Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ВСЕ ПРОСТРАНСТВО

М. Р. Уховский, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Доказывается однозначная разрешимость в целом задачи Коши для уравнений Навье — Стокса и Эйлера в случае осесимметричных течений несжимаемой жидкости. Показано при этом, что при исчезании вязкости решения уравнений Навье — Стокса стремятся к решениям уравнений Эйлера. В общем трехмерном случае однозначная разрешимость доказана только в малом (для вязких течений — в [1,2], для невязких — в [3,4]). В плоском случае обе эти задачи решены в целом ([5,6] — вязкие течения, [7,8] — невязкие).

§ 1. Постановка задач. Априорные оценки. Рассмотрим задачу Коши для уравнений Навье — Стокса (задача А) и для уравнений Эйлера (задача Б) в случае несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство R^3:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}(x, t), \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{a}(x) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}(x, t), \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{a}(x) \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$, $P = P(x, t)$ — соответственно скорость и давление; $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка пространства R^3; $t \in [0, T]$ $(0 < T$ — любое число); $\mathbf{F}(x, t)$, $\mathbf{a}(x)$ — заданные векторы, соленоидальные в R^3; ν — положительная постоянная.

Вектор $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ называется осесимметричным, если $v_\theta = 0$, а v_r и v_z не зависят от θ; функция называется осесимметричной, если она не зависит от θ (r, θ, z — цилиндрические координаты).

Введем в рассмотрение следующие функциональные пространства:

$H_0(R^3)$, $H_1(R^3)$ — пополнения множества всех гладких финитных и соленоидальных в R^3 векторов по нормам скалярных произведений

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{H_0} = \int\limits_{R^3} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\,dx, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{H_1} = \int\limits_{R^3} \operatorname{rot}\mathbf{u}_1 \operatorname{rot}\mathbf{u}_2\,dx$$

$H_0'(Q_T)$, $H_1'(Q_T)$ — пополнения множества всех гладких в $Q_T = R^3 \times [0, T]$ финитных и соленоидальных в R^3 векторов по нормам скалярных произведений

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{H_0'} = \int\limits_0^T (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{H_0}\,dt, \qquad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{H_1'} = \int\limits_0^T (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{H_1}\,dt$$

$H_2(R^3)$, $H_3(R^3)$ — пополнения множества всех гладких осесимметричных в R^3 и финитных в полуплоскости, проходящей через ось

x_3, векторов по следующим нормам:

$$\|\mathbf{u}\|_{H_2} = \|\mathbf{u}\|_{H_0} + \|\mathbf{u}\|_{H_1} + \left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{u}}{r}\right\|_{L_2} + \left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{u}}{r}\right\|_{M}, \quad \|\mathbf{u}\|_{H_3} = \|\mathbf{u}\|_{H_2} + \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_M$$

$H_2'(Q_T)$, $H_3'(Q_T)$ — пополнения множества всех гладких в Q_T осесимметричных соленоидальных в R^3 и финитных в полуплоскости, проходящей через ось x_3, векторов по нормам

$$\|\mathbf{u}\|_{H_1'} = \int_0^T \|\mathbf{u}\|_{H_2} dt, \qquad \|\mathbf{u}\|_{H_3'} = \int_0^T \|\mathbf{u}\|_{H_3} dt$$

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи (1.1) в цилиндре Q_T назовем вектор $\mathbf{v}(x, t) \in H_1'(Q_T)$, имеющий конечные

$$\max \|\mathbf{v}(x, t)\|_{H_0(R^3)}, \qquad \max \|\mathbf{v}(x, t)\|_{L_p(R^3)} \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

при некотором p $(3 < p \leqslant 6)$ и удовлетворяющий интегральному тождеству $(\nabla\varphi \equiv (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2, \nabla\varphi_3))$:

$$-\int_{R^3} \mathbf{a}(x)\,\varphi(x, 0)\,dx + \int_0^T \int_{R^3} [-\mathbf{v}\varphi_t + \nu\nabla\mathbf{v}\nabla\varphi + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}\varphi - \mathbf{F}\varphi]\,dx dt = 0 \quad (1.3)$$

при любом гладком в Q_T финитном и соленоидальном в R^3 векторе $\varphi(x, t)$, для которого $\varphi(x, T) = 0$.

Определение 1.2. Обобщенным решением задачи (1.2) в цилиндре Q_T назовем вектор $\mathbf{v}(x, t) \in H_1'(Q_T)$, имеющий конечные

$$\max \|\mathbf{v}(x, t)\|_{H_0(R^3)}, \qquad \max \|\operatorname{rot}\mathbf{v}(x, t)\|_{M(R^3)} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

и удовлетворяющий интегральному тождеству

$$-\int_{R^3} \mathbf{a}(x)\,\varphi(x, 0)\,dx + \int_0^T \int_{R^3} [-\mathbf{v}\varphi_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}\varphi - \mathbf{F}\varphi]\,dx\,dt = 0 \quad (1.4)$$

при любом гладком в Q_T финитном и соленоидальном в R^3 векторе $\varphi(x, t)$, для которого $\varphi(x, T) = 0$.

Векторы $\mathbf{a}(x)$ и $\mathbf{F}(x, t)$ предполагаются лишь такими, чтобы соответствующие интегралы в (1.3), (1.4) имели смысл, например,— обобщенными вектор-функциями, сосредоточенными на некоторых поверхностях или кривых.

Обычным образом проверяется, что классические решения задач (1.1), (1.2) будут обобщенными решениями в смысле данных определений и, наоборот, обобщенные решения, имеющие все непрерывные производные, входящие в (1.1), (1.2), являются классическими решениями этих задач.

Приведем априорные оценки гладких осесимметричных достаточно быстро убывающих на бесконечности решений задач А и Б. Уравнение энергии приводит, как известно, к следующей оценке (осесимметричность здесь предполагать не нужно).

Лемма 1.1. Для решения задачи А и Б имеет место оценка

$$\|\mathbf{v}(x, t)\|_{L_2(R^3)} \leqslant \|\mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau \tag{1.5}$$

Для получения дальнейших оценок перейдем к уравнениям для вихря задач А и Б

$$\omega_t - \nu\Delta\omega + (\mathbf{v}, \nabla)\,\omega - (\omega, \nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{1.6}$$

$$\omega_t + (\mathbf{v}, \nabla)\,\omega - (\omega, \nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{f} \qquad (\omega = \operatorname{rot}\mathbf{v},\ \mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{F}) \tag{1.7}$$

В осесимметричном случае уравнения (1.6), (1.7) запишутся в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2}\right) + v_r\frac{\partial\omega}{\partial r} + v_z\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{v_r}{r}\,\omega = f \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v_r\frac{\partial\omega}{\partial r} + v_z\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{v_r}{r}\,\omega = f \tag{1.9}$$

Ввиду осесимметричности

$$\omega_r = \omega_z = 0,\ \omega_\theta = \omega\,(r, z, t);\ f_r = f_z = 0,\ f_\theta = f\,(r, z, t)$$

Уравнение неразрывности в осесимметричном случае имеет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{1.10}$$

Лемма 1. 2. Для осесимметричного решения задачи А (Б) имеют место оценки ($1 < p$)

$$\left\|\frac{\omega(x, t)}{r}\right\|_{L_p(R^3)} \leqslant \left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{a}}{r}\right\|_{L_p(R^3)} + \int_0^t \left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, \tau)}{r}\right\|_{L_p(R^3)} d\tau \tag{1.11}$$

$$\left\|\frac{\omega(x, t)}{r}\right\|_{M(R^3)} \leqslant \left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{a}}{r}\right\|_{M(R^3)} + \int_0^t \left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, \tau)}{r}\right\|_{M(R^3)} d\tau \tag{1.12}$$

$$\nu\int_0^t\int_{R^3}\left(\nabla\left|\frac{\omega}{r}\right|^{p/2}\right)^2 dx\,d\tau \leqslant \frac{p}{4(p-1)}\left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{a}}{r}\right\|^p_{L_p(R^3)} + \frac{p^2}{4(p-1)}\int_0^t\left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, \tau)}{r}\right\|_{L_p(R^3)} \times$$

$$\times\left(\left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{a}}{r}\right\|_{L_p(R^3)} + \int_0^\tau\left\|\frac{\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, \eta)}{r}\right\|_{L_p(R^3)} d\eta\right)^{p-1} d\tau \tag{1.13}$$

Доказательство. Умножая (1.8) на

$$\left|\frac{\omega}{r}\right|^{p-1}\operatorname{sign}\frac{\omega}{r}$$

и интегрируя по полуплоскости E, проходящей через ось x_3, получим (1.14)

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_E r\left|\frac{\omega}{r}\right|^p dr\,dz + \nu\frac{4(p-1)}{p^2}\int_E r\left(\nabla\left|\frac{\omega}{r}\right|^{1/2\,p}\right)^2 dr\,dz = \int_E f\left|\frac{\omega}{r}\right|^{p-1}\operatorname{sign}\frac{\omega}{r}\,dr\,dz$$

Применяя к правой части (1.14) неравенство Гельдера, найдем

$$Z_p^{p-1}\frac{d}{dt}Z_p \leqslant \left\|\frac{f}{r}\right\|_{Lp(E)} Z_p^{p-1}, \qquad Z_p(t) \equiv \int_E r\left|\frac{\omega}{r}\right|^p dr\,dz \tag{1.15}$$

Из (1.15), интегрируя по t, получим (1.11). Устремляя p в (1.11) к бесконечности, получим (1.12); неравенство (1.13) следует непосредственно из (1.14) и (1.11). Лемма доказана.

Лемма 1.3. Для осесимметричного решения задачи А (Б) имеет место оценка

$$\|\omega(x,t)\|_{L_2(R^3)} \leqslant \|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,\tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau + \int_0^t B(\tau)\, d\tau \qquad (1.16)$$

$$B(t) = \left(\|\mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\mathbf{F}(x,\tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau\right)\left(\left\|\frac{\operatorname{rot} \mathbf{a}}{r}\right\|_{M(R^3)} + \int_0^t \left\|\frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,\tau)}{r}\right\|_{M(R^3)} d\tau\right) \qquad (1.17)$$

Доказательство. Умножая (1.8) на $r\omega$ и интегрируя, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_E r\omega^2\, dr\, dz + \nu \int_E r\left[(\nabla\omega)^2 + \left(\frac{\omega}{r}\right)^2\right] dr\, dz = \int_E v_r \omega^2\, dr\, dz + \int_E r f \omega\, dr\, dz$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_E r\omega^2\, dr\, dz \leqslant \int_E \frac{\omega}{r} r v_r \omega\, dr\, dz + \int_E (r^{1/2} f)(r^{1/2}\omega)\, dr\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \left[\max_{x \in R^3}\left|\frac{\omega}{r}\right| \left(\int_E r v_r^2\, dr\, dz\right)^{1/2} + \left(\int_E r f^2\, dr\, dz\right)^{1/2}\right]\left(\int_E r\omega^2\, dr\, dz\right)^{1/2} \qquad (1.18)$$

Интегрируя (1.18) по t от 0 до t и учитывая (1.5), (1.13), получим (1.16), (1.17). Лемма доказана.

Лемма 1.4. Для осесимметричного решения задачи А (Б) имеет место оценка (C — абсолютная постоянная)

$$\|\omega(x,t)\|_{L_4(R^3)} \leqslant \|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{L_4(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,\tau)\|_{L_4(R^3)} d\tau + \int_0^t B_1(\tau)\, d\tau \quad (1.19)$$

$$B_1(t) = C\left(\left\|\frac{\operatorname{rot} \mathbf{a}}{r}\right\|_{M(R^3)} + \int_0^t \left\|\frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,\tau)}{r}\right\|_{M(R^3)} d\tau\right)\left[\left(\|\mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\mathbf{F}(x,\tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau\right) \times\right.$$

$$\left.\times\left(\|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,\tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau + \int_0^t B(\tau)\, d\tau\right)^3\right]^{1/4} \qquad (1.20)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.3; при этом (1.8) умножается на $r\omega^3$ и используются предыдущие оценки и оценка вложения $H_0(R^3) \cap H_1(R^3)$ в $L_4(R^3)$ (см., например, [9]).

Лемма 1.5. Для любой функции $\varphi(x)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{L_p(R^3)} \leqslant \frac{s}{p}\|\varphi\|_{L_s(R^3)} + \frac{p-s}{p}\|\varphi\|_{M(R^3)} \quad (2 \leqslant s \leqslant p < \infty) \qquad (1.21)$$

Доказательство. Неравенство (1.21) следует из еще более очевидного неравенства

$$\|\varphi\|_p^p \leqslant \|\varphi\|_M^\alpha \|\varphi\|_{p-\alpha}^{p-\alpha}$$

если положить в нем $\alpha_{p'} = p - s$ и применить затем неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \qquad \left(a,\ b \geqslant 0,\ p > 1,\ p' = \frac{p}{p-1}\right)$$

Лемма 1.6. Для любого соленоидального в R^3 вектора $\mathbf{u}(x)$, достаточно быстро убывающего на бесконечности, имеет место оценка $(1 < p)$

$$\|D_x \mathbf{u}\|_{L_p(R^3)} \leqslant Cp\|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{L_p(R^3)} \qquad (1.22)$$

Здесь C — постоянная, не зависящая от $\mathbf{u}$ и p.

Доказательство. Как известно [10], для соленоидального в R^3 вектора $\mathbf{u}$ справедливо представление

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{B}, \qquad \Delta \mathbf{B} = -\operatorname{rot} \mathbf{u}, \qquad \mathbf{B}_{\infty} = 0$$

из которого (1.22) следует на основании оценки решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, полученной в [11].

Лемма 1.7. Для осесимметричного решения задачи А (Б) имеют место оценки ($2 \leqslant p$, C_1, C_2 — абсолютные постоянные)

$$\|\mathbf{v}(x, t)\|_{M(R^3)} \leqslant C_1 \Big(\|\mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau + \|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{L_4(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_4(R^3)} d\tau + \int_0^t B_1(\tau)\, d\tau \Big) \tag{1.23}$$

$$\|\mathbf{v}(x, t)\|_{L_p(R^3)} \leqslant C_2 \Big(\|\mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau + \|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{L_4(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_4(R^3)} d\tau + \int_0^t B_1(\tau)\, d\tau \Big) \tag{1.24}$$

Доказательство. Оценка (1.23) следует по вложению [12] из (1.5), (1.19) на основании леммы 1.6; оценка (1.24) следует из (1.5), (1.23) на основании леммы 1.5.

Лемма 1.8. Для осесимметричного решения задачи А (Б) имеют место оценки ($2 \leqslant p$, C_1, C_2 — абсолютные постоянные)

$$\|\omega(x, t)\|_{L_p(R^3)} \leqslant C_1 \Big(\|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{L_p(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_p(R^3)} d\tau + \int_0^t B_2(\tau)\, d\tau \Big) \tag{1.25}$$

$$\|\omega(x, t)\|_{M(R^3)} \leqslant C_2 \Big(\|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{M(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, \tau)\|_{M(R^3)} d\tau + \int_0^t B_2(\tau)\, d\tau \Big) \tag{1.26}$$

$$B_2(t) = \Big(\Big\|\frac{\operatorname{rot} \mathbf{a}}{r}\Big\|_{M(R^3)} + \int_0^t \Big\|\frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, \tau)}{r}\Big\|_{M(R^3)} d\tau \Big) \Big(\|\mathbf{a}\|_{L_2(R^3)} + \int_0^t \|\mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_2(R^3)} d\tau + \|\operatorname{rot} \mathbf{a}\|_{L_4(R^3)} + \int_0^t \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, \tau)\|_{L_4(R^3)} d\tau + \int_0^t B_1(\tau)\, d\tau \Big) \tag{1.27}$$

Доказательство оценки (1.25) проводится аналогично доказательству леммы 1.3; при этом (1.8) умножается на $r|\omega|^{p-1} \operatorname{sign} \omega$ и используется оценка (1.24). Оценка (1.26) получается из (1.25) предельным переходом по $p \to \infty$. Лемма доказана.

§ 2. **Теоремы единственности.** *Лемма 2.1.* Обобщенное решение задачи А (Б) при любом $t_1 \in [0, T]$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{R^3} \mathbf{v}(x, t_1)\, \varphi(x, t_1)\, dx - \int_{R^3} \mathbf{a}(x)\, \varphi(x, 0)\, dx + \int_0^{t_1} \int_{R^3} [-\mathbf{v}\varphi_t + \nu \nabla \mathbf{v} \nabla \varphi + (\mathbf{v}, \nabla)\, \mathbf{v}\varphi - \mathbf{F}\varphi]\, dx\, d\tau = 0 \tag{2.1}$$

при любых $\varphi(x, t)$, указанных в определении обобщенного решения задачи А (Б).

Доказательство проводится так же, как в случае плоскопараллельных течений идеальной жидкости [8].

Теорема 2.1. Существует не более одного обобщенного решения задачи А.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}(x, t)$, $\mathbf{v}_1(x, t)$ — два решения задачи А и $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$. Запишем тождество (2.1) для $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$, вычтем и положим $\varphi = A_n^2 \mathbf{u}$, определив оператор A_n соотношением

$$A_n \mathbf{u} = \int_{Q_{t_1}} \omega_{h_n}(x - y, t - \tau)\, \mathbf{u}(y, \tau)\, dy\, d\tau$$

где $\omega_{h_n}(x - y, t - \tau)$ — ядро усреднения [13], $Q_{t_1} = R^3 \times [0, t_1]$ и $h_n \to 0$. Переходя к пределу по $n \to \infty$, придем к тождеству

$$\frac{1}{2} \| \mathbf{u}(x, t) \|^2_{H_0(R^3)} + \nu \int_0^{t_1} \| \mathbf{u}(x, \tau) \|^2_{H_1(R^3)} d\tau = \int_0^{t_1} \int_{R^3} (\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u})\, \mathbf{v}\, dx\, d\tau \tag{2.2}$$

Законность предельного перехода следует из того, что $A_n^2 \mathbf{u}$ сходится к $\mathbf{u}$ в $L_{6,2}(Q_{t_1})$ (определение пространств $L_{p,r}$, см. например, в [8]), $\nabla A_n^2 \mathbf{u}$ сходится к $\nabla \mathbf{u}$ в $L_2(Q_{t_1})$, $A_n^2 \mathbf{u}(x, t)$ и $A_n \mathbf{u}(x, t)$ сходятся к $\mathbf{u}(x, t)$ в $L_2(R^3)$.

Оценивая правую часть (2.2) по неравенству Гельдера и учитывая оценки вложения, получим ($2 < p < 6$, $p^{-1} + q^{-1} = 1/2$; C — абсолютная постоянная)

$$\frac{1}{2} \| \mathbf{u} \|^2_{H_0} + \nu \int_0^{t_1} \| \mathbf{u} \|^2_{H_1} d\tau \leqslant C \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| \mathbf{v} \|_q \int_0^{t_1} \| \mathbf{u} \|_{H_1}^{\frac{5p-6}{2p}} \| \mathbf{u} \|_{H_0}^{\frac{6-p}{2p}} d\tau \tag{2.3}$$

Применяя к интегральному выражению в правой части (2.3) неравенство Юнга с показателями

$$r = \frac{4p}{5p - 6}, \qquad s = \frac{4p}{6 - p}$$

будем иметь

$$\frac{1}{2} \| \mathbf{u} \|^2_{H_0} + \nu \int_0^{t_1} \| \mathbf{u} \|^2_{H_1} d\tau \leqslant C_1 \varepsilon^r \int_0^{t_1} \| \mathbf{u} \|^2_{H_1} d\tau + C_2 \varepsilon^{-s} \int_0^{t_1} \| \mathbf{u} \|^2_{H_0} d\tau \tag{2.4}$$

постоянные C_1, C_2 не зависят от u, ε, t_1. Выбирая ε таким, чтобы $C_1 \varepsilon^r < \nu$, из (2.4) получим (постоянная C не зависит от $\mathbf{u}$ и t)

$$\| \mathbf{u} \|^2_{H_0} \leqslant C \int_0^{t_1} \| \mathbf{u} \|^2_{H_0} d\tau$$

Отсюда следует, что $\mathbf{u} \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Существует не более одного обобщенного решения задачи Б.

Доказательство. Поступаем, как и в теореме 2.1. Обозначая $Z(t) = \| \mathbf{u} \|_{H_0(R^3)}$, получим

$$Z \frac{dZ}{dt} = - \int_{R^3} (\mathbf{u}, \nabla)\, \mathbf{v} \mathbf{u}\, dx \tag{2.5}$$

Из определения 1.2, лемм 1.5 и 1.6 и теоремы вложения [12] следует, что вектор $\mathbf{u}$ ограничен в $Q_T : |\mathbf{u}(x, t)| \leqslant M$. Из (2.5), применяя неравенство Гельдера и леммы 1.5 и 1.6, получим (C — абсолютная постоянная)

$$Z \frac{dZ}{dt} \leqslant C M^{\varepsilon} \int_{R^3} | \mathbf{u} |^{2-\varepsilon} | \nabla \mathbf{v} |\, dx \leqslant C M^{\varepsilon} \| \nabla \mathbf{v} \|_{2/\varepsilon} Z^{2-\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant C M^{\varepsilon} \frac{2}{\varepsilon} \| \operatorname{rot} \mathbf{v} \|_{2/\varepsilon} Z^{2-\varepsilon} \leqslant C M^{\varepsilon} \frac{2}{\varepsilon} (\| \operatorname{rot} \mathbf{v} \|_2 + \| \operatorname{rot} \mathbf{v} \|_M) Z^{2-\varepsilon}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\| \operatorname{rot} \mathbf{v} \|_2 + \| \operatorname{rot} \mathbf{v} \|_M \leqslant M_1 \text{ при } t \in [0, T]$$

интегрируя по, t, находим

$$Z(t) \leqslant M(2CM_1 t)^{1/\varepsilon} \tag{2.6}$$

Устремляя ε в (2.6) к нулю, получим, что $Z(t) = 0$ для $t \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 = (4CM_1)^{-1}$. Повторяя такие же рассуждения для сегментов $[\tau_0, 2\tau_0]$, $[2\tau_0, 3\tau_0]$ и т. д., покажем, что $z(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, значит, $\mathbf{u}(x, t) \equiv 0$ в Q_T^-. Теорема доказана.

§ 3. Существование решения задачи А. В этом параграфе доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть $\mathbf{a}(x) \in H_2(R^3)$, $\mathbf{F}(x, t) \in H_2'(Q_T)$. Тогда существует осесимметричное обобщенное решение задачи А.

Пусть $\{\mathbf{b}^{(n)}(x)\}$ и $\{\mathbf{F}^{(n)}(x, t)\}$ — последовательности бесконечно дифференцируемых осесимметричных соленоидальных в R^3 и финитных в полуплоскости, проходящей через ось x_3, векторов, сходящиеся к $\mathbf{a}(x)$ и $\mathbf{F}(x, t)$, соответственно, в $H_2(R^3)$ и $H_2'(Q_T^-)$; пусть $\{D^{(n)}\}$ — последовательность концентрических шаров, в совокупности покрывающих все пространство R^3 и таких, что векторы $\mathbf{b}^{(n)}$ и $\mathbf{F}^{(n)}$ равны нулю вне $D^{(n)}$. Вектор $\mathbf{u}^{(n)}(x, t)$ определим в $Q_T^{-(n)} = D^{(n)} \times [0, T]$ как осесимметричное решение задачи

$$\mathbf{u}_t^{(n)} - \nu\Delta\mathbf{u}^{(n)} + (\mathbf{u}^{(n)}, \nabla)\mathbf{u}^{(n)} = -\nabla P^{(n)} + \mathbf{F}^{(n)}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}^{(n)} = 0 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u}^{(n)}(x, 0) = \mathbf{b}^{(n)}; \qquad \mathbf{u}^{(n)}\cdot\mathbf{n}\,|_{S^{(n)}} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{u}^{(n)}\,|_{S^{(n)}} = 0 \tag{3.2}$$

Здесь $S^{(n)}$ — граница шара $D^{(n)}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $S^{(n)}$.

Обобщенным решением задачи (3.1), (3.2) в $Q_T^{(n)}$ назовем осесимметричный вектор $\mathbf{u}^{(n)}(x, t)$, удовлетворяющий условиям определения 1.1 (если продолжить его нулем вне $D^{(n)}$) и интегральному тождеству

$$-\int\limits_{D^{(n)}} \mathbf{b}^{(n)}(x)\,\varphi^{(n)}(x, 0)\,dx + \int\limits_0^T\int\limits_{D^{(n)}} [-\mathbf{u}^{(n)}\varphi_t^{(n)} + \nu\nabla\mathbf{u}^{(n)}\nabla\varphi^{(n)} +$$
$$+ (\mathbf{u}^{(n)}, \nabla)\,\mathbf{u}^{(n)}\varphi^{(n)} - \mathbf{F}^{(n)}\varphi^{(n)}]\,dx\,dt = 0 \tag{3.3}$$

при любом гладком в $Q_T^{(n)}$ соленоидальном и осесимметричном в $D^{(n)}$ векторе $\varphi^{(n)}(x, t)$, для которого $\varphi^{(n)}(x, T) = 0$ и выполняются условия (3.2.2), (3.2.3).

Для построения обобщенного решения задачи (3.1), (3.2) применим метод Галеркина. Фиксировав n, будем временно вместо $D^{(n)}$, $S^{(n)}$, $Q_T^{(n)}$, $\mathbf{b}^{(n)}$, $\mathbf{F}^{(n)}$, $\mathbf{u}^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$ писать, соответственно, D, S, Q_T, $\mathbf{b}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{u}$, φ. Пусть Ω — сечение шара D полуплоскостью, проходящей через ось x_3, Σ — граница Ω, $\{\varphi_k(r, z)\}$ — нормированная в $L_2(\Omega)$ последовательность собственных функций задачи

$$-(\varphi_{rr} + \varphi_{zz}) = \lambda\varphi, \qquad \varphi/_\Sigma = 0 \tag{3.4}$$

ортогональная и полная, как известно, в пространствах $L_2(\Omega)$ и $W_2^{\circ(1)}(\Omega)$, и $\omega_k(r, z) = r^2\varphi_k(r, z)$; последовательность $\{\omega_k\}$, очевидно, ортонормирована и полна в пространстве $L_{2,r^{-4}}(\Omega)$ функций, квадратично суммируемых по Ω с весом r^{-4}.

Определим вектор $\mathbf{u}_k(x)$ в D как решение задачи

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_k = \omega_k, \quad \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}|_S = 0 \quad (\omega_k = (0, \omega_k(r, z), 0)) \tag{3.5}$$

Так как $\operatorname{div} \omega_k = 0$, то задача (3.5) однозначно разрешима [10]. Пусть $\sigma(r, z) = (rot\, \mathbf{b})_\theta$. Так как $\sigma(r, z) \in L_{2,r^{-1}}$, то ее можно разложить в ряд Фурье по функциям $\omega_k(r, z)$

$$\sigma(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i(r, z)$$

В качестве m-го галеркинского приближения возьмем вектор

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, t) = \sum_{i=1}^{m} A_i^{(m)}(t)\, \mathbf{u}_i(x) \tag{3.6}$$

подчинив функции $A_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ условиям (3.7)

$$\int_\Omega r \left\{ \left(\frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial t} + u_r^{(m)} \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial r} + u_z^{(m)} \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial z} - u_r^{(m)} \frac{\omega^{(m)}}{r} \right) \frac{\omega_k}{r^2} + \nu \left[\frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega_k}{r^2} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega_k}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial r} \frac{\omega_k}{r^2} + \frac{\omega^{(m)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega_k}{r^2} \right) + \frac{\omega^{(m)}}{r^2} \frac{\omega_k}{r^2} \right] - f \frac{\omega_k}{r^2} \right\} dr\, dz = 0$$

$$A_k^{(m)}(0) = \alpha_k \qquad \left(\omega^{(m)}(r, z, t) = \sum_{i=1}^{m} A_i^{(m)}(t)\, \omega_i(r, z) \right) \tag{3.8}$$

Лемма 3.1. Векторы $\mathbf{u}^{(m)}(x, t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ однозначно определяются соотношениями (3.6) — (3.8), осесимметричны и соленоидальны в D, имеют вместе с $\mathbf{u}_t^{(m)}$ непрерывные в Q_T вторые производные по x и удовлетворяют условиям (3.2).

Доказательство. Подставляя (3.6) в (3.7) для определения функций $A_k^{(m)}(t)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющую единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (3.8). Остальные утверждения леммы следуют непосредственно из свойств векторов $\mathbf{u}_k(x)$.

Лемма 3.2. Из последовательности $\{\omega^{(m)}\}$ можно выделить подпоследовательность (сохраним для нее прежнее обозначение), слабо в $L_2(\Omega_T)(\Omega_T = \Omega \times [0, T])$, сходящуюся к некоторой функции $\omega(r, z, t)$ так, что $\partial\omega^{(m)}/\partial r$, $\partial\omega^{(m)}/\partial z$, $\omega^{(m)}/r$ слабо в $L_2(\Omega_T)$ сходятся к $\partial\omega/\partial r$, $\partial\omega/\partial z$, ω/r, соответственно.

Доказательство. Умножая каждое из равенств (3.7) на соответствующее $A_k^{(m)}$ и складывая после преобразований, аналогичных примененным в лемме 1.2, получим равномерную по m и $t \in [0, T]$ оценку

$$\int_0^t \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\omega^{(m)}}{r} \right)^2 \right] dr\, dz d\tau \leqslant C$$

Остается применить теоремы о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве и о слабой замкнутости обобщенного дифференцирования.

Лемма 3.3. Из последовательности $\{\omega^{(m)}\}$ можно выделить подпоследовательность (сохраним для нее прежнее обозначение), сходящуюся к $\omega(r, z, t)$ слабо в $L_2(\Omega)$, равномерно по $t \in [0, T]$.

Доказательство. Исходя из равенств (3.7), нетрудно показать, что непрерывные функции

$$l_{m,k}(t) = \int\limits_{\Omega} \omega^{(m)} \varphi_k r \, drdz$$

при любом фиксированном k и $m \geqslant k$ образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство. Из каждого семейства выделим равномерно на $[0, T]$ сходящуюся подпоследовательность.

Применяя диагональный процесс, выделим подпоследовательность, сходящуюся равномерно при каждом фиксированном k, когда $m \to \infty$.

Учитывая полноту в $L_2(\Omega)$ системы $\{\varphi_k\}$, нетрудно показать, что соответствующая подпоследовательность последовательности $\{\omega^{(m)}\}$ сходится слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Лемма 3.4. Из последовательности $\{\mathbf{u}^{(m)}(x, t)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_2{}^{(1)}(D)$ равномерно по $t \in [0, T]$ и сильно в $L_p(\Omega_T)$ при $1 < p < 4$ к некоторому вектору $\mathbf{u}(x, t)$, осесимметричному соленоидальному и имеющему вихрем $\boldsymbol{\omega}(x, t) = (0, \omega, 0)$.

Доказательство следует из оценки (1.22) и непрерывности оператора вложения.

Лемма 3.5. Вектор $\mathbf{u}(x, t)$ представляет собой обобщенное решение задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. В силу леммы 3.4 остается показать, что $\mathbf{u}(x, t)$ удовлетворяет тождеству (3.3). Пусть $\psi(r, z, t)$ — произвольная непрерывная в $\bar{\Omega}_T$ вместе с производными первого порядка по r, z, t функция, равная нулю на Σ и при $t = T$. Если λ_k собственное число задачи (3.4), соответствующее собственной функции φ_k, то функции $\psi_k(r, z) = (1 + \lambda_k)^{-1/2} \varphi_k(r, z)$ образуют полную ортонормальную в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ систему, и для $\psi(r, z, t)$ имеет место разложение

$$\psi(r, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \psi_k(r, z) \tag{3.9}$$

сходящееся в $W_2^{(1)}(\Omega)$ при любом $t \in [0, T]$. Нетрудно показать, что сходимость будет равномерной на $[0, T]$, и что ряд для $\partial\psi/\partial t$ также равномерно по $t \in [0, T]$ сходится в $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Отсюда по вложению следует равномерная на $[0, T]$ сходимость обоих рядов в любом $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, тем более,— сходимость в любом $L_p(\Omega_T)$. Обозначая m-ю частичную сумму ряда (3.9) через $\psi^{(m)}$, умножая каждое из равенств (3.7) на $(1+\lambda_k)^{-1/2} c_k$, суммируя по k от 1 до m и интегрируя по t, получим

$$-\int\limits_{\Omega} r\omega^{(m)}(r, z, 0)\psi^{(m)}(r, z, 0)\, dr\, dz + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} r \Big[-\omega^{(m)} \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial t} + \Big(u_r{}^{(m)} \frac{\partial\omega^{(m)}}{\partial r} + u_z{}^{(m)} \frac{\partial\omega^{(m)}}{\partial z} - u_r{}^{(m)} \frac{\omega^{(m)}}{r} \Big) \psi^{(m)} + \nu \Big(\frac{\partial\omega^{(m)}}{\partial r} \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial\omega^{(m)}}{\partial z} \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial\omega^{(m)}}{\partial r} \psi^{(m)} + \frac{\omega^{(m)}}{r} \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial r} + \frac{\omega^{(m)}}{r^2} \psi^{(m)} \Big) - f\psi^{(m)} \Big] dr\, dzdt = 0 \tag{3.10}$$

Учитывая характер сходимости $\psi^{(m)}$, $u_r^{(m)}$, $u_z^{(m)}$, $\omega^{(m)}$, нетрудно показать, что в (3.10) можно перейти к пределу по $m \to \infty$ (формально-отбросить индекс m). Пусть теперь $\varphi(x, t)$ — произвольный вектор, указанный в определении обобщенного решения задачи (3.1), (3.2); функцию $\psi(r, z, t)$ найдем как решение следующей задачи:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} = \varphi_z, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \varphi_r, \qquad \psi(0, 0, t) = 0 \tag{3.11}$$

Нетрудно убедиться в том, что задача (3.11) однозначно разрешима и ее решение ψ (r, z, t) равно нулю на Σ и при $t = T$. Полагая $\psi = (0, \psi, 0)$ и учитывая, что в силу (3.11) $\operatorname{rot} \psi = \varphi$, преобразуем тождество (3.10) к виду

$$-\int\limits_D \mathbf{b}(x)\varphi(x, 0)\,dx + \int\limits_0^T\int\limits_D [-\mathbf{u}\varphi_t + \nu\nabla\mathbf{u}\,\nabla\varphi + (\mathbf{u}, \nabla)\,\mathbf{u}\varphi - \mathbf{F}\varphi]\,dx\,dt = 0$$

Лемма доказана.

Лемма 3.6. Вихрь обобщенного решения задачи (3.1), (3.2) — вектор ω (x, t) — имеет производные второго порядка по переменной x и первого порядка по переменной t, суммируемые со степенью p $(1 < p < 2)$ по цилиндру Q_T.

Доказательство. Исходя из тождества (3.3), нетрудно показать, что ω (x, t) почти всюду в Q_T совпадает с вектором ω' (x, t) — решением задачи

$$\omega_t' - \nu\Delta\omega' = \mathbf{g}(x, t), \qquad \omega'\,|_S = 0, \qquad \omega'\,|_{t=0} = \sigma(x)$$

$$\mathbf{g} \equiv (\omega, \nabla)\,\mathbf{u} - (\mathbf{u}, \nabla)\,\omega + f, \quad \sigma(x) = \omega(x, 0)$$

Из лемм 3.2 и 3.4 следует, что $\mathbf{g}$ $(x, t) \in L_p$ (Q_T) при $1 < p < 2$; и утверждение леммы следует теперь из результатов В. А. Солонникова [14].

Лемма 3.7. Обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) — вектор $\mathbf{u}$ (x, t) — имеет производные любого порядка по переменным x, t, непрерывные Q_T.

Доказательство проводится многократным повторением рассуждений леммы (3.6).

Итак, существование (классического) решения задачи (3.1), (3.2) при любом n доказано.

Для завершения доказательства теоремы (3.1) обратимся теперь к последовательности $\{\mathbf{u}^{(n)}$ $(x, t)\}$.

Учитывая, что последовательности $\{\mathbf{b}^{(n)}\}$ и $\{\mathbf{F}^{(n)}\}$ равномерно ограничены в пространствах H_2 (R^3) и $H_2'(Q_T)$, соответственно, и применяя леммы 1.1—1.3, получим равномерно по n и $t \in [0, T]$ оценку

$$\|\mathbf{u}\|^{(n)}(x, t)\,\|_{H_2(D^{(n)})} \leqslant C \tag{3.12}$$

Из (3.13) следует, что из $\{\mathbf{u}^{(n)}\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в H_0 (R^3), H_1 (R^3) равномерно по $t \in [0, T]$ к некоторому вектору $\mathbf{v}$ (x, t). Переходя к пределу по $n \to \infty$ в (3.3), получим (1.3), Теорема доказана.

Теорема 3.2. Если $\mathbf{a}$ $(x) \in H_3$ (R^3), $\mathbf{F}$ $(x, t) \in H_3'$ (Q_T), то осесимметричное обобщенное решение $\mathbf{v}$ (x, t) задачи A имеет ограниченный

$$\max\|\operatorname{rot}\mathbf{v}(x, t)\|_{M(R^3)} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Доказательство. Повторим построения теоремы 3.1, считая $\{\mathbf{b}^{(n)}\}$ и $\{\mathbf{F}^{(n)}\}$ сходящимися к $\mathbf{a}$ и $\mathbf{F}$ в H_3 (R^3) и H_3' (Q_T), соответственно. Применяя затем, наряду с леммами 1.1—1.3, лемму 1.8, получим равномерную по n и $t \in [0, T]$, оценку

$$\|\mathbf{u}^{(n)}(x, t)\,\|_{H_3(D^{(n)})} \leqslant C \tag{3.13}$$

На основании (3.13), опираясь на лемму 1.5, из $\{\mathbf{u}^{(n)}\}$ при любом $p \geqslant 2$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в H_0 (R^3) и H_1 (R^3) равномерно по $t \in [0, T]$, вихри элементов которой сходятся слабо в L_p (R^3) равномерно по $t \in [0, T]$. Применяя теорему о слабой замкнутости обобщенного дифференцирования, получим равномерную по $p \geqslant 2$ и $t \in [0, T]$ оценку $\|\operatorname{rot}\mathbf{v}(x, t)\|_{L_p(R^3)} \leqslant C$, из которой и следует утверждение теоремы.

§ 4. Существование обобщенного решения задачи Б. *Теорема 4.1.* Пусть $\mathbf{a}(x) \in H_3(R^3)$, $\mathbf{F}(x, t) \in H_3'(Q_T)$. Тогда существует осесимметричное обобщенное решение задачи Б.

Доказательство. Пусть $\{\nu^{(n)}\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, и $\mathbf{v}^{(n)}(x, t)$ — осесимметричное обобщенное решение задачи А при значении вязкости $\nu = \nu^{(n)}$. Учитывая независимость оценок, приведенных в § 1, от вязкости ν и теорему 3.2, получим равномерные по n и $t \in [0,T]$ оценки

$$\|\mathbf{v}^{(n)}(x, t)\|_{H_0(R^3)} \leqslant C, \quad \|\mathbf{v}^{(n)}(x, t)\|_{H_1(R^3)} \leqslant C, \quad \|\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(n)}(x, t)\|_{M(R^3)} \leqslant C$$

из которых следует, что из $\{\mathbf{v}^{(n)}(x, t)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $H_0(R^3)$ и $H_1(R^3)$ равномерно по $t \in [0, T]$ к некоторому вектору $\mathbf{v}(x, t)$, имеющему ограниченный $\max \|\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, t)\|_{(MR^3)}$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Переходя к пределу по $n \to \infty$ в тождестве

$$-\int_{R^3} \mathbf{a}(x)\,\varphi(x, 0)\,dx + \int_0^T \int_{R^3} [-\mathbf{v}^{(n)}\varphi_t + (\mathbf{v}^{(n)}, \nabla)\,\mathbf{v}^{(n)}\varphi - \mathbf{F}\varphi]\,dx\,dt +$$
$$+ \nu^{(n)} \int_0^T \int_{R^3} \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(n)} \operatorname{rot} \varphi\,dx\,dt = 0$$

получим (1.4). Теорема доказана.

Поступила 15 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math., 1934, 63.
2. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamish Grundgleichungen. Math. Nachrichten, 1950—1951,4.
3. Гюнтер Н. М. Об основной задаче гидродинамики. Изв. физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1927, т. 2.
4. Lichtenstein L. Grundlagen der Hydromechanik. Berlin, 1929.
5. Leray J. Etude de diverses équations, integrales, non linéaires et de quelques problémes que pose l'Hydrodynamique. J. Math. pures et appl., 1933, S. 9, t. 12.
6. Ладыженская О. А. Решение в целом задачи Коши для нестационарного плоского течения вязкой несжимаемой жидкости. Тр. Моск. Матем. общества, 1959, т. 8, стр. 71—81.
7. Wolibner. Un théoréme sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait homogéne incompressible, pendant un temps infiniment long. Mathem. Zs., 1933, Bd37, 699—726.
8. Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. ЖВММФ, 1963, т. 3, № 6, стр. 1032—1066.
9. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
10. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1951.
11. Юдович В. И. Некоторые оценки решений эллиптических уравнений. Матем. сб., 1962, т. 59 (101), стр. 229—244.
12. Ильин В. П. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1959, т. 53, стр. 64—127.
13. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
14. Солонников В. А. Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 70, стр. 133—212.