binom{N}{n}$$

Легко видеть, что это распределение удовлетворяет условию полноты. Интерес представляет предельный вид функции $P_V(n)$ при V, $n_V \to \infty$, но $\nu = n_V / N_V = \text{const}$. Используя формулу Стирлинга, получим

$$P(n) = \lim_{V\to\infty} P_V(n) = \binom{N}{n} \nu^n (1-\nu)^{N-n}, \qquad \nu = \lim_{V\to\infty}\left(\frac{n_V}{N_V}\right) = \frac{\rho}{\rho_*} \tag{3.4}$$

Это распределение подобно по форме аналогичному распределению для разбавленных коллоидных систем [7], но входящие в него величины имеют совершенно иной смысл. В частности, при конечных ν для рассматриваемых систем не имеет смысла распределение Пуассона, получающееся из (3.4) в пределе $\nu \to 0$ и широко используемое в физике разбавленных систем. Из (3.4) следуют выражения для моментов (3.5)

$$\langle n\rangle = \nu N, \quad \langle n^2\rangle = \nu N(\nu N + 1 - \nu), \quad \langle \delta n^2\rangle = \nu N \quad (1-\nu) \approx n(1-\nu)$$

Заметим, что, используя некоторое видоизменение известного метода Смолуховского [7], нетрудно получить также явное выражение для временной корреляции величины δn. Ясно, что выражения (3.5), получаемые из дискретной модели, дают адэкватные результаты при описании флуктуаций частиц в непрерывных объемах в пределе $v^\circ(\rho A)^{-1} \to 0$.

С другой стороны, из (3.3) следует

$$\langle \delta n^2\rangle = \frac{1}{(v^\circ)^2}\left\langle \left|\int_A \delta\rho d\mathbf{r}\right|^2\right\rangle = \frac{8C}{(v^\circ)^2}\int d\omega \int d\mathbf{k} \prod_{j=1}^{3}\left(\frac{1-\cos k_j l_j}{k_j^2}\right) \times$$
$$\times f_{\rho\rho}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{8\pi^4 C l_1 l_2 l_3}{3(v^\circ)^2}, \qquad l_1 l_2 l_3 = A = 1 \tag{3.6}$$

В соответствии со сказанным выше, при интегрировании было принято $a \to 0$, так что выражение (3.2) равно единице. Сравнивая (3.5) и (3.6), получим формулу для C:

$$C = \frac{3n(1-\nu)(v^\circ)^2}{8\pi^4} = \frac{3v^\circ}{8\pi^4}\frac{\rho(\rho_* - \rho)}{\rho_*} \tag{3.7}$$

Из (3.3), а также выражений (2.5), (2.6) видно, что временной масштаб макроскопических корреляций определяется коэффициентом самодиффузии D, величиной β и другими параметрами фаз, причем масштаб изменения силы (1.3), входящей в уравнение Ланжевена (1.4), имеет тот же порядок величины, что и время существенного изменения скорости $\delta\mathbf{w}$. Поэтому ясно, что движение пакетов, а также полное движение отдельных частиц нельзя рассматривать как случайный процесс с независимыми приращениями, каковы бы ни были статистические свойства случайной силы $\mathbf{F}$ в (1.4). В частности, при статистическом анализе системы взвешенных частиц несправедливы уравнения типа Фоккера — Планка или Смолуховского, широко использовавшиеся в этом анализе ранее [11,12].

§ 4. Интенсивность случайных движений частиц и флуктуационные потоки фаз. Выражения (3.3), (3.7) позволяют вычислить полные пространственно-временные корреляции всех процессов (2.5), (2.6). Здесь рассмотрим только некоторые одновременные одноточечные корреляции. Имеем, прежде всего, из (2.5) и (2.6) равенства

$$\langle \delta w_i \delta w_j \rangle = \int d\omega \int d\mathbf{k} f_{w_i w_j}(\omega, \mathbf{k}) = 0 \qquad (i \neq j)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для случайного процесса $\delta\mathbf{v}$; оно следует также из симметрии движения относительно плоскостей, содержащих направление несущего потока.

Вычисляя спектральные плотности из (2.5), (2.6) и интегрируя по ω и $\mathbf{k}$, для среднеквадратичных скоростей хаотического пульсационного движения частиц в составе пакетов получим соотношения

$$\langle \delta w_1^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle + \langle w_1''^2 \rangle, \qquad \langle \delta w_2^2 \rangle = \langle \delta w_3^2 \rangle = \langle w_1''^2 \rangle$$

$$\langle w'^2 \rangle = \frac{\rho^2(\rho_* - \rho)}{\rho_*}\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right)^2 \left[1 - \left(1 + \frac{a}{h}\right)\exp\left(-\frac{a}{h}\right)\right] u^2 \tag{4.1}$$

$$\langle w_1''^2 \rangle = \frac{1}{3}\,\frac{\rho^2(\rho_* - \rho)}{\rho_*}\,\frac{K}{(1-\rho)^3}\left[1 - \left(1 + \frac{a}{h}\right)\exp\left(-\frac{a}{h}\right)\right]\frac{\beta D}{d_2}$$

$$h = \rho^{1/3}\left[\frac{d_2(1-\rho)D}{\beta K}\right]^{1/2} = \rho^{1/3}(1-\rho)^{1/2}\left(\frac{2}{9}\,\frac{D}{K\nu_0}\right)^{1/2} a \qquad \left(\nu_0 = \frac{\mu_0}{d_2}\right)$$

Отсюда видно, что средняя скорость движения пакетов в направлении несущего потока может во много раз превосходить среднюю скорость в перпендикулярном направлении. Совершенно аналогично, из (2.5) и (2.6) нетрудно получить выражения для среднеквадратичных скоростей дисперсионной среды. Заметим, однако, что интеграл от $f_{v_i v_i}(\omega, \mathbf{k})$ по ω оказывается расходящимся. Эта трудность вызвана использованием диффузионного уравнения (1.8) и легко ликвидируется, если использовать вместо (1.8) более точное уравнение гиперболического типа, учитывающее конечность скорости перемещения частиц в процессе диффузии.

Истинные объемные потоки фаз представляются в виде сумм потоков, отвечающих модели упорядоченной решетки, и дополнительных флуктуационных потоков, связанных с крупномасштабными пульсациями фаз. В системе координат, где $\mathbf{w}_0 \equiv 0$, имеем, следовательно,

$$Q_v = (1-\rho)u + Q_v', \qquad Q_v' = -\langle \delta\rho\,\delta v_1 \rangle, \qquad Q_w = Q_w' = \langle \delta\rho\,\delta w_1 \rangle$$

Вычисления дают для флуктуационных потоков выражения

$$Q_v' = -\frac{\rho^2(\rho_* - \rho)}{\rho_*}\,\frac{u}{1-\rho} < 0 \tag{4.2}$$

$$Q_w' = \frac{\rho^2(\rho_* - \rho)}{\rho_*}\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d\ln K}{d\rho}\right)\left[1 - \left(1 + \frac{a}{h}\right)\exp\left(-\frac{a}{h}\right)\right] u > 0$$

Заметим, что ввиду симметрии задачи флуктуационные потоки фаз в направлениях, перпендикулярных направлению несущего потока, тождественно равны нулю.

Среднеобъемные скорости фаз не совпадают, таким образом, со скоростями, определенными в (1.2), и в использованной системе они равны

$$v_1 = u + (1 - \rho)^{-1} Q_v', \qquad w_1 = \rho^{-1} Q_w'$$

Эффективная среднеобъемная скорость межфазового скольжения равна при фиксированной концентрации

$$u_* = v_1 - w_1 = u + (1 - \rho)^{-1} Q_v' - \rho^{-1} Q_w' < u$$

что может восприниматься как увеличение вязкого сопротивления истинной решетки пульсирующих частиц по сравнению с сопротивлением упорядоченной решетки. Заметим, что аналогичный эффект был характерен и для фильтрации жидкости в среде со случайной пористостью [9].

По известным пространственно-временным корреляциям нетрудно вычислить масштабы различных пульсаций в разных направлениях и временные масштабы, а далее по известным рецептам [13] найти коэффициенты переноса, связанные с крупномасштабным движением. В рассматриваемом приближении будем, например, иметь для совпадающих между собой тензоров псевдотурбулентной вязкости и диффузии диспергированной фазы [13]

$$\zeta_{ij} = 0, \quad (i \neq j) \qquad \zeta_{ii} = \zeta_i(\tau) = 2\langle \delta w_i^2 \rangle \int_0^\tau (\tau - s) R_{ii}(s)\, ds$$

где $R_{ii}(\tau)$ — коэффициент лагранжевой временной корреляции процесса δw_i, совпадающий при малых $\delta \mathbf{w}$ с коэффициентом эйлеровой временной корреляции.

§ 5. Мелкомасштабные движения частиц. Из (1.4) и (1.5) получим уравнение Ланжевена для мелкомасштабных движений пробной частицы

$$m \frac{d\mathbf{W}}{dt} = -\alpha \mathbf{W} + \mathbf{F} \tag{5.1}$$

подобное по форме уравнению Ланжевена для броуновской частицы.

Фигурирующую в (5.1) случайную силу $\mathbf{F}$ можно разбить условно на два слагаемых $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, одно из которых соответствует взаимодействию частицы с локальными возмущениями несущего потока, представляющими, по сути дела, перманентные взаимодействия ее с соседними частицами посредством жидкой фазы, а второе отвечает взаимодействию частиц путем непосредственных столкновений. Можно ожидать, что взаимодействия первого типа приводят к сравнительно медленному и плавному изменению скорости $\mathbf{W}$ частицы, в то время как столкновения характеризуются скачкообразными изменениями скорости частиц. Непосредственные столкновения играют, по-видимому, определяющую роль в предельных случаях концентрированных систем весьма крупных и тяжелых частиц, взвешенных в газе малой вязкости. Такой режим был рассмотрен в [4].

В большинстве реальных систем столкновения играют второстепенную роль и скорость **W** изменяется преимущественно под влиянием сил взаимодействия первого типа. Этот вывод был сделан, например, из экспериментов работы [5], в которых наблюдалась тесная аналогия между мелкомасштабными пульсациями частиц внутри пакетов и броуновским движением, выражающаяся в пропорциональности смещения за весьма малый промежуток времени корню из величины этого промежутка. Низкую частоту столкновений в [5] можно, по-видимому, объяснить гашением относительной скорости частиц в процессе их сближения и выдавливания газовой пленки, так что если скачкообразные изменения скорости и происходят, то они сравнительно незначительны.

В соответствии с теорией случайных процессов типа броуновского движения [7], можно ожидать, что существует такой интервал времени Δt, что скорость **W** за это время практически не изменяется, между тем как сила $\mathbf{F}_1$ испытывает большое число флуктуаций. Тогда при $\mathbf{F}_2 \ll \mathbf{F}_1$ для функции распределения частиц по скоростям мелкомасштабных пульсаций справедливо уравнение Фоккера — Планка. Если $\mathbf{F}_2 \gg \mathbf{F}_1$, но скорость частицы существенно не изменяется за время ее свободного пробега (см. по этому поводу, обсуждение в [4]), то это уравнение естественным образом дополняется столкновительным членом. В предположении о пространственной однородности получим уравнение [7]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\alpha}{m} \frac{\partial (fW_i)}{\partial W_i} + \frac{B}{m} \frac{\partial^2 f}{\partial W_i \partial W_i} + C(ff_1) \qquad \left(B = \frac{\alpha\theta}{m}\right) \tag{5.2}$$

Здесь $C(ff_1)$ — интеграл столкновений, имеющий обычный вид, θ — эффективная температура мелкомасштабного движения ($\theta = {}^1/_3\, m \langle W^2 \rangle$), B — коэффициент диффузии в пространстве скоростей отдельной частицы. Отметим, что уравнение (5.2) относится только к мелкомасштабному, а не к полному движению частицы в составе пакета в отличие от ситуации в работах [11,12].

При малых **W**, что предположено, и не слишком больших ρ столкновительным членом в (5.2) можно, по-видимому, пренебречь. Тогда имеем полную аналогию с броуновским движением в соответствии с опытами [5]. В этом случае имеется соотношение между величинами D и θ:

$$D = \theta / \alpha \tag{5.3}$$

и стационарная функция распределения f имеет максвелловский вид, как и в другом предельном случае, рассмотренном в [4].

Полная среднеквадратичная скорость частицы на основании (4.1) и (5.3) представится с точностью до коэффициента диффузии D в форме

$$\langle \delta w^2 \rangle = \frac{\rho^2 (\rho_* - \rho)}{\rho_*} \left[\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d \ln K}{d\rho} \right)^2 u^2 + \frac{K}{(1-\rho)^3} \frac{\beta D}{d_2} \right] \times$$
$$\times \left[1 - \left(1 + \frac{a}{h} \right) \exp\left(-\frac{a}{h} \right) \right] + \frac{3\alpha D}{m} \tag{5.4}$$

Величину D, а следовательно, и θ можно в принципе определить, приравнивая поток энергии E_1 от крупномасштабного движения к мелкомасштабному удельной диссипации энергии E_2 последнего в тепло [4]. Подробное рассмотрение энергетических соотношений в течении выходит за рамки этой работы. Но отметим, что при пренебрежении вязкой диссипацией энергии локальных возмущений несущего потока поток энергии E_1 можно, очевидно, считать равным диссипации энергии крупномасштабного движения в результате необратимого переноса импульса мелкомасштабным изотропным движением. Для последней справедливо обычное в гидродинамике вязкой жидкости соотношение с эффективной динамической вязкостью $\rho d_2 D$. После вычислений с использованием (2.5), (2.6), (3.3) и (3.7) получим

$$E_1 = \rho d_2 D \int d\omega \int dk k^2 f_{wiwi} = \frac{\rho^3(\rho_* - \rho)}{\rho_*} \beta K \left[\left(\frac{2}{1-\rho} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{d \ln K}{d\rho}\right)^2 \frac{u^2}{1-\rho} + \frac{K}{(1-\rho)^4} \frac{\beta D}{d_2}\right] \left(1 + \frac{a}{h}\right) \exp\left(-\frac{a}{h}\right) \qquad (5.5)$$

Диссипация энергии мелкомасштабного движения равна, очевидно,

$$E_2 = n\alpha \langle W^2 \rangle = \frac{3\rho\alpha^2}{d_2 (v^\circ)^2} D \qquad (5.6)$$

Приравнивая выражения (5.5) и (5.6) и используя выражения для u и β из (1.1), (1.2), получим следующее уравнение для D:

$$\left[3 - \frac{\rho^2(\rho_* - \rho)}{\rho_*} \left(\frac{K}{S}\right)^2 \frac{1}{(1-\rho)^4} \left(1 + \frac{a}{h}\right) \exp\left(-\frac{a}{h}\right)\right] D =$$

$$= \frac{8}{729} \frac{\rho^2(\rho_* - \rho)}{\rho_*} \frac{1-\rho}{KS^2} \left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d \ln K}{d\rho}\right)^2 \left(1 + \frac{a}{h}\right) \exp\left(-\frac{a}{h}\right) D_0 \qquad (5.7)$$

$$D_0 = g^2 (d_2 a^2 / \mu_0)^3$$

Величина h в (5.7) определена в (4.1), а $S(\rho)$ — функция, входящая в определение эффективной вязкости μ газа, обтекающего упорядоченную решетку частиц: $\mu = \mu_0 S(\rho)$, $S(0) = 1$, $dS / d\rho > 0$ (см. [6]).

Нетрудно видеть, что уравнение (5.7) имеет конечный корень D, если только величина ρ далека от нуля или ρ_*, а величина D_0 достаточно велика. При нарушении этих условий уравнение (5.7) имеет единственный корень $D = 0$, т. е. мелкомасштабные движения вообще отсутствуют. В этом случае в системе имеются лишь вертикальные псевдотурбулентные пульсации с интенсивностью

$$\langle w'^2 \rangle = \frac{\rho^2(\rho_* - \rho)}{\rho_*} \left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{d \ln K}{d\rho}\right)^2 u^2 \qquad (5.8)$$

Последний вывод качественно согласуется с многочисленными экспериментами, согласно которым с увеличением μ_0 и уменьшением ρ, d_2, a дрожания частиц внутри пакетов прекращаются.

Как следует из приводимых выражений, скорости хаотического движения оказываются немалыми даже при малых ρ или $\rho_* - \rho$. Поэтому результаты работы непосредственно справедливы лишь для весьма разреженных систем. Однако использованный метод применим и в общем случае, если ввести в конвективные члены уравнений § 1 поправки из § 4, а также дополнить уравнение для диспергированной фазы (1.5) членами с вязкостью и давлением этой фазы, обусловленными мелкомасштабными движениями частиц. Реализация такой программы и исследование различных характеристик хаотических движений в зависимости от усредненного движения и физических параметров фаз представляют, конечно, самостоятельную задачу.

Поступила 22 VI 1967 Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.
2. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
3. Murray J. D. On the Mathematics of Fluidization. Part 1. Fundamental Equations and Wave Propagation. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt. 3.
4. Буевич Ю. А. Приближенная статистическая теория взвешенного слоя. ПМТФ, 1966, № 6.
5. Тодес О. М., Бондарева А. К., Гринбаум М. Б. Движение и перемешивание частиц твердой фазы в псевдоожиженном слое. Хим. пром-сть. 1966, № 6.
6. Буевич Ю. А., Сафрай В. М. Вязкость жидкой фазы в дисперсных системах. ПМТФ, 1967, № 2.
7. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. Изд-во иностр. лит., 1947.
8. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. Усп. матем. наук, 1952, т. 7, вып. 5.
9. Буевич Ю. А., Леонов А. И. Фильтрация жидкости в среде со случайной пористостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
10. Münster A. Theory of Fluctuations. Termodinamika del processi irreversibili, Bologna, 1960. Русск. пер. в сб. «Термодинамика необратимых процессов». Изд-во иностр. лит., 1962.
11. Houghton G. Particle and Fluid Diffusion in Homogeneous Fluidization. Industr. Engng. Fundamentals, 1966, vol. 5, No 2.
12. Мясников В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1. М. «Наука», 1965.