Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

О КИНЕМАТИКЕ, НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ

В. А. Городцов, А. И. Леонов

(Москва)

В рамках обычной термодинамики необратимых процессов (линейная связь между термодинамическими потоками и силами, симметрия кинетических коэффициентов) при использовании выведенной в работе связи между обратимыми, необратимыми и полными скоростями деформаций построена система определяющих уравнений для простейших вязко-упругих сред при наличии произвольных конечных обратимых деформаций.

Эти уравнения исследуются в случае достаточно малых обратимых деформаций; строится «теория второго порядка», учитывающая, помимо геометрической, также и физическую нелинейность в системе. При этом учитывается, что кинетические коэффициенты будут тензорными функциями от тензора обратимых деформаций. Последнее приводит к «деформационной анизотропии» теплопроводности и диффузии. Для простейших модельных сред выписаны выражения для производства энтропии в системе.

Теория «второго порядка» обобщена на случай изотермической деформации упруго-вязких сред со многими временами релаксации. Решение ряда задач для простейших течений (простой сдвиг, растяжение) упруго-вязких сред показало достаточно хорошее качественное согласие построенной теории с экспериментом. Рассмотрены также вопросы об обращении тензорной яуманновской производной («яуманновское интегрирование»).

Теоретическому описанию вязко-упругих сред посвящено большое количество работ (см. обзор [1]). При феноменологическом построении теории вязко-упругости, как и вообще при построении моделей сплошных сред [2,3], используют соображения инвариантности, геометрию конечных деформаций и термодинамику, а для диссипативных сред — и термодинамику необратимых процессов (ТНП). Достаточно полное исследование линейной вязко-упругости в условиях малых скоростей подобного рода проведено Био [4,5].

Сошлемся еще на работы Клюйтенберга, в которых излагается термодинамический вывод определяющих уравнений для разнообразных сред [6–9].

К числу наиболее ранних исследований по нелинейной теории вязко-упругости следует отнести работу [10], однако кинематика вязко-упругих явлений осталась в этой работе невыясненной, а термодинамический анализ явления полностью отсутствует.

Развитие теорий нелинейного поведения диссипативных сред часто связывают с обобщением ТНП [11]. В противоположность такой точке зрения в этой работе сделана попытка использовать обычный вариант ТНП с линейными феноменологическими законами и соотношениями взаимности Онзагера при выводе определяющих уравнений нелинейной вязко-упругой среды с физическими и геометрическими нелинейностями.

В изложении теории деформирования диссипативной среды и ТНП во многом без подробных ссылок будем опираться на работы [2,12].

Известно, что основным для термодинамически равновесных процессов является задание функции состояния типа внутренней энергии или энтропии (или других термодинамических потенциалов), которые зависят от температуры и внешних параметров. Для небольших отклонений от равновесия («слабо диссипативных» сред) можно предположить сохранение подобного описания при помощи функций состояния.

Причем, во-первых, необходимо, вообще говоря, расширить количество определяющих параметров (например, включить некоторые внутренние параметры в число аргументов функций состояния), во-вторых, дополнительно задать диссипативную функцию, описывающую производство энтропии в термодинамической системе.

В качестве функции состояния выбирается удельная внутренняя энергия и предполагается, что она зависит лишь от удельной энтропии s и обратимой части деформации $\varepsilon_{ij}{}^e$ без дополнительных внутренних параметров, т. е. зависимость $u(s, \varepsilon)$ подобна той, какая имеет место в случае недиссипативной упругой среды. В выражении для диссипации удерживаются лишь низшие члены по отклонению от равновесия.

Такое термодинамическое рассмотрение вязко-упругой среды имеет аналогию со статистическим подходом к ее гидродинамике, когда за исходное выбирается описание при помощи локально-равновесного распределения, а релаксационные процессы учитываются как малые отклонения от этого равновесного распределения [13]. Заметим, что сделанные предположения существенно отличают рассматриваемую упруго-вязкую среду от среды с пластическими деформациями, так как характерной особенностью последней является зависимость внутренней энергии по крайней мере также и от необратимой составляющей деформации [6,9].

§ 1. Кинематика конечных деформаций в вязко-упругой среде. Следуя [2], определим обратимую деформацию в частице среды при помощи некоторого мысленного или фактически производимого процесса разгрузки малой частицы от напряжений.

Определим процесс разгрузки данной частицы среды как мгновенное ее освобождение от напряжений и выжидания в течение бесконечного промежутка времени. Если в момент времени t_0 полная деформация в частице была $\varepsilon_{ij}(t_0)$, то в момент t_0+0 она изменится на «мгновенную» упругую составляющую, а далее при $t>t_0$ она будет освобождаться от «запаздывающей» упругой деформации, так что при $t\to\infty$ в частице останется лишь одна необратимая составляющая деформации $\varepsilon_{ij}{}^p$. Разность $\varepsilon_{ij}{}^p-\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}{}^e$ определит обратимую составляющую деформации. Именно таким образом (за исключением лишь того, что опыт продолжается конечное время) величина $\varepsilon_{ij}{}^e$ определяется экспериментально.

Введем лагранжеву «вмороженную» систему координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и рассмотрим три положения континуума относительно неподвижной системы координат x^1, x^2, x^3 с векторным базисом $Э^i$ и фундаментальной формой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

1) начальное положение в момент времени $t_0<t$ с базисом $Э_0{}^i$, фундаментальной формой $ds_0{}^2=g_{ij}{}^{(0)}d\xi^i d\xi^j$;

2) деформированное состояние в момент t с базисом $Э_1{}^i$, фундаментальной формой $ds_1{}^2=g_{ij}{}^{(1)}(\xi^k, t)\,d\xi^i d\xi^j$;

3) «разгрузочное» состояние в момент времени $t+\infty$ с базисом $Э_2{}^i$ и фундаментальной формой $ds_2{}^2=g_{ij}{}^{(2)}(\xi^k, t+\infty)\,d\xi^i d\xi^j$.

По смыслу введения лагранжевого базиса $Э_1{}^i$ имеем $ds^2=ds_1{}^2$ в силу закона движения континуума $x^i=x^i(\xi^j, t)$.

Обратимая, необратимая и полная составляющие деформации

$$\varepsilon_{ij}^e={}^1/_2\,(g_{ij}^{(1)}-g_{ij}^{(2)}),\qquad \varepsilon_{ij}^p={}^1/_2\,(g_{ij}^{(2)}-g_{ij}^{(0)}),\qquad \varepsilon_{ij}={}^1/_2\,(g_{ij}^{(1)}-g_{ij}^{(0)}) \tag{1.1}$$

Пространство 2 является пространством конечных состояний для необратимой деформации и пространством начальных состояний для обратимой деформации; пространство 1 является пространством конечных состояний как для обратимой, так и для полной составляющих деформаций. В пространствах конечных состояний для различных составляющих деформаций введем тензоры обратимых ε^e, необратимых ε^p и полных ε деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}Э_1{}^iЭ_1{}^j, \qquad \varepsilon^e = \varepsilon_{ij}{}^eЭ_1{}^iЭ_1{}^j, \qquad \varepsilon^p = \varepsilon_{ij}{}^pЭ_2{}^iЭ_2{}^j$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(\xi^k, t)$, $\varepsilon_{ij}^e(\xi^k, t)$, $\varepsilon_{ij}^p(\xi^k, t)$ определены равенствами (1.1). Для составляющих этих тензоров, определенных в разных пространствах, на основании (1.1) будем иметь покомпонентное (матричное) равенство

$$\varepsilon_{ij}{}^e + \varepsilon_{ij}{}^p = \varepsilon_{ij} \tag{1.2}$$

Применим к (1.2) операцию «конвективного дифференцирования» по времени D/Dt при постоянных лагранжевых координатах ξ^k

$$\frac{D\varepsilon_{ij}{}^e}{Dt} + \frac{D\varepsilon_{ij}{}^p}{Dt} = \frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} = e_{ij} \tag{1.3}$$

Определим тензоры скоростей деформаций в конечных состояниях

$$\mathrm{e} = e_{ij}Э_1{}^iЭ_1{}^j, \qquad \frac{D\varepsilon^e}{Dt} = \frac{D\varepsilon_{ij}{}^e}{Dt}Э_1{}^iЭ_1{}^j, \qquad \frac{D\varepsilon^p}{Dt} = \frac{D\varepsilon_{ij}{}^p}{Dt}Э_2{}^iЭ_2{}^j \tag{1.4}$$

Используя (1.4), перейдем от неинвариантного (матричного) уравнения (1.3) к тензорному [2]. Для этого в разгрузочном пространстве 2 введем локальный базис $Э_1{}^i$, тогда обозначая через $\gamma_{ij}{}^p$ компоненты тензора $D\varepsilon^p / Dt$ в базисе $Э_1{}^i$, получим

$$D\varepsilon_{ij}{}^p/Dt = C^{\alpha}_{\cdot\cdot i}\gamma^p_{\alpha\beta}C^{\beta}_{\cdot\cdot j}, \qquad \mathrm{C} = C^{\alpha}_{\cdot\cdot\beta}Э_1{}^{\beta}Э_{1\alpha} \tag{1.5}$$

Здесь тензор C с матрицей $\| C_{\cdot}{}^{\alpha\cdot}{}_{\beta} \|$ определяет преобразование от ковариантного базисного вектора $Э_{2i}$ к векторному базису $Э_{1\alpha}$ по закону $Э_{2i} = C^{\alpha}_{\cdot\cdot i}Э_{1\alpha}$. Пространство *1* отличается от пространства *2* на упругие деформации C и упругие повороты каждой частицы среды,поэтому для тензора C имеем в базисе $Э_1{}^i$ представление [2]

$$\mathrm{C} = \exp[\mathrm{k}]\sqrt{\mathrm{g} - 2\varepsilon^e}, \qquad \mathrm{k} = k_{ij}Э_1{}^iЭ_1{}^j, \qquad \mathrm{g} = g_{ij}{}^{(1)}Э_1{}^iЭ_1{}^j \tag{1.6}$$

Здесь k — антисимметричный тензор упругих поворотов, g — фундаментальный метрический тензор. Подставляя (1.6) в (1.3), получим тензорное уравнение[1]

$$D\varepsilon^e/Dt + (\mathrm{g} - 2\varepsilon^e)^{1/2}\exp[-\mathrm{k}]\,\gamma^p\exp[\mathrm{k}]\,(\mathrm{g} - 2\varepsilon^e)^{1/2} = \mathrm{e} \tag{1.7}$$

[1] Аналогичное уравнение получено в работе Ю. А. Буевича, где несколько иначе рассматривается кинематика конечных упруго-вязких деформаций для максвелловской среды.

Переходя от вмороженной системы ξ^i к неподвижной x^k, с учетом преобразований для конвективных производных [2,10] имеем

$$d\mathbf{\varepsilon}^e/dt + \mathbf{\omega\varepsilon}^e - \mathbf{\varepsilon}^e\mathbf{\omega} + \mathbf{e\varepsilon}^e + \mathbf{\varepsilon}^e\mathbf{e} + (\mathbf{g} - 2\mathbf{\varepsilon}^e)^{1/2}\exp[-\mathbf{k}]\,\mathbf{\gamma}^p\exp[\mathbf{k}]\,(\mathbf{g} - 2\mathbf{\varepsilon}^e)^{1/2} = \mathbf{e} \tag{1.8}$$

Здесь тензоры $\mathbf{\varepsilon}^e$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{\gamma}^p$, $\mathbf{\omega}$ определены в системе x^k и имеют ковариантные компоненты $\varepsilon_{ij}{}^e$, e_{ij}, g_{ij}, k_{ij}, $\gamma_{ij}{}^p$, ω_{ij}, причем

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^\alpha\nabla_\alpha, \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)$$

v^α — компоненты вектора скорости, e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации, $\|\omega_{ij}\|$ — матрица тензора вихря, ∇_α—символ ковариантного дифференцирования.

Кинематическое соотношение (1.8) определяет искомую связь между упругими, необратимыми и полными тензорными характеристиками деформации. В отличие от матричного соотношения (1.3) в тензорном соотношении (1.7) необратимая скорость деформации нелинейно (за счет обратимой деформации и упругих вращений элемента среды) связана со скоростью полной деформации и скоростью упругой деформации.

Далее будем рассматривать только такой тип среды, макроскопическое состояние которой не зависит от внутренних вращений и, следовательно, от величины $\mathbf{k}$. Как будет видно из дальнейшего, действительно можно получить определяющие уравнения такой среды, не содержащие тензор $\mathbf{k}$.

Введем новый тензор

$$\mathbf{e}^p = \exp[-\mathbf{k}]\,\mathbf{\gamma}^p\exp[\mathbf{k}] = e_{ij}{}^p\mathfrak{Э}^i\mathfrak{Э}^j \tag{1.9}$$

Из (1.9) и симметрии $\mathbf{\gamma}^p$ следует, что $\mathbf{e}^p$ — симметричный тензор, все три инварианта $\mathbf{e}^p$ совпадают с инвариантами $\mathbf{\gamma}^p$, однако главные направления различаются на величины упругих поворотов.

В качестве меры обратимой деформации удобно принять тензор Генки $\mathbf{h}$, представляющий собой изотропную функцию от тензора $\mathbf{\varepsilon}^e$:

$$\mathbf{h} = -{}^1/_2\ln(\mathbf{g} - 2\mathbf{\varepsilon}^e) \tag{1.10}$$

Главные оси тензоров $\mathbf{h}$ и $\mathbf{\varepsilon}^e$ совпадают.

Вводя в основное кинематическое соотношение (1.8) величину $\mathbf{e}^p$, согласно (1.9), заменяя величину $\mathbf{\varepsilon}^e$ на $\mathbf{h}$, согласно (1.10), и умножая слева и справа это уравнение на невырожденную матрицу $\exp[\mathbf{h}]$, получим

$$\frac{\Delta\mathbf{h}}{\Delta t} + \mathbf{e}^p - \mathbf{e} = \mathbf{f}\left(\mathbf{h};\ \mathbf{\omega},\ \mathbf{e},\ \frac{d\mathbf{h}}{dt}\right) \tag{1.11}$$

$$2\mathbf{f} = \exp[\mathbf{h}]\frac{d}{dt}(\exp[-2\mathbf{h}])\exp[\mathbf{h}] + 2\frac{d\mathbf{h}}{dt} + 2\mathbf{\omega h} -$$
$$- 2\mathbf{h\omega} + \exp[\mathbf{h}]\,\mathbf{\omega}\exp[-\mathbf{h}] - \exp[-\mathbf{h}]\,\mathbf{\omega}\exp[\mathbf{h}] +$$
$$+ \exp[\mathbf{h}]\,\mathbf{e}\exp[-\mathbf{h}] + \exp[-\mathbf{h}]\,\mathbf{e}\exp[\mathbf{h}] - 2\mathbf{e}$$

Здесь и выше имеются в виду тензорные (матричные) произведения. Символом $\Delta / \Delta t$ обозначена яуманновская производная

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{ij} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + v^\alpha\nabla_\alpha h_{ij} + \omega_{i\cdot}^{\cdot\alpha}h_{\alpha j} - h_{i\alpha}\omega_{\cdot j}^{\alpha\cdot} \tag{1.12}$$

Отличительное свойство яуманновской производной

$$(\Delta \mathbf{g} / \Delta t)_{ij} = 0 \tag{1.13}$$

Тензор $\mathbf{f}$ из (1.11) обладает следующими свойствами: $\mathbf{f}$ — симметричный тензор, т. е. $f_{ij} = f_{ji}$.

Скалярное произведение тензора $\mathbf{f}$ на произвольную функцию $\varphi(\mathbf{h})$ равно нулю, т. е.

$$\varphi^{ij}(h_{\alpha\beta}) f_{ij} = 0, \qquad g^{ij} f_{ij} = \operatorname{Sp} \mathbf{f} = 0 \tag{1.14}$$

При достаточно малых упругих деформациях ($\mathbf{h} = \alpha \mathbf{H}$, $\alpha \ll 1$)

$$2\mathbf{f} = \mathbf{h}^2\mathbf{e} - 2\mathbf{heh} + \mathbf{eh}^2 + O(\mathbf{h}^3\mathbf{e} + \ldots) +$$

$$+ \mathbf{h\omega h}^2 - \mathbf{h}^2\mathbf{\omega h} + {}^1/_3\, \mathbf{h}^3\mathbf{\omega} - {}^1/_3\, \mathbf{\omega h}^3 + O(\mathbf{h}^4\mathbf{\omega} + \ldots) +$$

$$+ \frac{2\mathbf{h}}{3}\frac{d\mathbf{h}}{dt}\mathbf{h} - \frac{\mathbf{h}^2}{3}\frac{d\mathbf{h}}{dt} - \frac{d\mathbf{h}}{dt}\frac{\mathbf{h}^2}{3} + O\left(\mathbf{h}^3\frac{d\mathbf{h}}{dt} + \ldots\right) \tag{1.15}$$

Формула (1.15) с учетом (1.11) и (1.12) показывает, что при достаточно малых обратимых деформациях правая часть кинематического соотношения (1.11) содержит члены на два порядка выше членов левой части.

В случае, когда кинематические тензоры $\mathbf{\omega}$, $\mathbf{e}$ и $d\mathbf{h} / dt$ коммутируют с тензором $\mathbf{h}$, имеет место $\mathbf{f} \equiv 0$. Такой случай реализуется, например, при афинных деформациях среды, когда направления главных осей тензоров $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ и $d\mathbf{h} / dt$ совпадают или неподвижны в пространстве, а $\mathbf{\omega} = 0$.

Свернув кинематическое соотношение (1.11) по индексам, получим

$$dh_{\alpha\alpha} / dt + \gamma_{\alpha\alpha}^{p} = e_{\alpha\alpha} \tag{1.16}$$

Вводя обозначения ρ_0, ρ_1, ρ_2; g_0, g_1, g_2 для плотностей и детерминантов метрических тензоров в начальном, деформированном и «разгрузочном» состояниях, соответственно, будем иметь

$$h_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\ln\frac{g_1}{g_2} = \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \gamma_{\alpha\alpha}^{p} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\frac{g_2}{g_0} = \frac{d}{dt}\ln\frac{\rho_0}{\rho_2}$$

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\frac{g_1}{g_0} = \frac{d}{dt}\ln\frac{\rho_0}{\rho_1} \tag{1.17}$$

Подставляя эти выражения в (1.16), получим тождество, имеющее очевидный физический смысл: сумма скоростей обратимых и необратимых объемных деформаций равна полной скорости объемной деформации среды.

Как будет показано ниже, введенный тензор e_{ij}^{p} однозначно определяется через наблюдаемые кинематические (тензор скоростей деформаций e_{ij}) и динамические (тензор напряжений σ_{ij}) величины.

При этом, несмотря на то, что тензор упругих поворотов k_{ij} остается неопределенным через эти величины, по формулам преобразования (1.5), (1.6) с учетом определения e_{ij}^{p} можно легко определить компоненты тензора скоростей необратимых деформаций в разгрузочном пространстве

$$D\varepsilon^{p}/Dt = \exp\,[-\mathbf{h}]\, \mathbf{e}^{p} \exp\,[-\mathbf{h}]$$

Отметим, что кинематические соотношения (1.8) и (1.11) в двух предельных случаях $\varepsilon^{e} \to 0$ ($\mathbf{k} \to 0$) или $\gamma^{p} \to 0$ переходят в кинематические соотношения для вязкой жидкости и среды с обратимыми упругими деформациями, соответственно.

§ 2. Выражение для производства энтропии в системе. Простейшие вязко-упругие модели. Общими для любого типа сплошных сред являются уравнения сохранения массы, импульса и полной энергии

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}, \qquad \rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{i\beta}}{\partial x_\beta}, \qquad \rho\frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(v_\alpha\sigma_{\alpha\beta} - q_\beta) \tag{2.1}$$

Здесь ρ — плотность среды, v_α — компоненты вектора скорости, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, w — полная энергия единичной массы, q_β — компоненты векторного потока тепла. Для простоты уравнения написаны в декартовой прямоугольной системе координат.

В среде без внутренних моментов тензор напряжений симметричен, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, а полная энергия складывается из кинетической энергии и внутренней энергии среды $\rho w = {}^1/_2\rho v_\alpha^2 + \rho u$.

Главное же отличие разнообразных модельных сред заключается в удельной внутренней энергии u. Как уже говорилось, будем рассматривать такую среду, удельная внутренняя энергия которой зависит от удельной энтропии s и тензора Генки $\mathbf{h}$ обратимой деформации $u = u(s, h_{ij})$ (здесь выбор h_{ij} вместо ε_{ij}^e сделан из соображений удобства). Тогда соотношение Гиббса можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = T\frac{ds}{dt} + \left.\frac{du}{dt}\right|_s \tag{2.2}$$

Используя уравнения этого параграфа несложно получить уравнение для удельной энтропии (2.3)

$$\rho\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{q_\beta}{T} + P_s, \quad P_s \geqslant 0, \quad TP_s = -\frac{q_\beta}{T}\frac{\partial T}{\partial x_\beta} + \sigma_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} - \rho\left.\frac{du}{dt}\right|_s$$

Здесь $e_{\alpha\beta}$ — скорость деформации, P_s — производство энтропии, которое, согласно второму закону термодинамики, положительно для неравновесных процессов и обращается в нуль в равновесии. Однозначность выделения выражения P_s в качестве производства энтропии в уравнении (2.3) основывается на инвариантности этого выражения относительно преобразования Галилея и на обращении P_s в нуль при термодинамическом равновесии [12]. В случае изотропной среды скалярная функция внутренней энергии может зависеть лишь от инвариантов тензора деформации

$$I_1 = h_{\alpha\alpha}, \qquad I_2 = h_{\alpha\beta}h_{\beta\alpha}, \qquad I_3 = h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha}$$

Тогда $du / dt|_s$ можно записать в виде

$$\rho\left.\frac{du}{dt}\right|_s = \sigma_{\alpha\beta}^e\left(\frac{\Delta\mathbf{h}}{\Delta t}\right)_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\sigma_{ij}^e}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial I_1}\delta_{ij} + \frac{\partial u}{\partial I_2}2h_{ij} + \frac{\partial u}{\partial I_3}3h_{i\alpha}h_{\alpha j} \tag{2.4}$$

Здесь σ_{ij}^e — компоненты тензора «упругих напряжений».

Чтобы правильно выделить независимые термодинамические силы и термодинамические потоки в выражении для производства энтропии, воспользуемся основным кинематическим соотношением (1.11) и разобьем тензорные величины на шаровые и девиаторные части. Например,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + {}^1/_3\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}, \qquad \sigma_{\alpha\alpha}' = 0$$

Тогда выражение для производства энтропии перепишется

$$TP_s = (\sigma_{\alpha\beta}' - \sigma_{\alpha\beta}^{e'}) e_{\alpha\beta}^{e'} + \sigma_{\alpha\beta}^{e'} e_{\alpha\beta}^{p'} - \frac{q_\beta}{T}\frac{\partial T}{\partial x_\beta} + {}^1/_3 (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^{e}) e_{\beta\beta} + {}^1/_3 \sigma_{\alpha\alpha}^{e} e_{\beta\beta}^{p} \qquad (2.5)$$

Теперь можно перейти к получению определяющих уравнений среды. При термодинамическом подходе к ее описанию величины $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}{}^e$ и $\partial T \,/\, \partial x_\beta$, входящие в формулу (2.5) для производства энтропии, играют роль термодинамических сил, $e_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}{}^p$ и q_β — термодинамических потоков. Согласно обычной линейной теории ТНП, их связывают линейные феноменологические соотношения [12], которые, в частности, дают определяющие уравнения среды.

В силу принципа Кюри в изотропной среде феноменологические соотношения для скалярных, векторных и тензорных явлений разделяются. Учитывая соотношения взаимности Онзагера [12], получим для скалярных явлений

$$\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^{e} = a_1 e_{\alpha\alpha} + a_2 e_{\alpha\alpha}^{p}, \qquad \sigma_{\alpha\alpha}^{e} = a_2 e_{\alpha\alpha} + a_3 e_{\alpha\alpha}^{p} \qquad (2.6)$$

для векторного явления

$$q_i = -\varkappa \, (\partial T \,/\, \partial x_i) \qquad (2.7)$$

для тензорных явлений

$$\sigma_{ij}' - \sigma_{ij}^{e'} = b_1 e_{ij}' + b_2 e_{ij}^{p'}, \qquad \sigma_{ij}^{e'} = b_2 e_{ij}' + b_3 e_{ij}^{p'} \qquad (2.8)$$

Кинетические коэффициенты $\varkappa$, a_k, b_k есть, вообще говоря, функции от T и $I_k\,(h_{ij})$.

Производство энтропии становится неотрицательно определенной квадратичной формой (α_k, β_k легко выражаются через a_k, b_k) (2.9)

$$TP_s = \alpha_1 e_{\alpha\alpha}^2 + 2\alpha_2 e_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} + \alpha_3 \sigma_{\beta\beta}^2 + \beta_1 e_{\alpha\beta}'^2 + 2\beta_2 e_{\alpha\beta}'\sigma_{\alpha\beta}' + \beta_3 \sigma_{\alpha\beta}'^2 + \varkappa T^{-1} (\partial T/\partial x_\beta)^2$$

Условия положительной определенности квадратичной формы имеют вид

$$\varkappa > 0,\ a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ a_1 a_3 > a_2^2,\ b_1 b_3 > b_2^2,\ \alpha_1 > 0,\ \beta_1 > 0$$

$$\alpha_1\alpha_3 > \alpha_2^2, \quad \beta_1\beta_3 > \beta_2^2 \qquad (2.10)$$

Неравенства (2.10) (часть из которых в различных частных случаях может быть ослаблена) достаточны также и для однозначного определения потоков через термодинамические силы.

Уравнения (2.6), (2.8) с учетом неравенств (2.10), кинематического соотношения (1.11) и выражения (2.4) для $\sigma_{ij}{}^e$ есть замкнутая нелинейная система реологических уравнений некоторой изотермической модели сжимаемой упруго-вязкой жидкости, которая, как показано ниже, описывает запаздывание и релаксацию.

Рассмотрим уравнение для температуры среды.

Определим теплоемкость при постоянной обратимой деформации

$$c_h = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_h = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_h \tag{2.11}$$

Преобразуя с ее помощью (2.3), получим

$$\rho c_h \frac{dT}{dt} + \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial h_{\alpha\beta}}\right)_T \frac{dh_{\alpha\beta}}{dt} = \nabla_\alpha(\varkappa\nabla_\alpha T) + TP_s^+ \tag{2.12}$$

$$TP_s^+ = TP_s - \varkappa(\nabla_\beta T)^2$$

Из условия интегрируемости удельной свободной энергии $u - Ts$:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial h_{ij}}\right)_T = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}{}^e / \rho}{\partial T}\right)_h$$

Тогда (2.12) можно преобразовать

$$\rho c_h \frac{dT}{dt} = \nabla_\alpha(\varkappa\nabla_\alpha T) + TP_s^+ + \rho T\left(\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^e/\rho}{\partial T}\right)_h \frac{dh_{\alpha\beta}}{dt} \tag{2.13}$$

Формула (2.13) показывает, что при деформации рассматриваемой упруго-вязкой среды тепловой эффект обусловлен диссипативным членом, а также добавочным членом, которые особенно резко проявляются при быстрых изменениях режима деформирования среды. Большой разогрев действительно наблюдался [14] в ротационном вискозиметре при внезапной остановке течения упруго-вязких жидкостей различной природы.

Можно ввести теплоемкость при постоянном тензоре $\tau = \sigma^e / \rho$ (что соответствует постоянству напряжения в максвелловской или упругой средах), которая связана с c_h соотношением

$$c_\tau = c_h - T\left(\frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial T}\right)_\tau \frac{d\tau_{\alpha\beta}}{dt}$$

Уравнение теплопроводности (2.13) примет вид

$$\rho c_\tau \frac{dT}{dt} = \nabla_\alpha(\varkappa\nabla_\alpha T) + TP_s^+ + \rho T\left(\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial T}\right)_\tau \frac{d\tau_{\alpha\beta}}{dt} \tag{2.14}$$

Когда упругость в среде имеет энтропийную природу, что может быть при течении растворов и расплавов полимеров, при изотермической деформации

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial h_{ij}}\right)_T = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_h \left(\frac{\partial s}{\partial h_{ij}}\right)_T + \left(\frac{\partial u}{\partial h_{ij}}\right)_s = -T\left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial T}\right)_h + \tau_{ij}$$

Из этого $\tau_{ij} = \tau_{ij}{}^\circ T / T_0$ (индекс $^\circ$ показывает, что тензор $\tau_{ij}{}^\circ$ отнесен к некоторой «начальной» температуре T_0). Уравнения (2.13) или (2.14) совместно с указанными выше реологическими уравнениями описывают неизотермическое поведение рассматриваемой упруго-вязкой среды.

Система уравнений (1.11), (2.4), (2.6), (2.8) описывает нелинейное поведение среды, обладающей релаксацией напряжений и последействием. Покажем, что в частных случаях из этих уравнений может быть получена нелинейная модель Максвелла со временем релаксации и модель Кельвина — Фойгта со временем ретардации.

1°. *Нелинейная модель Максвелла.* Положим в (2.6), (2.8)

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0, \qquad a_3 > 0, \qquad b_3 > 0$$

Тогда, обозначая $b_3 = 2\eta$, $a_3 = 3\zeta$ (η, ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости), получим

$$\sigma_{ij} = 2\eta e_{ij}^{\ p} + (\zeta - {}^2/_3\,\eta)\, e_{\alpha\alpha}^{p}\delta_{ij} = \sigma_{ij}^{\ e} = \rho \frac{\partial u}{\partial I_1}\delta_{ij} + 2\rho \frac{\partial u}{\partial I_2} h_{ij} + 3\rho \frac{\partial u}{\partial I_3} h_{i\alpha}h_{\alpha j} \qquad (2.15)$$

Система (2.15) показывает, что в максвелловской жидкости тензор напряжений связан с тензором упругих деформаций так же, как и в равновесном случае чисто упругой среды, а тензор $e_{ij}^{\ p}$, характеризующий скорость необратимой деформации, также связан с напряжениями законом Ньютона, как и в случае вязкой среды.

Выражение для диссипации принимает простой вид

$$TP_s - \varkappa T^{-1} (\nabla_\alpha T)^2 = \zeta e_{\alpha\alpha}^{p2} + 2\eta e_{\alpha\beta}^{p\,'2} = \sigma_{\alpha\alpha}^{\ 2} / (9\zeta) + (\sigma_{\alpha\beta}')^2 / (2\eta) \qquad (2.16)$$

Как это следует из § 1, имеет место $e_{\alpha\beta}^{p'2} = \gamma_{\alpha\beta}^{p'2}$, т. е. упругие вращения элементов среды не влияют на величину диссипации. Если, согласно (2.15), выразить $\mathbf{e}^p$, $\mathbf{h}$ через $\boldsymbol{\sigma}$ и подставить в кинематическое соотношение (1.11), то получим реологическое уравнение максвелловской жидкости, связывающее тензор напряжений с полным тензором скоростей деформаций.

2°. *Нелинейная модель Кельвина — Фойгта* (см. также [15]). Эту модель можно получить следующим формальным путем. Положим в (2.5) и кинематическом соотношении (1.11) величину $\mathbf{e}^p = 0$ ($\boldsymbol{\gamma}^p = 0$). Тогда вместо (2.6) имеем $\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\alpha}^{\ e} + a e_{\alpha\alpha}$. Аналогично $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij}'^{e} + b e_{ij}'$. Обозначим далее $a = 3\zeta$, $b = 2\eta$. При $\boldsymbol{\gamma}^p = 0$ имеет место $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}$ и кинематическое соотношение (1.11) принимает вид (см. также (1.8))

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \boldsymbol{\omega\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon\omega} + \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e} = \mathbf{e} \qquad (2.17)$$

Это — выражение обычной связи между тензором конечных деформаций и скоростью деформации. Соответствующее реологическое уравнение будет

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{h}) + 2\eta\mathbf{e} + (\zeta - {}^2/_3\,\eta)(Sp\,\mathbf{e})\,\mathbf{g} \qquad (2.18)$$

Система уравнений (2.17) и (2.18) совместно с уравнением теплопроводности представляет собой замкнутую систему термореологических уравнений для сжимаемой вязко-упругой изотропной среды с последействием. Выражение для производства энтропии имеет вид

$$TP_s = \varkappa T^{-1} (\nabla_\alpha T)^2 + \zeta e_{\alpha\alpha}^{\ 2} + 2\eta e_{\alpha\beta}^{\ '2} \qquad (2.19)$$

Соотношение типа (2.18) для случая больших упругих деформаций получено в работе [15].

В заключение этого параграфа сделаем два замечания.

1. Феноменологические связи между напряжениями, полными деформациями и их тензорными производными по времени, полученные на основании выражения для производства энтропии типа (2.4) без кинематического соотношения (1.11), становятся весьма неоднозначными. Последнее следует, например, из того, что

$$\varphi_{ij}(\varepsilon)\left(\frac{\Delta\psi(\varepsilon)}{\Delta t}\right)_{ij} = \varphi_{ij}(\varepsilon)\,\psi_{jk}'(\varepsilon)\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}\right)_{ki} = \varphi_{ij}(\varepsilon)\,\psi_{jk}'(\varepsilon)\,\frac{d\varepsilon_{ki}}{dt}$$

в то время как

$$\left(\frac{\Delta\psi(\varepsilon)}{\Delta t}\right)_{ij} \neq \psi_{ik}'(\varepsilon)\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{kj}$$

Появляющийся при отсутствии кинематического соотношения произвол в выборе термодинамических сил приводит к большому произволу получающихся реологических соотношений.

При наличии кинематических соотношений (1.11), независимо от выбора меры обратимой деформации окончательные реологические уравнения получаются в результате указанной выше процедуры вполне однозначно.

2. Результаты этого параграфа, вообще говоря, относятся к случаю слабой неравновесности, можно лишь надеяться (на что указывают приводимые ниже примеры), что они имеют достаточно широкую область применимости для вязко-упругих сред. В более общем случае, по-видимому, целесообразно пользоваться методами, изложенными в работе [11].

§ 3. Определяющие уравнения для простых упруго-вязких жидкостей при наличии достаточно малых обратимых деформаций. Пусть обратимые деформации в упруго-вязкой среде достаточно малы по сравнению с полными. Такой случай реализуется в слабоупругих жидкостях, а также при достаточно медленных движениях. Формально разлагая кинематическое соотношение (1.11) при достаточно малых $\mathbf{h}$ и отбрасывая члены, порядок которых на $\mathbf{h}^2$ больше оставляемых, будем иметь «линеаризованное» кинематическое соотношение

$$\Delta \mathbf{h} / \Delta t + \mathbf{e}^p = \mathbf{e} \tag{3.1}$$

Функцию $u\ (s,\ \mathbf{h})$ при достаточно малых $\mathbf{h}$ можно представить с точностью до кубических членов включительно в виде

$$\rho_0 u = \rho_0 u_0\ (s) + \mu I_2 + {}^1/_2 \lambda_0 I_1^2 + {}^1/_3\, \lambda_1 I_3 + \lambda_2 I_1 I_2 + {}^1/_3 \lambda_3 I_1^3 \tag{3.2}$$

Здесь ρ_0 — значение плотности среды в недеформированном состоянии при температуре T_0; μ — модуль сдвига; $K = \lambda_0 + {}^2/_3\mu$ — модуль всестороннего сжатия; $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — характеристики «ангармонической части» внутренней энергии.

Согласно требованию термодинамической устойчивости системы, разложение величины u по $\mathbf{h}$ начинается с квадратичных членов, причем μ и K положительны, а знаки λ_n не определены.

Вычисляя теперь $\sigma_{ij}{}^e$ на основании (2.4) и используя (3.2), имеем

$$\rho_0 / \rho \sigma_{ij}{}^e = (\lambda_0 I_1 + \lambda_2 I_2 + \lambda_3 I_1^2)\, \delta_{ij} + 2\, (\mu + \lambda_2 I_1)\, h_{ij} + \lambda_1 h_{i\alpha} h_{\alpha j} \tag{3.3}$$

Из этого выражения видно, что удерживание в разложении внутренней энергии по деформации $\mathbf{h}$ ангармонических членов лишь третьего порядка соответствует точности «линеаризованного» кинематического соотношения (3.1). Как и в (3.1), в (3.3) имеются члены низких порядков по $\mathbf{h}$ и не учитываются члены, порядок которых на $\mathbf{h}^2$ больше оставленных [1].

Нетрудно разделить $\sigma^e_{\ j}$ на шаровую и девиаторную части

$$\rho_0 / \rho \sigma_{\alpha\alpha}^e = (3\lambda_0 + 2\mu)\, I_1 + (3\lambda_2 + \lambda_1)\, I_2 + (2\lambda_2 + 3\lambda_3)\, I_1^2$$

$$\rho_0 / \rho \sigma_{ij}{}^{e'} = 2\, (\mu + \lambda_2 I_1)\, h_{ij}' + \lambda_1\, (h_{i\alpha} h_{\alpha j} - {}^1/_3 I_2 \delta_{ij}) \tag{3.4}$$

[1] Подразумевается, что и в разложении ρ по $\mathbf{h}$ удерживаются лишь члены, не повышающие порядок (3.3) в целом.

Относительно шаровой части разумно ожидать, что при малых давлениях необратимые изменения объема несущественны, т. е. $e_{\alpha\alpha}{}^p \approx 0$. Тогда согласно (1.16) и (2.6)

$$\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^e = a e_{\alpha\alpha} = dh_{\alpha\alpha} / dt$$

Используя (3.4), можно исключить отсюда $\sigma_{\alpha\alpha}{}^e$ и получить уравнение связи между $\sigma_{\alpha\alpha}$ и $I_1 = h_{\alpha\alpha}$:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = a\,(dI_1 / dt) + \frac{\rho_0}{\rho}\,[(3\lambda_0 + 2\mu)\,I_1 + 3(\lambda_2 + \lambda_1)\,I_2 + (2\lambda_2 + 3\lambda_3)\,I_1{}^2] \tag{3.5}$$

Это уравнение описывает объемное последействие в среде. Поскольку при $e_{\alpha\alpha}{}^p = 0$ имеем $I_1 = h_{\alpha\alpha} = \ln\,(\rho_0 / \rho)$, то (3.5) при малых деформациях переходит в нелинейное уравнение Кельвина — Фойгта, связывающее объемную деформацию с изотропным давлением. В более общем случае, когда нельзя пренебречь необратимыми изменениями объема ($e_{\alpha\alpha}{}^p \neq 0$), для описания объемных эффектов необходимо использовать систему уравнений (1.16), (2.1), (2.6) и (3.4), которая описывает релаксацию давлений и скоростей деформаций.

Для девиаторных напряжений здесь остановимся подробно также на простейшем случае. Предположим, что в выражении для внутренней энергии ангармоническими членами можно пренеберчь вообще [1]. Тогда для «упругих» напряжений имеет место закон Гука $\sigma_{ij}{}^{e\prime} = 2\mu h_{ij}{}'$ и из системы уравнений (2.8) нетрудно исключить e^p и h. В результате получим реологическое уравнение

$$\theta_1 \left(\frac{d\sigma_{ij}{}'}{dt} - \sigma_{i\alpha}' \omega_{\alpha j} + \omega_{i\alpha} \sigma_{\alpha j}'\right) + \sigma_{ij}' = 2\eta \left[\theta_2 \left(\frac{de_{ij}{}'}{dt} + \omega_{i\alpha} e_{\alpha j}' - e_{i\alpha}' \omega_{\alpha j}\right) + e_{ij}'\right] \tag{3.6}$$

При выводе (3.6) рассмотрен случай несжимаемой среды ($\rho = \rho_0$) и коэффициенты в соотношениях (2.8) предполагались постоянными. В уравнении (3.6) коэффициенты θ_1, θ_2 и η связаны с коэффициентами уравнений (2.8) следующим образом:

$$\theta_1 = b_3 / (2\mu), \qquad \theta_2 = (b_1 b_3 - b_2{}^2) / (4\mu\eta), \qquad 2\eta = b_1 + 2b_2 + b_3 \tag{3.7}$$

Из неравенств (2.10) и из $\mu > 0$ следует, что

$$\eta > 0, \qquad \theta_1 > \theta_2 > 0 \tag{3.8}$$

т. е. положительность коэффициента вязкости и времен релаксации, и то, что время релаксации напряжений всегда больше времени последействия скоростей деформации.

При малых скоростях течения линеаризованному уравнению (3.6) соответствует наглядная модель из одной упругой пружины и двух вязких элементов в двух эквивалентных вариантах: в одном можно выделить элемент Максвелла, соединенный параллельно с одним из вязких элементов, в другом — элемент Кельвина — Фойгта, соединенный последовательно с вязким элементом.

[1] В рамках излагаемой феноменологической теории удовлетворительность такого приближения заранее не ясна; сопоставление следствий модельных уравнений с результатами экспериментов будет изложено ниже.

Модельные уравнения, подобные (3.6), неоднократно и не без успеха привлекались для описания упруго-вязких жидкостей [16]. Однако, как будет видно ниже, эти уравнения все же недостаточно правильно описывают такое важное свойство упруго-вязких жидкостей, как нормальные напряжения. В тех случаях, когда эффект нормальных напряжений играет большую роль, необходимы уточненные уравнения.

Имеется несколько формальных возможностей уточнения уравнений, оставаясь в рамках линейного по $\mathbf{h}$ кинематического соотношения (3.1). Две из них касаются уточнения феноменологических соотношений между термодинамическими потоками. Одна состоит в удержании в соотношениях типа (2.6) — (2.8) еще и квадратичных членов по термодинамическим силам (или потокам), такой способ выводит за рамки обычной теории ТНП.

Другой способ в рамках этой теории состоит в учете зависимости кинетических коэффициентов от упругих деформаций $\mathbf{h}$. Упругие деформации приводят к деформационной анизотропии первоначально изотропной среды, так что соотношения (2.6) — (2.8) необходимо обобщить. В несжимаемом случае ($e_{\alpha\alpha} = 0,\ h_{\alpha\alpha} = 0$), с линейной точностью по деформации $\mathbf{h}$ соотношения для напряжений примут вид

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^{e} = b_1 e_{ij} + b_{11}(h_{i\alpha}e_{\alpha j} + h_{j\alpha}e_{\alpha i}) + b_{12}h_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \\ + b_2 e_{ij}{}^{p} + b_{21}(h_{i\alpha}e_{\alpha j}^{p} + e_{i\alpha}^{p}h_{\alpha j}) + b_{22}h_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}^{p}\delta_{ij} \\ \sigma_{ij}{}^{e} = b_2 e_{ij} + b_{21}(h_{i\alpha}e_{\alpha j} + e_{i\alpha}h_{\alpha j}) + b_{22}h_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \\ + b_3 e_{ij}^{p} + b_{31}(h_{i\alpha}e_{\alpha j}^{p} + e_{i\alpha}^{p}h_{\alpha j}) + b_{32}h_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}^{p}\delta_{ij}\end{gathered} \tag{3.9}$$

Еще одна возможность состоит в учете ангармонических членов в выражении для внутренней энергии. Выпишем в качестве примера уравнения несжимаемой среды, используя соотношения (2.8) с постоянными кинетическими коэффициентами и упругими напряжениями (3.3)

$$\begin{gathered}\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{ij} + \frac{1}{\theta_1}h_{ij} + \frac{\lambda_1}{b_3}\left(h_{i\alpha}h_{\alpha j} - \frac{1}{3}I_2\delta_{ij}\right) = \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right)e_{ij} \\ \sigma_{ij} = (b_1 - b_2{}^2 / b_3)e_{ij} + \frac{b_2 + b_3}{\theta_1}h_{ij} + \frac{\lambda_1}{b_3}\left[(b_2 + b_3)h_{i\alpha}h_{\alpha j} - \frac{b_2}{3}I_2\delta_{ij}\right]\end{gathered} \tag{3.10}$$

Соотношения (3.1), (3.4) и (3.9) обладают одинаковой точностью по $\mathbf{h}$. В рамках этой же точности с их помощью можно получить уравнение, связывающее $\mathbf{h}$ со скоростью деформации $\mathbf{e}$, для несжимаемой среды

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{ij} + \frac{2\mu}{b_3}h_{ij} + \frac{\lambda_1 b_3 - 4\mu b_{31}}{2b_3{}^2}\{\mathbf{hh}\}_{ij} + \frac{b_2 b_{31} - b_3 b_{21}}{b_3{}^2}\{\mathbf{he}\}_{ij} = \frac{b_2 + b_3}{b_3}e_{ij} \tag{3.11}$$

Здесь принято сокращение $\{\mathbf{pq}\}_{ij} = p_{i\alpha}q_{\alpha j} + q_{i\alpha}p_{\alpha j} - {}^2/_3 p_{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}\delta_{ij}$. При выводе (3.11) оказывается необходимым наложить следующие ограничения на коэффициенты, возникающие из условия исчезновения шаровых частей в (3.11)

$$2b_{21} + 3b_{22} = \frac{\lambda_1}{2\mu}b_2, \qquad 2b_{31} + 3b_{32} = \frac{\lambda_1}{2\mu}b_3 \tag{3.12}$$

Используя теперь (3.11), (3.12) и те же соотношения (3.1), (3.4), (3.9), выражение для напряжений σ_{ij} (за вычетом изотропного давления) можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \left(b_1 - \frac{b_2^2}{b_3}\right) e_{ij} + 2\mu \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) h_{ij} + \tag{3.13}$$
$$+ \frac{\lambda_1 b_3 (b_2 + b_3) - 4\mu (b_2 b_{31} - b_3 b_{21})}{2 b_3^2} \{\mathrm{hh}\}_{ij} + \frac{\lambda_1}{3}\left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) h_{\alpha\beta}^2 \delta_{ij} +$$
$$+ \left(b_{11} - 2b_{21}\frac{b_2}{b_3} + b_{31}\frac{b_2^2}{b_3^2}\right)\{\mathrm{he}\}_{ij} + \left(b_{12} + \frac{2}{3} b_{11} - \frac{\lambda_1}{6\mu}\frac{b_2^2}{b_3}\right) h_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

Полученная система уравнений (3.11), (3.13) представляет собой определяющие уравнения среды, связывающие σ и $\mathbf{e}$ посредством тензорного параметра $\mathbf{h}$. Диссипация в такой модели, согласно (2.5), с точностью до членов двух порядков по $\mathbf{h}$ примет вид (изотермический случай)

$$TP_s = \left(b_1 - \frac{b_2^2}{b_3}\right) e_{\alpha\beta}^2 + \frac{4\mu^2}{b_3} h_{\alpha\beta}^2 + \tag{3.14}$$
$$+ 4\mu \frac{\lambda_1 b_3 - 2\mu b_{31}}{b_3^2} h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} + 2\left(b_{11} - 2b_{21}\frac{b_2}{b_3} + b_{31}\frac{b_2^2}{b_3^2}\right) h_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} e_{\gamma\alpha}$$

Члены с коэффициентами b_{12}, b_{22}, b_{32} в рассматриваемом несжимаемом случае в выражение для диссипации не входят.

Параметр $\mathbf{h}$ с той же квадратичной точностью, что и прежде, можно исключить из уравнений (3.11), (3.13) и написать уравнение связи между σ и $\mathbf{e}$ в явном виде

$$\theta_1 \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{ij} + s_{ij} + c_1 \{\mathrm{ss}\}_{ij} + c_2 \{\mathrm{se}\}_{ij} + c_3 s_{\alpha\beta}^2 \delta_{ij} + c_4 s_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \delta_{ij} +$$
$$+ c_5 \{\mathrm{ee}\}_{ij} + c_6 e_{\alpha\beta}^2 \delta_{ij} + c_7 \left\{s \frac{\Delta e}{\Delta t}\right\}_{ij} + c_8 s_{\alpha\beta} \left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)_{\alpha\beta} \delta_{ij} = 2\eta \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) e_{ij} \tag{3.15}$$
$$s_{ij} = \sigma_{ij} - 2\eta \frac{\theta_2}{\theta_1} e_{ij}$$

Коэффициенты θ_1, θ_2, η, c_k выражаются через девять первоначальных коэффициентов μ, λ_1, b_1, b_2, b_3, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{31}. В частном случае, если обращаются в нуль коэффициенты при двух последних членах в (3.13), то $c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$ и семь коэффициентов в (3.15) выражаются через семь исходных коэффициентов.

Интересно сравнить уравнения (3.15) с уравнениями восьмиконстантной модели Олдройда [17]. Уравнения (3.15) обладают рядом очевидных различий с уравнениями из [17], например, в (3.15) имеются члены нелинейные по напряжениям и члены с произведениями напряжений на ускорения. Кроме того, несмотря на большой произвол в выборе констант, уравнения (3.15) на самом деле не содержат многих частных случаев, допускаемых уравнениями Олдройда. Так, в силу имеющихся связей между коэффициентами c_k и b_{kl} невозможно получить из (3.15) уравнений введенных Олдройдом «ковариантной» и «контравариантной» моделей [10].

Изложение здесь ведется в предположении изотермичности. Если в среде имеется неравномерное распределение температуры T, то это приведет к возникновению теплового потока q_i:

$$q_i = -(\varkappa_0 \delta_{i\alpha} + \varkappa_1 h_{i\alpha}) \nabla_\alpha T \tag{3.16}$$

В (3.16) в линейном приближении учтена зависимость коэффициента теплопроводности $\varkappa$ от обратимой деформации h. Влияние деформации приводит к деформационной анизотропии процесса теплопроводности даже в среде с изотропной структурой. Интересно, что такое положение должно касаться не только твердых тел, но и упругих жидкостей. Аналогично и для процесса диффузии.

Остановимся теперь на некоторых частных случаях допускаемых модельными уравнениями (3.11), (3.13).

В случае линейной связи между «упругими напряжениями» и обратимой деформацией ($\lambda_1 = 0$), если дополнительно положить $b_{12} = -{}^2/_3\, b_{11}$, получатся уравнения того же типа, что и в [18]. Согласно работе [18], такими уравнениями описывается течение слабоконцентрированных взвесей малодеформируемых упругих частиц в вязкой жидкости [1]. Уравнения в том же виде, что и в [18], нетрудно получить непосредственно из (3.1), (3.4) и (3.9)

$$\left(\frac{\Delta \mathbf{h}}{\Delta t}\right)_{ij} + \frac{2\mu}{b_3} h_{ij} = \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) e_{ij} + \frac{b_{21} + b_{31}}{b_3} \{\mathbf{he}\}_{ij} - b_{31} \left\{\mathbf{h} \frac{\Delta \mathbf{h}}{\Delta t}\right\}_{ij} \tag{3.17}$$

$$\sigma_{ij} = (b_1 + 2b_2 + b_3)\, e_{ij} - (b_2 + b_3) \left(\frac{\Delta \mathbf{h}}{\Delta t}\right)_{ij} +$$

$$+ (b_{11} + 2b_{21} + b_{31}) \{\mathbf{he}\}_{ij} - (b_{21} + b_{31}) \left\{\mathbf{h} \frac{\Delta \mathbf{h}}{\Delta t}\right\}_{ij}$$

Поскольку как здесь, так и в [18], эти уравнения получены приближенно, нет особого смысла сохранять их в форме (3.17) и можно приближенно разрешить первое уравнение относительно $\Delta \mathbf{h} / \Delta t$ и перейти к уравнениям в форме (3.11), (3.13). В уравнениях вида (3.15) в этом случае $c_3 = c_4 = c_6 = c_8 = 0$.

Если к предыдущим предположениям о коэффициентах ($\lambda_1 = 0$, $b_{12} = -{}^2/_3\, b_{11}$) добавить $b_{31}(b_2 + b_3) = b_3 b_{21} - b_2 b_{31} = (b_3 b_{11} - b_2 b_{21})$ $b_3 / b_2 = \pm {}^1/_3\, (1 + \varepsilon)\, b_3^2$, то тем самым придем к модельным уравнениям, подробно обсуждавшимся Бирдом с сотрудниками (например, [19,20]),

$$\theta_1 \left(\frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}\right)_{ij} \mp \theta_1 (1 + \varepsilon) \{\mathbf{se}\}_{ij} + s_{ij} = 2\eta \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) e_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - 2\eta \frac{\theta_2}{\theta_1} e_{ij} \tag{3.18}$$

Особенностью модели является то, что члены $\{\mathbf{se}\}$ исчезают в случае модели максвелловского типа ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e$), тогда как формальное равенство $\theta_2 = 0$ не влияет на эти члены (при $\theta_2 = 0$ уравнение (3.18) описывает лишь релаксацию напряжений, что обычно связывают с моделями максвелловского типа). Причина в том, что при $b_1 = b_2 = 0$ ($\theta_2 = 0$) в силу связей, наложенных ранее на коэффициенты, $b_{21} \neq 0$ и следовательно $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ij}^e$ за счет нелинейных членов. Другой особенностью является то, что в такой модели в одномерных сдвиговых установившихся течениях $\sigma_{\alpha\alpha} = 0$. От этого можно легко отойти, считая $b_{12} \neq -{}^2/_3\, b_{11}$, тогда в уравнении появятся шаровые члены вида

$$e_{\alpha\beta}^2 \delta_{ij}, \quad e_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta} \delta_{ij}, \quad s_{\alpha\beta} \; (\Delta \mathbf{e} / \Delta t)_{\alpha\beta}\, \delta_{ij}$$

Выражение для производства энтропии для модели с уравнениями (3.18) при $T = \mathrm{const}$ с точностью до членов двух порядков

$$TP_s = 2\eta \frac{\theta_2}{\theta_1} e_{\alpha\beta}^2 + \frac{\theta_1}{2\eta(\theta_1 - \theta_2)} s_{\alpha\beta}^2 \mp \frac{(1 + \varepsilon)\mu}{\eta^2 (\theta_1 - \theta_2)^2} s_{\alpha\beta} s_{\beta\gamma} s_{\gamma\alpha} \tag{3.19}$$

[1] Отметим, что конкретные численные значения для коэффициентов в уравнениях из работы [18] не согласуются с возможными значениями коэффициентов уравнений (3.17).

Рассмотрим другого типа частный случай, когда в уравнении (3.11) для $\mathbf{h}$ пропадают нелинейные члены с $\{\mathbf{hh}\}$ и $\{\mathbf{he}\}$, т. е. когда $b_{31} = b_3\lambda_1 / 4\mu$, $b_{21} = b_2\lambda_1 / 4\mu$ (в силу (3.12) это эквивалентно требованию $b_{22} = b_{32} = 0$). Уравнения модели примут вид

$$\left(\frac{\Delta \mathbf{h}}{\Delta t}\right)_{ij} + \frac{2\mu}{b_3} h_{ij} = \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) e_{ij} \tag{3.20}$$

$$\sigma_{ij} = \left(b_1 - \frac{b_2^2}{b_3}\right) e_{ij} + 2\mu h_{ij} + \lambda_1 \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) h_{i\alpha} h_{\alpha j} + \left(b_{11} - \frac{\lambda_1 b_2^2}{4\mu b_3}\right)(h_{i\alpha} e_{\alpha j} + e_{i\alpha} h_{\alpha j}) + b_{12} h_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

Диссипация в этом случае ($T = \mathrm{const}$)

$$TP_s = \left(b_1 - \frac{b_2^2}{b_3}\right) e_{\alpha\beta}^2 + \frac{4\mu^2}{b_3} h_{\alpha\beta}^2 + \frac{2\mu\lambda_1}{b_3} h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} + 2\left(b_{11} - \frac{\lambda_1 b_2^2}{4\mu b_3}\right) h_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} e_{\gamma\alpha} \tag{3.21}$$

При $b_{12} = 0$, $b_{11} = \lambda_1 b_2^2 / (4\mu b_3)$ уравнения (3.20) приводятся к уравнениям для e_{ij} и $s_{ij} = \sigma_{ij} - (b_1 - b_2^2 / b_3)\, e_{ij}$:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{ij} - \frac{\lambda_1}{2\mu}\left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right)^2 (s_{i\alpha} e_{\alpha j} + e_{i\alpha} s_{\alpha j}) + \frac{2\mu}{b_3} s_{ij} + \frac{\lambda_1}{2\mu b_3}\left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) s_{i\alpha} s_{\alpha j} = \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) e_{ij} \tag{3.22}$$

Модели максвелловского типа ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e$) здесь соответствует случай $b_2 = 0$, $s_{ij} = \sigma_{ij}$, т. е. описывается уравнениями такого же типа.

Используя понятие яуманновского интеграла (см. § 5) можно перейти от дифференциальной записи модельных уравнений к записи функциональной.

Так, уравнения (3.20) «разрешаются» следующим образом (для простоты положим $b_{12} = 0$, $b_{11} = \lambda_1 b_2^2 / (4\mu b_3)$):

$$h_{ij}(t) = \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) \int_{-\infty}^{t_*} [\mathrm{e}(t')]_{ij}$$

$$\sigma_{ij}(t) = \left(b_1 - \frac{b_2^2}{b_3}\right) e_{ij}(t) + 2\mu\left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) \int_{-\infty}^{t_*} [\mathrm{e}(t')]_{ij} + \lambda_1 \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right)^2 \int_{-\infty}^{t_*} [\mathrm{e}(t')]_{i\alpha} \int_{-\infty}^{t_*} [\mathrm{e}(t'')]_{\alpha j} \tag{3.23}$$

Для яуманновского интеграла здесь введено обозначение

$$\int_{-\infty}^{t_*} [\mathrm{e}(t')]_{ij} = \int_{-\infty}^{t} \varphi_{i\alpha}(t, t')\, e_{\alpha\beta}(t')\, \varphi_{\beta j}(t', t) \exp\left[-\frac{2\mu}{b_3}(t - t')\right] dt'$$

где φ — матрициант, который в случае декартовых координат удовлетворяет уравнению

$$d\varphi_{ij}(t, t') / dt = \omega_{i\alpha}(t)\, \varphi_{\alpha j}(t, t'), \qquad \varphi_{ij}(t', t') = \delta_{ij}$$

Модельные уравнения в форме (3.23) аналогичны используемым в литературе разложениям наследственных функционалов в функциональные ряды (см., например, [1]). Дополнительно к (3.23) нетрудно выписать при помощи (3.21) выражение диссипативного функционала.

Изложение до сих пор существенно опиралось на линейные по потокам и силам соотношения ТНП. Однако легко понять, что учет следующих членов, квадратичных по силам (потокам), не внесет дополнительных затруднений, а лишь увеличит произвол в коэффициентах. Новой чертой уравнений будет лишь то, что члены типа $\{\mathrm{ee}\}_{ij}$ войдут и в уравнение для h_{ij} (сравни, уравнение (3.11)). С другой стороны, одна «термодинамическая нелинейность» при линеаризованном кинематическом соотношении квадратичной внутренней энергии и постоянных кинетических коэффициентах может привести к набору моделей с уравнениями, аналогичными (3.11), (3.13).

В качестве примера рассмотрим случай, когда вся нелинейность обязана нарушению перекрестной симметрии между двумя явлениями (хотя соотношения Онзагера справедливы). Пусть уравнения (2.6), (2.8) теперь заменяются (3.24)

$$\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^e=b_1e_{ij}+b_2e_{ij}^p+d_1\{\mathbf{e}^p\mathbf{e}^p\}_{ij}+d_2e_{\alpha\beta}^{p2}\delta_{ij},\ \sigma_{ij}^e=2\mu h_{ij}=b_2e_{ij}+d_3\{\mathbf{ee}\}_{ij}+b_3e_{ij}^p$$

Положим для простоты $b_2 = 0$, в этом случае учет нелинейных членов особенно необходим. Удерживая лишь члены двух порядков, уравнение (3.24) при помощи $\mathbf{e}^p = \mathbf{e} - \Delta\mathbf{h} / \Delta t$ нетрудно преобразовать к виду

$$\left(\frac{\Delta\mathbf{h}}{\Delta t}\right)_{ij}+\frac{1}{\theta_1}h_{ij}=e_{ij}+\frac{d_3}{\mu\theta_1}\{\mathbf{ee}\}_{ij}$$
$$\sigma_{ij}=2\eta\frac{\theta_2}{\theta_1}e_{ij}+2\mu h_{ij}+\frac{2d_1}{\theta_1^2}\{\mathbf{hh}\}_{ij}+\frac{d_2}{\theta_1^2}h_{\alpha\beta}^2\delta_{ij}, \tag{3.25}$$

причем, в этом случае $\theta_1 - \theta_2 = \theta_1^2\, \mu / \eta$.

С той же точностью до двух порядков имеем для диссипации ($T = \mathrm{const}$)

$$TP_s=2\eta\frac{\theta_2}{\theta_1}e_{\alpha\beta}^2+\frac{2\mu}{\theta_1}h_{\alpha\beta}^2+\frac{2d_1}{\theta_1^2}h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}e_{\gamma\alpha}-\frac{2d_3}{\theta_1}e_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha}$$

В заключение параграфа оценим еще роль нелинейности кинематического соотношения. Когда можно ограничиться в кинематическом соотношении членами трех порядков, а остальные соотношения считать линейными, определяющие уравнения принимают вид

$$\left(\frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t}\right)_{ij}+\frac{2\mu}{b_3}s_{ij}+\frac{b_2-2b_3}{12\mu(b_2+b_3)}(s_{i\alpha}s_{\alpha\beta}e_{\beta j}-2s_{i\alpha}e_{\alpha\beta}s_{\beta j}+$$
$$+e_{i\alpha}s_{\alpha\beta}s_{\beta j})=\left(1+\frac{b_2}{b_3}\right)e_{ij},\qquad s_{ij}=\sigma_{ij}-\left(b_1-\frac{b_2^2}{b_3}\right)e_{ij} \tag{3.26}$$

Сопоставление предсказаний модели с полной кинематической нелинейностью и модели с «линеаризованным» кинематическим соотношением проведем далее на простом примере сдвигового течения. Среду считаем несжимаемой, а все остальные соотношения линейными (например, $\sigma_{ij}^e = 2\mu h_{ij}$).

Задача о стационарном сдвиговом течении со скоростью сдвига $\dot\gamma$ сводится при этом к решению матричных уравнений (см. (1.11)).

$$\frac{2}{\theta_1}\mathbf{h}-2\frac{b_2}{b_3}\mathbf{e}=\exp(-\mathbf{h})[\mathbf{e}-\boldsymbol{\omega}]\exp(\mathbf{h})+\exp(\mathbf{h})[\mathbf{e}+\boldsymbol{\omega}]\exp(-\mathbf{h})$$
$$\boldsymbol{\sigma}=2\eta\frac{\theta_2}{\theta_1}\mathbf{e}+2\mu\left(1+\frac{b_2}{b_3}\right)\mathbf{h} \tag{3.27}$$

В рассматриваемом случае матрицы $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{h}$ имеют вид

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}\dot\gamma\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\dot\gamma\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{h}=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{12}&-h_{11}\end{pmatrix}$$

Чтобы разрешить первое матричное уравнение относительно матрицы $\mathbf{h}$, произведем над ним такое преобразование подобия, чтобы матрица $\mathbf{h}$ привелась к диагональному виду

$$\mathbf{q}^{-1}\mathbf{hq}=\begin{pmatrix}a&0\\0&-a\end{pmatrix}$$

В рассматриваемом случае $h_{\alpha\alpha} = 0$, $h_{\alpha\beta}^2 = 2(h_{11}^2 + h_{12}^2) = 2a^2$, $h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha} = 0$. Вводя вместо h_{11}, h_{12} новые неизвестные a и φ, полагая $h_{11} = a\cos\varphi$, $h_{12} = a\sin\varphi$, нетрудно убедиться, что при этом матрица $\mathbf{q}$ есть ортогональная матрица поворота

$$q=\begin{pmatrix}\cos{}^1\!/_2\,\varphi&-\sin{}^1\!/_2\,\varphi\\\sin{}^1\!/_2\,\varphi&\cos{}^1\!/_2\,\varphi\end{pmatrix}$$

а матричное уравнение сводится к двум трансцендентным уравнениям

$$2a = \Gamma\,(1+k)\sin\varphi$$

$$\operatorname{sh} 2a = (\operatorname{ch} 2a + k)\cos\varphi \qquad (3.28)$$

Здесь $\Gamma = \theta_1\gamma^{\cdot}$ и $k = b_2 / b_3$ — безразмерные параметры. Параметр k выражается через размерные константы η, μ, θ_1, θ_2:

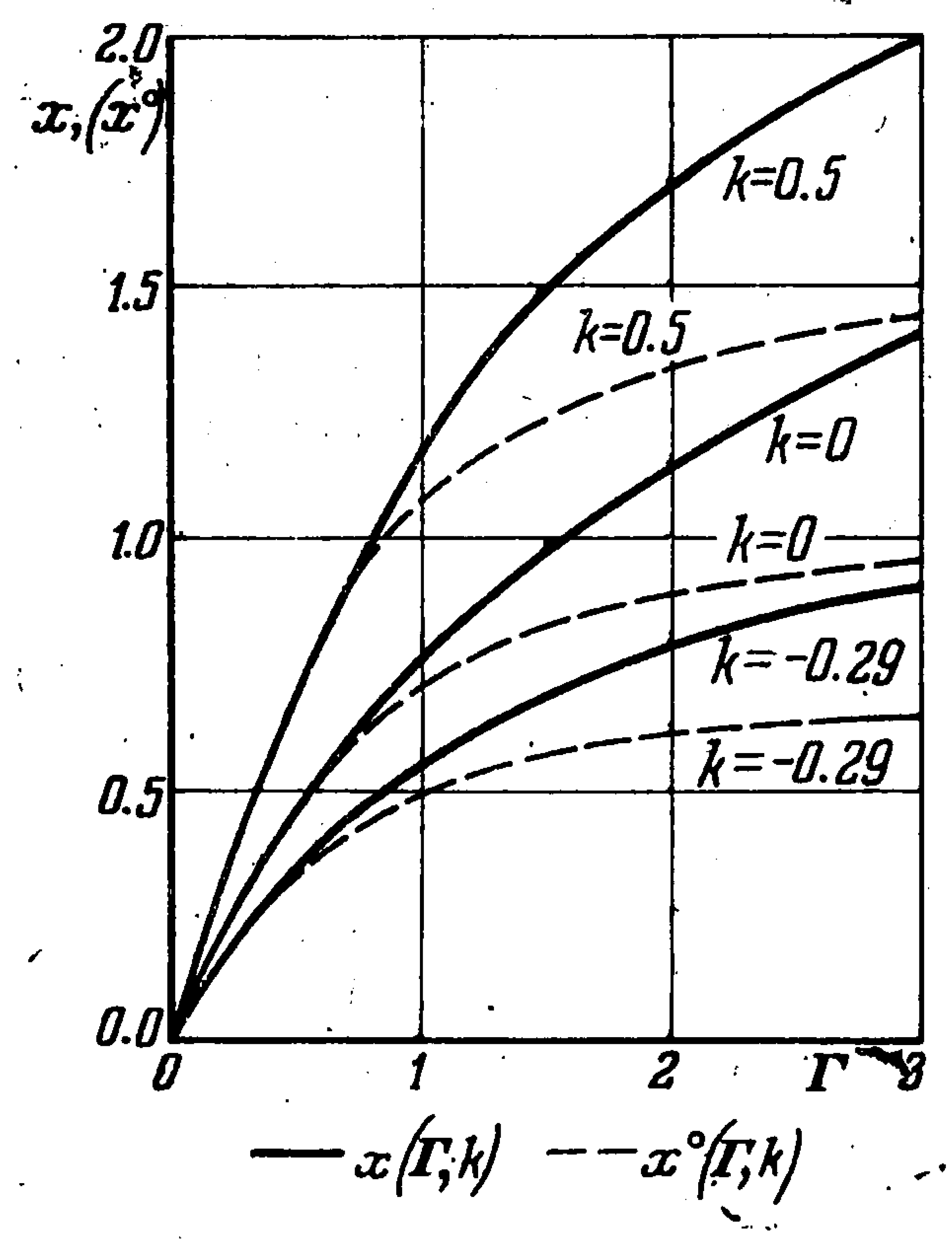
$$(1+k)^2 = \frac{\eta}{\mu\theta_1}\left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)$$

Компоненты тензоров упругих деформаций и напряжений через параметр a можно выразить следующим образом:

$$h_{11} = \frac{a \operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 2a + k}, \qquad h_{12} = \frac{2a^2}{\Gamma\,(1+k)}$$

$$\sigma_{11} = 2\mu\,(1+k)\,\frac{a \operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 2a + k}$$

$$s_{12} \equiv \sigma_{12} - \frac{\eta\theta_2}{\theta_1^2}\,\Gamma = 4\mu a^2\Gamma^{-1} \qquad (3.29)$$

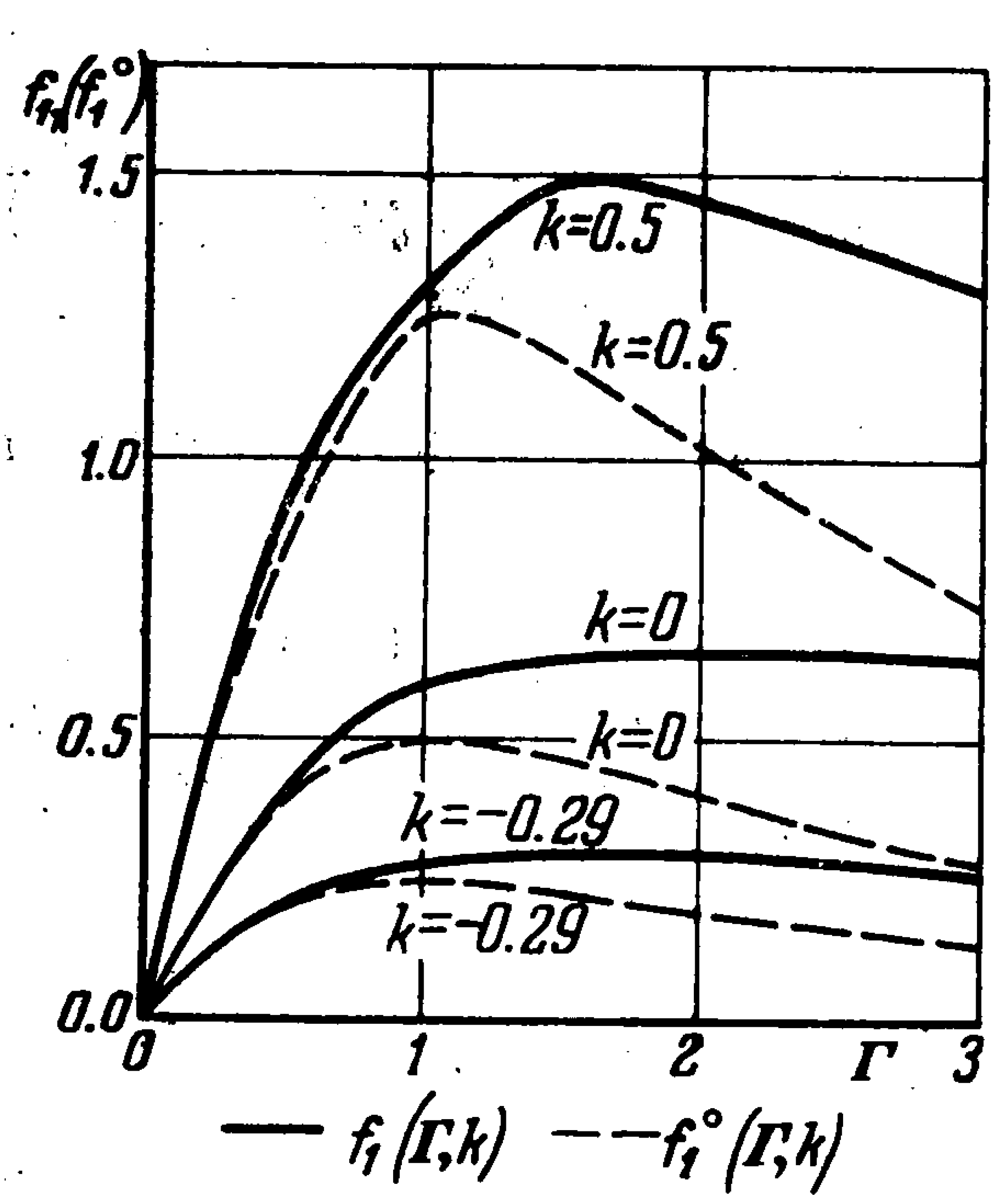


Фиг. 1

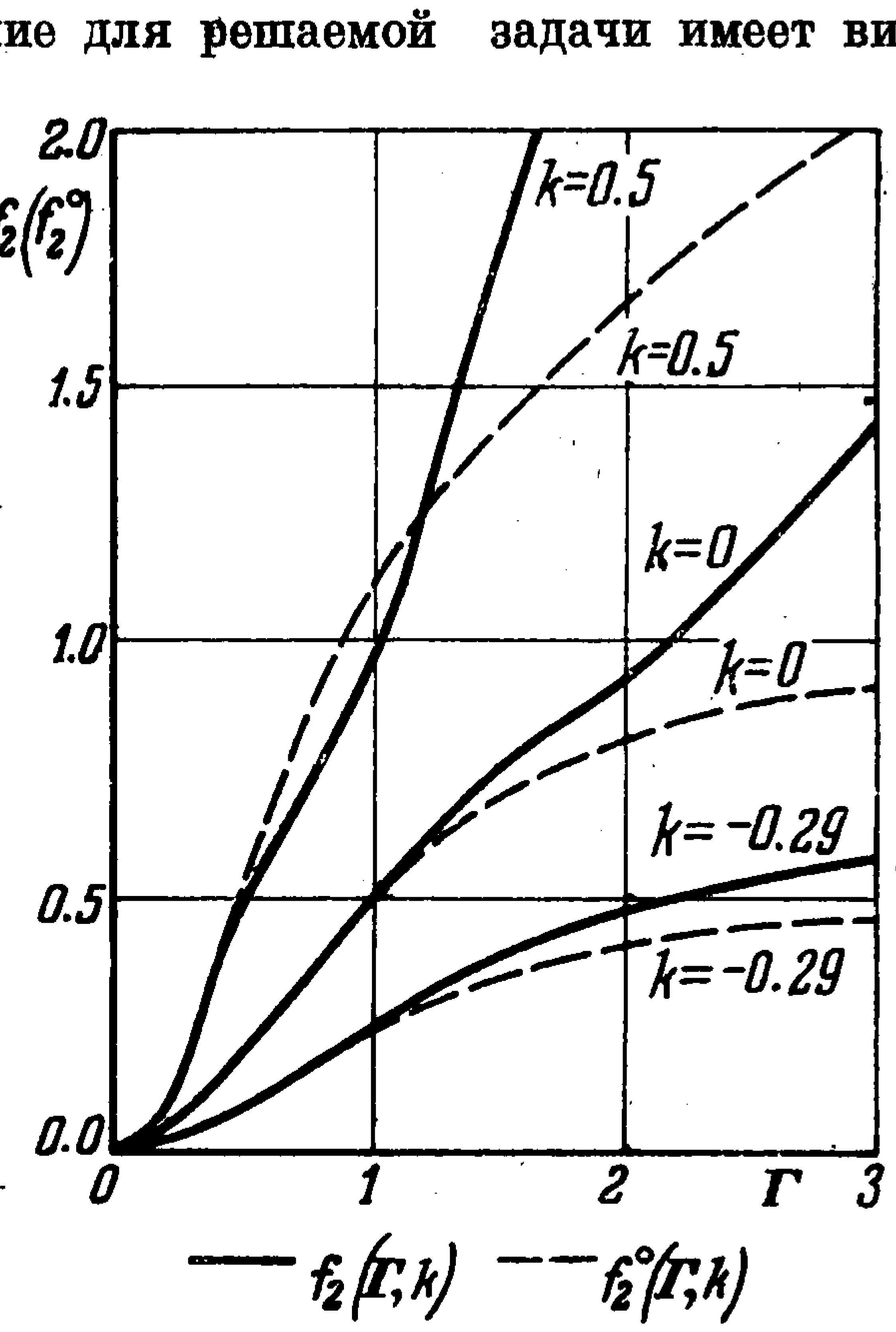
Зависимость же параметра a от Γ и k должна находиться из уравнений (3.28).

Линеаризованное кинематическое соотношение для решаемой задачи имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{h}^\circ - \mathbf{h}^\circ\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}^\circ / \theta_1 = (1+k)\,\mathbf{e}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

и в этом случае нетрудно выписать явное решение для a° и, следовательно, для σ°

$$a^\circ = \frac{(1+k)\,\Gamma}{2\sqrt{1+\Gamma^2}}, \qquad \sigma_{11}{}^\circ = \frac{\mu\,(1+k)^2\,\Gamma^2}{1+\Gamma^2}, \qquad s_{12}{}^\circ = \frac{\sigma_{11}{}^\circ}{\Gamma} \qquad (3.30)$$

Сравнение решений (3.29), (3.30) проведено графически. На фиг. 1—3 изображены зависимости безразмерных величин $x = 2a$, $f_1 = s_{12} / \mu$, $f_2 = \sigma_{11} / \mu$ и соответствующие величины x°, $f_1{}^\circ$, $f_2{}^\circ$ от параметра Γ при нескольких численных значениях параметра k. Из графиков видно, что бóльшим значениям параметра k соответствуют бо́льшие упругие деформации в жидкости (при одном Г), функции f_1 и f_1° имеют по одному максимуму каждая (чтобы при этом σ_{12}° (Г) была монотонна, необходимо $\theta_2 > \theta_1 / 9$), теория с линеаризованным кинематическим соотношением вплоть до $\Gamma \approx 1$ дает ошибку, не превышающую 10%, однако при больших значениях Г ошибка быстро растет.

§ 4. Модель со многими временами релаксации: вязко-упругие спектры. Рассмотрим элемент жидкости, который состоит из N субсистем. Упругая деформация k-й субсистемы описывается тензором $\mathrm{h}^{(k)}$, а скорость необратимой деформации — $\mathrm{e}^{p(k)}$. Предыдущее рассмотрение можно обобщить на этот более общий случай подобно тому, как это делается в линейной вязко-упругости [4,21]. В дальнейшем рассматривается достаточно простой случай. Внутреннюю энергию с точностью до кубических по h членов и линеаризованное кинематическое соотношение запишем

$$\rho_0 u = \rho_0 u_0 + \sum_k \mu_k \mathrm{h}^{(k)} \cdot\cdot \mathrm{h}^{(k)} + \sum_{k,\,l} \lambda_{kl} \mathrm{h}^{(k)} \cdot\cdot \mathrm{h}^{(k)} \cdot\cdot \mathrm{h}^{(l)} \tag{4.1}$$

$$\frac{\Delta \mathrm{h}^{(k)}}{\Delta t} + \mathrm{e}^{p(k)} = \mathrm{e}, \qquad \lambda_{kl} = \lambda_{lk}, \qquad \mathrm{h} \cdot\cdot \mathrm{h} = h_{i\alpha}^2 \tag{4.2}$$

Такие выражения можно получить из более общего случая приведением к нормальным координатам (см. [4,21]).

Выражение для производства энтропии (T = const) можно записать

$$TP_s = \left[\sigma - \sum_k \sigma^{e(k)}\right] \cdot\cdot \mathrm{e} + \sum_k \sigma^{e(k)} \cdot\cdot \mathrm{e}^{p(k)} \tag{4.3}$$

$$\sigma^{e(k)} = 2\mu_k \mathrm{h}^{(k)} + \sum_l \lambda_{kl} \left[2\mathrm{h}^{(k)}\mathrm{h}^{(l)} + \mathrm{h}^{(l)}\mathrm{h}^{(l)}\right] \tag{4.4}$$

В дальнейшем рассматривается простой случай модели максвелловского типа, когда

$$\sigma = \sum_k \sigma^{e\,(k)}, \qquad \mathrm{h}^{(k)} = \theta_k \mathrm{e}^{p\,(k)}, \qquad \theta_k > 0 \tag{4.5}$$

Уравнения (4.2), (4.5) можно разрешить относительно $\mathrm{h}^{(k)}$ при помощи яуманновского интегрирования (§ 5 и [22])

$$h_{ij}^{(k)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t}{}^{*} \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_k}\right) [\mathrm{e}(t')]_{ij}$$

и подставляя $\mathrm{h}^{(k)}$ в выражение для $\sigma^{e(k)}$, с учетом (4.5), получим

$$\sigma_{ij}(t) = 2\int\limits_{-\infty}^{t}{}^{*} \psi_0(t-t')[\mathrm{e}(t')]_{ij} + 2\int\limits_{-\infty}^{t}{}^{*}\int\limits_{-\infty}^{t}{}^{*} \psi_1(t-t',\, t-t'')\,[\mathrm{e}(t')]_{i\alpha}\,[\mathrm{e}(t'')]_{\alpha j} \tag{4.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\psi_0(t) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \exp\left(-\frac{t}{\theta_k}\right)$$

$$\psi_1(t, t'') = \sum_{k,l=1}^{N} \lambda_{kl}\left[\exp\left(-\frac{t'}{\theta_k} - \frac{t''}{\theta_l}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t'+t''}{\theta_k}\right)\right]$$

Чтобы перейти от дискретного к сплошному спектру времен релаксации, нужно лишь заменить суммирование интегрированием, а коэффициенты μ_k, λ_{lk} — на спектральные релаксационные функции $\mu(\theta)$, $\lambda(\theta_1, \theta_2) = \lambda(\theta_2, \theta_1)$.

Рассмотрим поведение такой модельной среды при простых типах течений.

Квазистационарный режим течения Куэтта при мгновенном включении скорости деформации. В этом случае

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\gamma^{\cdot} H(t)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\gamma^{\cdot} H(t)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Здесь $\gamma^{\cdot}$ — постоянная скорость сдвига, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, равная нулю при $t < 0$ и 1 при $t > 0$.

Матрицант $\varphi(t, t')$, который должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, t') = -\omega\varphi(t, t'), \qquad \varphi(t', t') = \mathrm{I}$$

легко находится и имеет вид

$$\varphi(t, t') = \begin{pmatrix}\cos{}^1/_2\gamma^{\cdot}(t-t') & -\sin{}^1/_2\gamma^{\cdot}(t-t') & 0\\ \sin{}^1/_2\gamma^{\cdot}(t-t') & \cos{}^1/_2\gamma^{\cdot}(t-t') & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

и представляет собой матрицу поворота на угол $^1/_2\,\gamma^{\cdot}(t - t')$.

Компоненты тензора напряжений (за вычетом давления) можно выразить следующим образом через спектральные функции:

$$\sigma_{12} = \int_0^\infty \mu(\theta)\frac{\theta\gamma^{\cdot}u(t, \theta)}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\,d\theta, \qquad \sigma_{22}-\sigma_{11} = -2\int_0^\infty \mu(\theta)\frac{\theta^2\gamma^{\cdot 2}v(t, \theta)}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\,d\theta \tag{4.7}$$

$$\sigma_{11} = \int_0^\infty \mu(\theta)\frac{\theta^2\gamma^{\cdot 2}v(t, \theta)}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\,d\theta + \frac{1}{4}\int_0^\infty \beta(\theta)\frac{\theta^2\gamma^{\cdot 2}[\theta^2\gamma^{\cdot 2}v^2(t, \theta)+u^2(t, \theta)]}{(1+\theta^2\gamma^{\cdot 2})^2}\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda(\theta_1, \theta_2)\frac{\theta_1\theta_2\gamma^{\cdot 2}[\theta_1\theta_2\gamma^{\cdot 2}v(t, \theta_1)\,v(t, \theta_2)+u(t, \theta_1)\,u(t, \theta_2)]}{(1+\theta_1^2\gamma^{\cdot 2})(1+\theta_2^2\gamma^{\cdot 2})}\,d\theta_1\,d\theta_2$$

Здесь введены обозначения

$$\beta(\theta) = \int_0^\infty \lambda(\theta, \tau)\,d\tau \tag{4.8}$$

$$u(t, \theta) = 1-\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)(\cos\gamma^{\cdot}t - \gamma^{\cdot}\theta\sin\gamma^{\cdot}t)$$

$$v(t, \theta) = 1-\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)\left(\cos\gamma^{\cdot}t + \frac{1}{\gamma^{\cdot}\theta}\sin\gamma^{\cdot}t\right)$$

Из (4.7) и (4.8) следует, что как нормальные, так и касательные напряжения имеют затухающие колебания при выходе на режим установившегося течения. Первый максимум касательного напряжения — наибольший и имеет значение

$$\max\sigma_{12} = \int_0^\infty \mu(\theta)\frac{\theta\gamma^{\cdot}}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\left[1+\exp\left(-\frac{\pi}{2\theta\gamma^{\cdot}}\right)\right]d\theta$$

Отметим, что, по-видимому, такого рода колебания наблюдались экспериментально в лаборатории реологии полимеров Ин-та нефтехимического синтеза АН СССР Г. В. Виноградовым и А. Я. Малкиным.

В пределе $t \to \infty$ формулы (4.7), (4.8) упрощаются

$$\sigma_{12}=\int_0^\infty f(\theta)\frac{\theta\gamma^{\cdot}}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\,d\theta,\quad \sigma_{11}-\sigma_{22}=2\int_0^\infty \mu(\theta)\frac{\theta^2\gamma^{\cdot 2}}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\,d\theta \tag{4.9}$$

$$\sigma_{11}=\int_0^\infty \mu(\theta)\frac{\theta^2\gamma^{\cdot 2}}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\,d\theta+\frac{1}{4}\int_0^\infty \beta(\theta)\frac{\theta^2\gamma^{\cdot 2}}{1+\theta^2\gamma^{\cdot 2}}\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda(\theta_1,\theta_2)\frac{\theta_1\theta_2\gamma^{\cdot 2}(1+\theta_1\theta_2\gamma^{\cdot 2})}{(1+\theta_1^2\gamma^{\cdot 2})(1+\theta_2^2\gamma^{\cdot 2})}\,d\theta_1\,d\theta_2$$

Зависимость эффективной вязкости $\eta^\circ(\gamma^{\cdot})=\sigma_{12}(\gamma^{\cdot})/\gamma^{\cdot}$ совпадает с динамической вязкостью $\eta'(\omega)$ (определенной в линейной теории вязко-упругости) при $\gamma^{\cdot}\to\omega$. Величины σ_{11} и σ_{22} в (4.9), не равны одна другой, и при малых $\gamma^{\cdot}$ квадратичны по $\gamma^{\cdot}\to 0$. Интересно отметить, что ангармонические члены не дают вклада в касательные напряжения в простых одномерных течениях рассматриваемой среды. Разность $^1/_2(\sigma_{11}-\sigma_{22})$ совпадает с действительной частью динамического модуля $G'(\omega)$ при $\gamma^{\cdot}\to\omega$. Совпадение η° и η', $^1/_2(\sigma_{11}-\sigma_{22})$ и G' неоднократно обсуждалось в реологической литературе (см., например, [19,20,23]).

Рассмотрим еще простой эксперимент, на основании которого можно оценить функции $\sigma_{11}(\gamma^{\cdot})$ и $\sigma_{22}(\gamma^{\cdot})$. Пусть упруго-вязкая жидкость движется стационарно в узком зазоре ротационного прибора конус — плоскость, обычно применяемом для реологических исследований. Тогда, как нетрудно показать для данного случая, распределение касательных и нормальных напряжений имеет вид (4.10)

$$p_{\varphi\varphi}=-p+\sigma_{11}(\gamma^{\cdot}),\quad p_{\theta\theta}=-p+\sigma_{22}(\gamma^{\cdot}),\quad p_{rr}=-p,\quad p_{\theta\varphi}=\sigma_{12}(\gamma^{\cdot}),\quad p_{r\varphi}=p_{r\theta}=0$$

Здесь величины $\sigma_{ij}(\gamma^{\cdot})$ определены в (4.9). Из уравнений равновесия имеем простое уравнение для распределения изотропного давления по радиусу прибора (здесь использовано то обстоятельство, что угловой зазор мал)

$$\frac{\partial p}{\partial r}\approx\frac{1}{r}(2p_{rr}-p_{\varphi\varphi}-p_{\theta\theta})=-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{r}$$

Интегрируя это уравнение с учетом, что при $r=R$ имеется свободная поверхность, на которой $p_{rr}=0$, получим

$$p=(\sigma_{11}+\sigma_{22})\ln(R/r) \tag{4.11}$$

Вычисляя осевое давление, согласно (4.10) и (4.11), находим

$$Q=2\pi\int_0^R p_{\theta\theta}r\,dr=-\frac{\pi}{2}R^2(\sigma_{11}-\sigma_{22}) \tag{4.12}$$

Результаты экспериментов, согласно [24], показывают, что $\sigma_{11}>\sigma_{22}$ и $\sigma_{11}\sim\sigma_{22}$. Последнее неравенство соответствует ограничению $\lambda(\theta_1,\theta_2)>0$ на бинарную релаксационую функцию λ.

Отметим еще одно любопытное обстоятельство. Результаты многих опытов по нормальным напряжениям (в том числе приведенные в [24]) убедительно показывают логарифмическое распределение давления по радиусу в приборе конус — плоскость. Тем самым (см. (4.11)) эти опыты показывают неприменимость для описания нормальных напряжений реологических моделей, у которых в простом сдвиговом течении двухмерный тензор σ_{ij} является девиатором (такая ситуация возникает, в частности, если пренебречь ангармоническими членами в (4.1)).

Рассмотрим теперь установившееся течение при простом растяжении пленки из упруго-вязкой жидкости.

Пусть имеется распределение скоростей в жидкой пленке (x — наравление движения, y — поперечная координата)

$$v_x = \gamma^{\cdot} x, \quad v_y = \gamma^{\cdot} y \quad (\gamma^{\cdot} = \text{const})$$

Тензор скоростей деформаций имеет вид

$$\mathbf{e} = \gamma^{\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Очевидно, что в этом случае тензор вихря $\omega = 0$, а матрицант $\varphi_{ij} = \delta_{ij}$. На основании (4.6) и (4.13) имеем

$$\sigma = 2\eta\mathbf{e} + 2\nu\mathbf{e}^2, \quad \eta = \int\limits_0^\infty \psi_0(t)\,dt, \quad \nu = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \psi_1(t', t'')\,dt'dt'' \tag{4.14}$$

Формула (4.14) показывает, что трутоновская вязкость, определенная по σ_{xx}, возрастает с возрастанием $\gamma^{\cdot}$, что также качественно соответствует эксперименту.

В силу очевидного приближенного характера полученных уравнений описание нормальных напряжений, неньютоновской вязкости и т. п. такими определяющими уравнениями, как в §§ 3,4, может претендовать лишь на качественное согласие с экспериментом, хотя и достаточно хорошее для некоторых материалов (например, растворов полимеров, см. [19, 20,23,24]).

Более того теория вязко-упругости, построенная в этом параграфе, основана на соотношениях (4.1) и (4.2), ограниченных достаточной малостью упругих деформации. Если характеризовать значение средней упругой деформации параметром $\Gamma = \langle\theta\rangle\, \gamma_0^{\cdot}$ где $\langle\theta\rangle$ — некоторое среднее по спектру время релаксации, а $\gamma_0^{\cdot}$ — характерная скорость сдвига, то область применимости построенной теории ограничена неравенством $\Gamma < 1$. Поскольку для расплавов и концентрированных растворов полимеров значения $\langle\theta\rangle$ могут быть достаточно велики, то фактически область применимости теории оказывается ограниченной значениями достаточно малых $\gamma^{\cdot}$. В вязко-упругих средах типа расплавов полимеров в явление аномалии вязкости, помимо отмеченной выше геометрической нелинейности, существенный вклад могут давать обратимые разрушения структуры — тиксотропия [25]. Учет тиксотропных эффектов в упруго-вязких средах может быть проведен в рамках формальной термодинамики необратимых процессов, следуя идеям работы [25], однако это выходит за рамки настоящей работы.

§ 5. **Приложение. О яуманновском интеграле.** Пусть x^k — произвольная фиксированная система координат, пусть $A_k{}^i$, $B_k{}^i$ — некоторые тензоры второго ранга со смешанными индексами, полученные из симметричных тензоров A_{ik}, B_{ik} операцией поднятия индекса. Пусть тензор $B_k{}^i$ задан. Рассмотрим уравнение относительно $A_k{}^i$:

$$\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_k^i = \frac{\partial A_k^i}{\partial t} + v^\alpha \nabla_\alpha A_k^i + \omega_\alpha^i A_k^\alpha - A_\alpha^i \omega_k^\alpha = B_k^i, \quad 2\omega_k^i = \nabla_k v^i - \nabla^i v_k \tag{5.1}$$

Здесь $\omega_k{}^i$ — тензор вихря, ∇_α — операция ковариантного дифференцирования. Найдем решение этого уравнения при заданном векторе скорости $v^i = v^i(x^k, t)$ и некотором начальном условии $A_k{}^i = C_k{}^i$ при $t = t_0$. Здесь $C_k{}^i(x^m)$ — некоторый не зависящий от времени t тензор.

Такая задача об обращении яуманновской производной (т. е. задача о построении яуманновского интеграла) была схематично рассмотрена в работе [22].

Здесь будет рассмотрено полное решение задачи (5.1) при помощи обобщения метода работы [22] и решение аналогичной задачи во вмороженной лагранжевой системе координат ξ^k. Рассмотрим решение задачи в фиксированной системе координат.

Вводя обозначения

$$\frac{d^*}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \omega^{*i}_{\cdot j} = \omega^{i}_{\cdot j} + v^\alpha \Gamma^i_{\alpha j}$$

где $\Gamma_{\alpha j}{}^{i}$ — символы Кристоффеля, а экстенсив $\omega^* = \| \omega^*{}_{ij} \|$ совпадает с ω лишь в декартовой системе координат (очевидно, что $d^*/\ dt$ — нетензорная производная по времени), запишем (5.1) в матричном виде

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{d^* \mathbf{A}}{dt} + \omega^* \mathbf{A} - \mathbf{A} \omega^* = \mathbf{B} \tag{5.2}$$

Рассмотрим решение вспомогательного матричного уравнения (5.3)

$$d^*/dt\ \varphi(t,\ t_0;\ x^k) = -\ \omega^*(t,\ x^k)\ \varphi(t,\ t_0;\ x^k), \varphi(t_0,\ t_0;\ x^k) = \| \varphi_{i\cdot}^{\cdot j}(t_0,\ t_0;\ x^k) \| = \mathbf{I} = \| \delta_{i\cdot}^{\cdot j} \|$$

Введем, следуя работе [10], «функции смещения» $x'^k(x^i,\ t,\ t')$, описывающие положение точки континуума с фиксированной лагранжевой координатой ξ^k в момент t' при условии, что в момент t точка занимала положение x^k. Очевидно, что функции смещения суть решение задачи Коши [10]

$$\frac{\partial x'^k}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad x'^k(x^i,\ t,\ t')|_{t'=t} = x^k \tag{5.4}$$

Из (5.4) нетрудно заметить, что

$$x''^k(x'^i,\ t',\ t'') = x''^k(x^i,\ t,\ t'')$$

Итерационное решение задачи (5.3) суть

$$\varphi(t,\ t_0;\ x^k) = I - \int_{t_0}^{t} \omega^*(t',\ x'^k)\ dt' + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'} \omega^*(t',\ x'^k)\ \omega^*(t'',\ x''^k)\ dt' dt'' + \ldots \tag{5.5}$$

Величину φ обычно называют матрицантом матричного дифференциального уравнения. Заметим, что, согласно (5.5), φ зависит от x^k только через ω^*, причем φ, вообще говоря, несимметричный функционал от ω^*. В дальнейшем в обозначении φ аргумент x^k или функциональный аргумент ω^* будем опускать.

Порядок переменных $t,\ t_0$ в обозначении матрицанта φ весьма существен, так как t обозначает текущее время, а t_0 — нижний предел интегрирования в (5.5), соответствующий некоторому началу отсчета. При помощи (5.5) легко доказываются свойства матрицанта

$$\varphi(t,\ t_0)\ \varphi(t_0,\ t_1) = \varphi(t,\ t_1), \qquad \varphi(t,\ t_0)\ \varphi(t_0,\ t) = \mathbf{I} \tag{5.6}$$

Из (5.3) и второго свойства (5.6) нетрудно вывести

$$d^*/dt\ \varphi(t_0,\ t) = \varphi(t_0,\ t)\ \omega^*, \qquad \varphi(t_0,\ t_0) = \mathbf{I} \tag{5.7}$$

Решение уравнения (5.2) при помощи φ можно записать в виде [22]

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \int_{t_0}^{t} \varphi(t,\ t';\ \omega^*)\ \mathbf{B}(t',\ \mathbf{x}')\ \varphi(t',\ t;\ \omega^*)\ dt' \equiv \mathbf{C} + \int_{t_0}^{t}{}^{*} [\mathbf{B}(t');\ \omega^*] \tag{5.8}$$

В частности

$$\operatorname{Sp} \mathbf{A} = \operatorname{Sp} \mathbf{C} + \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} \mathbf{B}(t',\ x')\ dt', \qquad \operatorname{Sp} \mathbf{A} \equiv A_k^k$$

Интересно отметить, что несмотря на нетензорный характер матрицанта φ, в силу тензорного характера яуманновской производной и правой части $\mathbf{B}$ в (5.2), искомая величина $\mathbf{A}$ в (5.8) имеет тензорный характер.

Нетрудно показать, что для интеграла (5.8) имеет место обычная формула интегрирования по частям со скалярной функцией $f(t)$:

$$\int_{t_0}^{t}{}^{*} \left[\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} f\right] = f\varphi \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \varphi^{-1}\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \left[\mathbf{A} \frac{df}{dt}\right] \tag{5.9}$$

Рассмотрим один пример. Пусть необходимо найти тензор σ (x^k, t) по известному тензору e из уравнения

$$\theta_1 \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} + \sigma = 2\eta\left(\theta_2 \frac{\Delta e}{\Delta t} + e\right) \equiv B, \quad \sigma \quad (x^k, t) \underset{t\to -\infty}{\to} 0 \tag{5.10}$$

Из (5.10) имеем

$$\sigma = \frac{1}{\theta_1} \int\limits_{-\infty}^{t}{}^{*} \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_1}\right) [B(t')]$$

Подставляя в это выражение вместо тензора B его значение, согласно (5.10), и интегрируя с учетом обращения всех тензоров в нуль при $t \to -\infty$, получим

$$\sigma = 2\eta \frac{\theta_2}{\theta_1} e + 2\eta \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1^2} \int\limits_{-\infty}^{t}{}^{*} \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_1}\right) [e(t'); \omega^*]$$

Рассмотрим теперь определение яуманновской производной и яуманновского интеграла в конвективной вмороженной системе координат ξ^k. Пусть $a_{ij}(\xi^k, t)$ и $a^{ij}(\xi^k, t)$ — компоненты симметричного тензора A в системе ξ^k. Введем три конвективных производных

$$b_{ij}^{(1)} = \frac{Da_{ij}}{Dt}, \quad b^{(2)ij} = \frac{Da^{ij}}{Dt}, \quad b^{(3)i}{}_{\cdot j} = \frac{Da^{i}{}_{\cdot j}}{Dt}, \quad \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\xi^k}, \quad B^{(k)} = b_{ij}^{(k)} Э_1^i Э_1^j$$

Здесь $Э_{1i}$ — подвижный лагранжев базис в деформированном пространстве (§ 1). Тензоры $B^{(k)}$, вообще говоря, все различны, что связано с тем, что, вообще говоря, отличны от нуля

$$\frac{D}{Dt} g_{ik}^{(1)} = 2e_{ik}, \quad \frac{D}{Dt} g^{(1)ik} = -2e^{ik} \tag{5.11}$$

Здесь e_{ik} — компоненты тензора скоростей деформаций в базисе $Э_1^i$ с фундаментальным тензором $g_{ik}^{(1)}$. Заметим еще, что тензоры $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ симметричны, тензор $B^{(3)}$ несимметричен.

Рассмотрим теперь симметричный тензор со смешанными компонентами

$$b_k^i = \frac{1}{2}(b^{(1)i}{}_k + b^{(2)i}{}_k) = \frac{1}{2}\left(g^{(1)i\alpha} \frac{Da_{\alpha k}}{Dt} + g_{k\alpha}^{(1)} \frac{Da^{\alpha i}}{Dt}\right) \tag{5.12}$$

В силу (5.11), можно представить (5.12) через компоненты тензора A с различным строением индексов

$$b_k^i = \frac{Da_k^i}{Dt} + a_k^\alpha e_\alpha^i - e_k^\alpha a_\alpha^i \equiv \frac{D'a_k^i}{Dt} \tag{5.13}$$

$$b^{ik} = \frac{Da^{ik}}{Dt} + a^{i\alpha} e_\alpha^k + e_\beta^i a^{\beta k} \equiv \frac{D'a^{ik}}{Dt}, \qquad b_{ik} = \frac{Da_{ik}}{Dt} - e_i^\alpha a_{\alpha k} - a_{i\alpha} e_k^\alpha \equiv \frac{D'a_{ik}}{Dt}$$

Формулы (5.12) и (5.13) определяют собой яуманновскую производную D'/Dt от симметричного тензора A в конвективном базисе $Э_1^i$. Совершенно аналогично можно было бы определить и яуманновскую производную от несимметричного тензора в базисе $Э_1^i$. Легко доказываются основные свойства яуманновской производной

$$\frac{D' g_{ik}^{(1)}}{Dt} = 0, \qquad g^{(1)i\alpha} \frac{D'a_{\alpha k}}{Dt} = \frac{D'a^{i}{}_{\cdot k}}{Dt}$$

Рассмотрим вопрос об обращении операции яуманновского дифференцирования в конвективной системе координат с базисом $Э_1^i$. Запишем первое равенство (5.13) в матричных (тензорных) обозначениях

$$\frac{D'\mathbf{a}}{Dt} \equiv \frac{D\mathbf{a}}{Dt} + \mathbf{ea} - \mathbf{ae} = \mathbf{b} \tag{5.14}$$

Найдем решение уравнения (5.14) — тензор a — обращающееся в нуль в момент времени t_0, полагая тензоры b и e известными.

Введем матрицант $\psi(t, t_0; \xi^k) = \| \psi^{i}{}_{\cdot j}(t, t_0; \xi^k) \|$, как решение задачи с начальными данными

$$D\psi / Dt = -\mathbf{e}\psi, \qquad \psi(t_0, t_0; \xi^k) = \mathbf{I} = \| \delta^{i}_{\cdot j} \| \tag{5.15}$$

Легко убедиться из (5.15), что ψ есть, вообще говоря, несимметричный тензор. Итерационное решение для ψ суть

$$\psi(t, t_0; \xi^k) = \mathbf{I} - \int_{t_0}^{t} \mathbf{e}(t', \xi^k)\, dt' + \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} \mathbf{e}(t', \xi^k)\, \mathbf{e}(t'', \xi^k)\, dt'' - \ldots \tag{5.16}$$

Далее, тензор-матрицант ψ обладает всеми свойствами обыкновенного матрицанта, поскольку матричное уравнение (5.15) есть система обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, для ψ выполняются свойства (5.6), причем уравнение для $\psi(t_0, t; \xi^k)$ суть

$$D / Dt\, \psi(t, t_0; \xi^k) = \psi(t_0, t; \xi^k)\, \mathbf{e}(t, \xi^k), \quad \psi(t_0, t_0; \xi^k) = \mathbf{I}$$

Из (5.16) следует, что ψ есть функционал от e и зависит от ξ^k только через e, по этому естественно писать $\psi(t, t_0; \mathbf{e})$. Как и выше легко получить решение (5.14) в виде

$$\mathbf{a} = \int_{t_0}^{t} \psi(t, t'; \mathbf{e})\, \mathbf{b}(\xi^k, t')\, \psi(t', t; \mathbf{e})\, dt' \equiv \int_{t_0}^{t}{}^{*} [\mathbf{b}(t'); \mathbf{e}] \tag{5.17}$$

Вместо тензора $\psi^{i}{}_{\cdot k}(t, t_0; e)$ можно было бы ввести другой тензор $\psi_{k}{}^{i}{}_{\cdot}(t, t_0; \mathbf{e})$ однако легко видеть, что

$$\psi_{k\cdot}^{\cdot i} = [\psi^{k}_{\cdot i}]^T$$

Здесь символ T означает транспонирование.

Аналогично тому как это было сделано выше, во вмороженной системе координат ξ^k нетрудно найти решение тензорного уравнения

$$D'\mathbf{a} / Dt + \lambda \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}\,|_{t=t_0} = 0$$

(b — заданный тензор, λ — постоянный скаляр). Решение этого уравнения будет

$$\mathbf{a} = \int_{t_0}^{t}{}^{*} \exp(-\lambda(t - t'))\, [\mathbf{b}(t'); \mathbf{e}]$$

Переходя в (5.17) от системы координат ξ^k к фиксированной системе координат x^k по правилам, установленным в [10], получим

$$A_k^i = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\, \psi^{m}_{\cdot\alpha}(t, t'; \mathbf{e})\, B^{\alpha}_{\beta}(t', x')\, \psi^{\beta}_{\cdot\gamma}(t', t, \mathbf{e})\, \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^k}\, dt' \tag{5.18}$$

Здесь $A_k{}^i$, $B_k{}^i$, $\psi^{i}{}_{\cdot k}$, $e_k{}^i$ — компоненты тензоров в фиксированной системе координат x^k, величины x'^k —функции смещения, определенные решением задачи (5.4).

Тензор-матрицант $\psi^{\beta}_{\cdot\alpha}(t, t_0, \mathbf{e})$ определяется выражением (5.19)

$$\psi^{i}_{\cdot j} = \delta^i_j - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\, e^{\alpha}_{\beta}(x', t')\, \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^j}\, dt' + \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\, e^{\alpha}_{\beta}(x', t')\, \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x''^{\gamma}}\, e^{\gamma}_{\nu}(x'', t'')\, \frac{\partial x''^{\nu}}{\partial x^j}\, dt'' - \ldots$$

Формулы (5.18), (5.19) совместно с (5.4) полностью определяют решение задачи (5.1) при C = 0, однако они значительно сложнее, чем формулы (5.5), (5.8), построенные на нетензорном матрицанте $\varphi(t, t_0, \omega^*)$. Однако во вмороженной системе координат предпочтительнее пользоваться весьма простыми формулами (5.16), (5.17). Очевидно, что между матрицантами $\psi_{j}{}^{i}(t, t_0; \mathbf{e})$ и $\varphi_{\cdot j}{}^{i}(t, t_0; \omega^*)$ существует некоторая связь, которая здесь осталась невыясненной.

Авторы благодарят Г. И. Баренблатта, В. М. Ентова, Р. Л. Салганика и других за обсуждение работы.

Поступила
6.VIII 1967

НИИ Механики Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Rivlin R. S. Viscoelastic fluids. Rev. frontier fluid dynamic. New York — London — Sydney. Interscience, 1965, pp. 144—170.
2. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. Физматгиз, 1962.
3. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. 1965, Усп. матем. н., т. 20, вып. 5.
4. Biot M. A. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. J. Appl. Phys., 1954, Vol. 25, No. 11.
5. Biot M. A. Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity. Phys. Rev., 1955, Vol. 97, No. 6.
6. Kluitenberg G. A. Thermodynamical theory of elasticity. Physica, 1962, deel 28, No. 3.
7. Kluitenberg G. A. A note of the thermodynamics of Maxwell bodies, Kelvin bodies (Voigt bodies) and fluids. Physica, 1962, deel 28, No. 6.
8. Kluitenberg G. A. On rheology and thermodynamics of irreversible processes. Physica, 1962, deel 28, No. 11.
9. Kluitenberg G. A. On the thermodynamics of viscosity and plasticity. Physica, 1963, deel 29, No. 6.
10. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, Vol. 200, No. 1063.
11. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М. Мир, 1966.
12. Де Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., Мир, 1964.
13. Хазанович Т. Н. Вывод уравнений линейной вязко-упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
14. Павлов В. П. Виноградов Г. В. Тепловые эффекты при течении и остановке аномально вязких тел. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 5.
15. Kluitenberg G. A. A unified thermodynamic theory for large deformations in elastic media and in Kelvin (Voigt) media, and for viscous fluid flow. Physica, 1964, deel 30, No. 10.
16. Олдройд Дж. Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. Сб. Реология, Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 757—793.
17. Oldroyd J. G. Non — newtonian effects in steady motion of some idealized elastico — viscous liquids. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1958, Vol. 245, No. 1241.
18. Goddard J. D., Miller Ch. Nonlinear effects in the rheology of dilute suspensions. J. Fluid Mech., 1967, Vol. 28, part 4.
19. Williams M. C., Bird R. B. Three — constant Oldroyd model for viscoelastic fluids. Phys. Fluids, 1962, Vol. 5, No. 9.
20. Spriggs T. W. A four — constant model for viscoelastic fluids. Chem. Eng. Sci., 1965, Vol. 20, No. 11.
21. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М., Мир, 1965.
22. Goddard J. D., Miller Ch. An inverse vor the Jaumann derivative and some applications to the rheology of viscoelastic fluids. Rheol. Acta, 1966, Bild. 5, Heft 3.
23. Padden F. J., De Witt T. W. Some rheological properties of concentrated polyisobutylene solutions. J. Appl. Phys., 1954, Vol. 25, No. 9.
24. Coleman B. D., Makrovitz H., Noll W. Viscometric flows of non — newtonian fluids. Theory and experiment. Springer. Berlin — Heidelberg — New York, 1966.
25. Леонов А. И. Теория тиксотропии упруго-вязких сред с непрерывным распределением времен релаксации. ПМТФ, 1964, № 4.