

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

Выводится нелинейное уравнение для амплитуды одномерного нестационарного движения, возникающего при нарушении устойчивости основного течения. Последнее предполагается также одномерным и не зависящим от t и пространственной координаты. Надкритичность считается малой, а спектр волновых чисел — дискретным, но сколь угодно плотным. Это уравнение упрощается в предположении, что вторичное движение может быть представлено суперпозицией волновых пакетов с кратными волновыми числами (нарастающие возмущения образуют узкий волновой пакет). Уравнение имеет большое число устойчивых стационарных решений, различающихся длиной волны; для определения длины волны решается нестационарная задача. Решение последней найдено в виде ряда по начальной амплитуде, сходящегося при ограниченных значениях t . При больших t ряд просуммирован; в результате решение продолжено на значения t , при которых ряд расходится. Найдено, что в системе устанавливается периодическое движение с длиной волны, характеризующей возмущение с максимальным инкрементом. При дискретных значениях параметра (для которых максимальный инкремент имеют два возмущения) устанавливается двухпериодическое турбулентное движение.

1. Известно, что при потере равновесным состоянием устойчивости в системе может установиться периодическое движение с амплитудой Q , модуль которой удовлетворяет уравнению [1-6].

$$dq / dt = 2q (\gamma + aq + bq^2 + \dots), \quad q = |Q|^2 \quad (1.1)$$

В этом уравнении инкремент γ нарастающего (в линейной теории) возмущения и величины a , b (связанные с учетом нелинейных членов) являются функциями параметров λ ; при критическом значении параметра λ_* инкремент $\gamma = 0$.

При получении (1.1) спектр собственных значений линеаризованной краевой задачи считается дискретным [1]. Последнее имеет место, например, при движении среды в ограниченном объеме. В данной работе рассматриваются ограниченные системы, у которых продольный размер l много больше поперечных размеров (например, в задаче о движении жидкости между вращающимися цилиндрами [7], длина цилиндров l считается большой по сравнению с зазором между цилиндрами; при исследовании положительного столба газового разряда [8] длина столба считается большой по сравнению с радиусом разрядной трубки). При рассмотрении равновесного состояния таких систем и их устойчивости пренебрегают концевыми эффектами, считая $l = \infty$. В результате получается, что равновесные величины не зависят от продольной координаты x , а собственные

функции проблемы устойчивости равновесия пропорциональны $\exp(ikx)$, где волновое число k принимает любые действительные значения. При любом k существует бесконечное множество собственных значений $p = \gamma + i\Omega$; каждое собственное значение, рассматриваемое как функция k , определяет некоторое непрерывное множество (ветвь) собственных значений.

Фиг. 1 иллюстрирует типичный случай возникновения неустойчивости при изменении параметра; пунктиром изображен декремент одной из «устойчивых» ветвей (эти ветви характеризуют только затухающие возмущения). Инкремент нарастающих возмущений будет максимален при

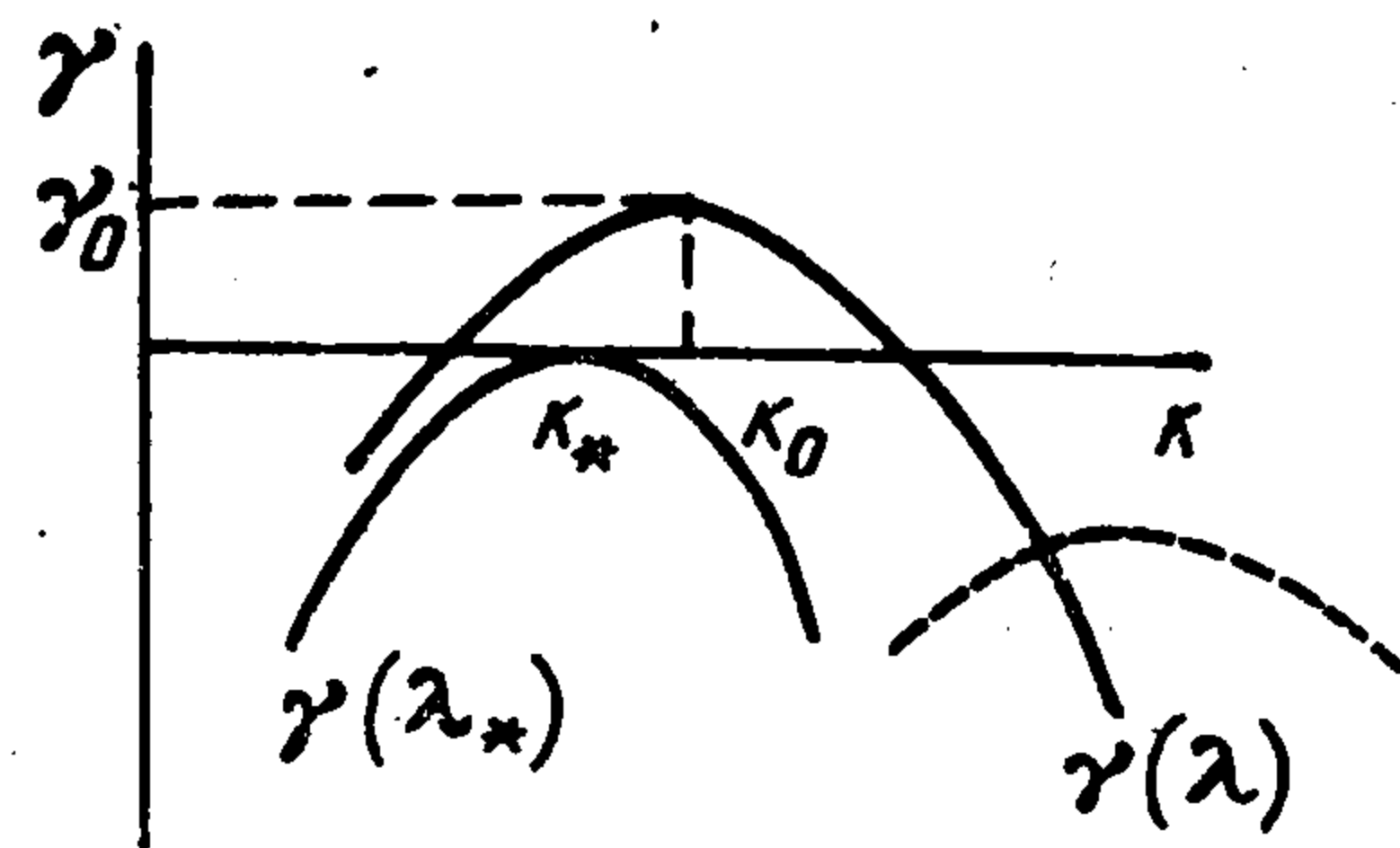
$$k = k_0(\lambda) \quad (1.2)$$

$$\gamma(k) = \gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_0''(k - k_0)^2 \quad (\gamma_0'' < 0)$$

обычно по порядку величины $1/k_0$ равно поперечному размеру системы.

Надкритичность $\Delta = \lambda - \lambda_*$ можно характеризовать полушириной Δ -интеграла, в котором $\gamma(k) > 0$:

$$\Delta = \sqrt{-2\gamma_0/\gamma_0''} \sim \sqrt{\Lambda} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

В дальнейшем надкритичность всегда считается столь малой, что $\Delta \ll k_0$.

Состояние рассматриваемых систем определяется параметрами бесконечной задачи («продольные» граничные условия влияют на это состояние только вблизи концов $x = \pm \frac{1}{2}l$). Поэтому в дальнейшем ограниченность системы учитывается лишь тем, что отклонения величин от равновесных значений представляются в виде ряда Фурье по x . В результате получается, что во всех зависимостях $f(k)$ бесконечной задачи волновые числа принимают дискретные значения

$$k = 2\delta n, \quad \delta = \pi/l \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad (1.4)$$

при этом величина k_0 приближенно определяет волновое число k дискретного спектра, характеризующее возмущение с максимальным инкрементом $|k - k_0| \ll \delta$.

Из последнего выражения следует, что приближение $l = \infty$ применимо при $\delta \ll k_0$. В дальнейшем это условие считается выполненным, однако соотношение между δ и полушириной Δ в (1.3) может быть произвольным.

Если $\Delta < \delta$, то в системе нарастает только одно возмущение с волновым числом $k \approx k_*$. В этом случае амплитуда нарастающего возмущения будет описываться уравнением (1.1). При $a < 0$ в системе установится пространственно-периодическое движение с волновым числом $k \approx k_*$.

Если надкритичность столь велика, что

$$\delta \ll \Delta \ll k_0 \quad (1.5)$$

то в системе нарастает большое число возмущений (бесконечное при $l = \infty$). В этом случае не очевидно, что движение малой амплитуды, исчезающее при $\Delta \rightarrow 0$, будет пространственно-периодическим. Если пред-

полагать это известным из эксперимента, то при теоретическом определении стационарного периодического движения для амплитуды и волнового числа получается только одно уравнение (1.1), в котором коэффициенты являются известными функциями параметров и волнового числа [5, 6]. Таким образом, волновое число стационарных движений остается неопределенным параметром теории [9, 5, 6].

Для устранения отмеченных неопределенностей в работе получено и решено уравнение (2.15), описывающее взаимодействие большого числа нарастающих возмущений.

2. В этом разделе приводится способ получения уравнения для амплитуды нарастающих возмущений из исходных гидродинамических уравнений вида

$$dX / dt = F(X, d(\dots) / dx, d(\dots) / dr, r, \lambda) \quad (2.1)$$

здесь вектор X есть совокупность гидродинамических переменных (плотность, температура, магнитное поле и т. д.), x — продольная координата, r — совокупность «поперечных» координат.

Без ограничения общности можно считать, что равновесное состояние (не зависящее от t, x) есть $X = 0$, а граничные условия линейны по X однородны и не содержат производных X по времени [5]. Начальное отклонение от равновесия считается малым

$$X(x, t = 0) = \varepsilon X_0(x)$$

где амплитуда $\varepsilon \rightarrow 0$, а функция X_0 , описывающая форму отклонения, каким-либо образом нормирована. В дальнейшем рассматриваются случаи, когда X остается малым в любой момент времени и можно разложить (2.1) в ряд

$$\frac{\partial X}{\partial t} = LX + \sum_{n=2}^{\infty} (L_1^n X) \dots (L_n^n X) \quad (2.2)$$

Здесь матрицы L в отличие от F не зависят от X ; граничное условие имеет вид $L_0 X = 0$. Решение X ищется в виде

$$X = \sum_k Y(k) e^{ikx}, \quad Y(-k) = \bar{Y}(k) \quad (2.3)$$

где k принимает значения (1.4), а черта означает комплексное сопряжение. После подстановки (2.3) в (2.2) для $Y(k)$ получается уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} - L(k) Y &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_k [L_1^n(k_1) Y(k_1)] \dots [L_n^n(k_n) Y(k_n)] \\ Y(t=0) &= \varepsilon Y_0, \quad L_0(k) Y = 0 \quad (k_1 + \dots + k_n = k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь матрицы $L(k)$ получаются из соответствующих матриц в (2.2) заменой $d(\dots)/dx \rightarrow ik$. Решение Y ищется в виде¹

$$Y(k, r, \lambda) = QZ(k, r, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_k Z_n(k_1, \dots, k_n; r, \lambda) Q(k_1) \dots Q(k_n) \quad (2.5)$$

где амплитуда $Q(k, t)$ удовлетворяет уравнению.

$$\frac{dQ}{dt} = pQ + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_k H_n(k_1, \dots, k_n; \lambda) Q(k_1) \dots Q(k_n) \quad (2.6)$$

а величины p, Q, Z, H становятся комплексно-сопряженными при изменении знаков волновых чисел.

¹ Здесь и ниже во второй сумме участвуют волновые числа, удовлетворяющие условию $k_1 + \dots + k_n = k$.

Уравнение (2.4) после подстановки (2.5), (2.6) принимает вид

$$QD + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_k Q(k_1) \dots Q(k_n) D_n(k_1, \dots, k_n) = 0$$

Величины Z_n , H_n последовательно определяются из уравнений $D_n = 0$ с граничным условием $L_0 Z_n = 0$. Линейная задача

$$D \equiv pZ - LZ = 0, \quad L_0 Z = 0 \quad (2.7)$$

определяет устойчивость равновесия. Относительно свойств системы предполагается, что неустойчивость возникает так, как показано на фиг. 1. Параметры системы предполагаются такими, что выполняются условия (1.5).

В (2.5), (2.6) необходимо использовать собственное значение $p = \gamma + i\Omega$ и собственную функцию Z задачи (2.7), которые описывают нарастающие возмущения.

В неоднородной задаче

$$D_n \equiv Z_n P_n - LZ_n + H_n Z + \Psi_n = 0, \quad L_0 Z_n = 0, \quad P_n = p(k_1) + \dots + p(k_n) \quad (2.8)$$

вектор Ψ_n выражается через ранее найденные величины H , Z .

Решение Z_n можно получить [10] при помощи матрицы Грина $G(r, \rho, P_n)$ однородной задачи (2.8)

$$Z_n = \int_S G(r, \rho, P_n) [H_n Z(\rho) + \Psi_n(\rho)] d\rho$$

интегрирование по поперечным координатам ρ проводится по поперечному сечению S системы. Матрицу Грина можно представить в виде [10]

$$G = - \frac{Z\bar{U}}{(P_n - p) \langle Z \cdot U \rangle} + G_- \quad (2.9)$$

где G_- регулярна при $P_n = p$; U есть собственная функция сопряженной задачи (2.7), соответствующая собственному значению \bar{p} , а скалярное произведение векторов

$$\langle Z \cdot U \rangle = \int_S (Z \cdot \bar{U}) d\rho$$

Разность $P_n - p$ может принимать очень малые значения; например, если $\gamma(k) = 0$, то $P_3 = p$ при $k_1 = k_2 = -k_3 = k$.

Согласно (2.8), (2.9), вектор Z_n будет конечным при любых k , если

$$H_n \langle Z \cdot U \rangle + \langle \Psi_n \cdot U \rangle = 0, \quad Z_n = \int_S G_- (H_n Z + \Psi_n) d\rho$$

Первое равенство определяет H_n , второе определяет Z_n .

Пусть γ_1 — минимальный декремент возмущений, характеризуемых устойчивыми ветвями. Можно ожидать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнения (2.5), (2.6) описывают поведение системы, начиная с $t \sim 1 / (\gamma_0 + \gamma_1)$, когда согласно линейной теории в системе существенны лишь возмущения, характеризуемые неустойчивой ветвью. Поэтому в качестве начального условия для (2.6) можно принять

$$Q(t=0) = \varepsilon A(k) \quad (2.10)$$

где A есть составляющая начального вектора Y_0 , соответствующая нарастающим возмущениям

$$A \langle Z \cdot U \rangle = \langle Y_0 \cdot U \rangle$$

Вобщем говоря, уравнения (2.5), (2.6) превышают точность приближения, в котором пренебрегается заданными при $t=0$ возмущениями с большими декрементами. Например, в случае, иллюстрируемом фиг. 1, не нужно учитывать начальные амплитуды возмущений неустойчивой ветви при больших k , поскольку декременты этих возмущений больше декрементов возмущений одной из устойчивых ветвей. От указанного превышения точности можно избавиться, если (2.6) свести к уравнению для на-

растающих возмущений с волновым числом $|k| \approx k_0$; эти возмущения образуют волновой пакет шириной 2Δ .

В силу условия $\Delta \ll k_0$ в спектре $Q(k)$ из-за нелинейных эффектов выделяются дополнительные пакеты с эффективным волновым числом nk_0 (n — целое). Амплитуда этих пакетов функционально выражается через амплитуду основных пакетов

$$Q(k \approx nk_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum h_{n, n+2m} Q_1 \cdots Q_{n+2m} \quad (2.11)$$

а уравнение для $Q(k \approx k_0)$ имеет вид

$$\frac{dQ}{dt} = pQ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum h_{1, 1+2m} Q_1 \cdots Q_{1+2m} \quad (2.12)$$

Здесь и ниже используется сокращение

$$\sum f Q_1 \cdots Q_n = \sum_k f(k_1, \dots, k_n) Q(k_1) \cdots Q(k_n), \quad |k_i| \approx k_0$$

Величины h становятся комплексно-сопряженными при изменении знаков k .

Для нахождения $h_{n, n+2m}$ нужно в (2.6) положить $k \approx nk_0$, а в суммах по k считать $k_i \approx m_i k_0$, где m — целые числа; подстановки (2.11), (2.12) в (2.6) дают

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum \Phi_{n, n+2m} Q_1 \cdots Q_{n+2m} = 0$$

Величину $h_{n, n+2m}$ можно определить из линейного алгебраического уравнения

$$\Phi_{n, n+2m} = 0.$$

Для вычисления $h_{n, n+2m}$ необходимо предварительно определить все величины h , стоящие в матрице слева от диагоналей, проведенных через $h_{n, n+2m+2}$ (схема части матрицы приведена здесь слева).

$$\begin{array}{cccc} \dots & h_{02} & \dots & h_{04} & \dots \\ p & \dots & h_{13} & \dots & h_{15} \\ \dots & h_{22} & \dots & h_{24} & \dots \\ \dots & \dots & h_{33} & \dots & h_{35} \\ \dots & \dots & \dots & h_{44} & \dots \end{array}$$

рицы приведена здесь слева).

Аналогично проводится выделение волновых пакетов в величине $Y(k)$. При помощи (2.5), (2.11) получается

$$Y(k \approx nk_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum V_{n, n+2m} Q_1 \cdots Q_{n+2m} \quad (2.13)$$

где величины V выражаются через Z, h .

В суммах вида $\sum f Q_1 \cdots Q_m$ функции $f(k_1, \dots, k_m)$ можно считать симметричными, поскольку при перестановке чисел k_1, \dots, k_m величина суммы не должна меняться. Используя это свойство симметрии и соотношение $Q(-k) = \bar{Q}(k)$, нетрудно свести (2.12), (2.13) к виду

$$Y(k \approx nk_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum Y_{n, n+2m} Q_1 \cdots Q_{n+m} \bar{Q}_{n+m+1} \cdots \bar{Q}_{n+2m} \quad (2.14)$$

$$\frac{dQ}{dt} = pQ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum \Gamma_m Q_1 \cdots Q_{m+1} \bar{Q}_{m+2} \cdots \bar{Q}_{1+2m} \quad (2.15)$$

$$Y_{n, n+2m} = \frac{(n+2m)!}{m!(n+m)!} V(k_1, \dots, k_{n+m}, -k_{n+m+1}, \dots, -k_{n+2m})$$

$$\Gamma_m = (2m+1) h_{1, 1+2m}(k_1, \dots, k_{1+m}, -k_{2+m}, \dots, -k_{1+2m})$$

В (2.14) суммирование по k проводится по числам, удовлетворяющим условиям

$$k_1 + \dots + k_{n+m} - k_{n+m+1} - \dots - k_{n+2m} = k, \quad k_i \approx k_0 \quad (2.16)$$

Отсюда при $n=1$ получается условие для сумм по k в (2.15).

3. Прежде всего рассмотрим устойчивость стационарного периодического решения с некоторым волновым числом k . Это решение описывается соотношениями (2.14), (2.15), в которых отлична от нуля только амплитуда $Q(k)$; подобного вида соотношения были получены ранее в [2,3,5].

Уравнение (2.15) для стационарной амплитуды $Q(k)$ имеет вид

$$\frac{dQ}{dt} = Q \left[p(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(k, k) q^m \right] \quad (3.1)$$

$$\gamma(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m(k, k) q^m = 0, \quad q = Q\bar{Q} \quad (3.2)$$

Здесь и ниже

$$\omega_m(k', k) = \Gamma_m(k', k, \underbrace{k, \dots, k}_{2m}) = \gamma_m + i\Omega_m$$

Пусть распределение амплитуд отличается от стационарного (в котором только $Q(k) \neq 0$) на бесконечно малые возмущения $Q^\circ(k')$; тогда (2.15) можно линеаризовать относительно возмущений и получить с учетом (2.16) и симметрии функций Γ :

$$\frac{dQ^\circ(k')}{dt} = Q^\circ \left[p(k') + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) \omega_m(k', k) q^m \right] \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что периодическое решение с волновым числом k будет устойчиво, если при любых k'

$$U(k', k) = \gamma(k') + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m(k', k) (m+1) q^m < 0 \quad (3.4)$$

Здесь $q(k)$ определяется равенством (3.2).

Согласно (2.16) всегда имеются ввиду только волновые числа, отличающиеся от k_0 на величины $\sim \Delta$. Разность $k' - k \sim \Delta$ мала, поэтому (3.4) можно с учетом (3.2) записать в виде

$$U \approx q \sum_{m=1}^{\infty} m q^m \gamma_m + (k' - k) \frac{\partial U}{\partial k'} + \frac{1}{2} (k' - k)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial (k')^2} < 0 \quad (3.5)$$

Здесь и ниже функции от k' берутся при $k' = k$.

Пусть $\gamma_1(k_0, k_0) < 0$; тогда из (3.2), (3.5), (1.3) получается

$$q(k) \approx -\gamma / \gamma_1, \quad |k - k_0| \leq \Delta \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} U &\approx q\gamma_1 + (k' - k) \gamma' + \frac{1}{2} (k' - k)^2 \gamma'' = \\ &= -\gamma_0 - \gamma_0'' (k - k_0)^2 + \frac{1}{2} \gamma_0'' (k' - k_0)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Согласно (3.7) условие устойчивости $U < 0$ выполняется для периодических решений, волновое число k которых удовлетворяет условию $|k - k_0| < \Delta / \sqrt{2}$. Решения, для которых $\Delta \geq |k - k_0| > \Delta / \sqrt{2}$, неустойчивы относительно возмущений с волновыми числами k' , определяемыми соотношением

$$(k' - k)^2 < 2(k - k_0)^2 - \Delta^2$$

Исследование устойчивости периодического решения усиливает ограничение (3.6) на длину волны, но не определяет ее точно. Остается неясным, устанавливается ли вообще периодическое решение при нарастании большего числа начальных возмущений; это можно выяснить лишь при решении начальной задачи (2.15), (2.10).

4. Для простоты рассмотрим поведение при $t \rightarrow \infty$ главного члена $X \approx 2\text{Re}X_{11}$, где

$$X_{11} = \sum_{k \approx k_0} Q Z e^{ikx} \quad (4.1)$$

а Q удовлетворяет уравнению (2.15), в котором удержан только низший нелинейный член (поэтому в дальнейшем индекс у Γ_1 опускается).

Решение задачи (2.15), (2.10) ищется в виде ряда по начальной амплитуде ε

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} Q^{(n)} \quad (4.2)$$

Нетрудно получить

$$Q^{(0)} = A e^{pt}, \quad Q^{(n)} = e^{pt} \int_0^t dt e^{-pt} \sum_m \sum \Gamma Q_1^{(m_1)} Q_2^{(m_2)} \bar{Q}_3^{(m_3)} \quad (4.3)$$

Здесь суммирование производится по числам k_i и по неотрицательным целым числам m , удовлетворяющим условиям

$$k_1 + k_2 - k_3 = k, \quad m_1 + m_2 + m_3 = n - 1 \quad (4.4)$$

Из (4.3) можно найти $Q^{(n)}$ при больших t . Рассмотрим величину (4.5)

$$Q^{(1)} = e^{pt} \sum \Gamma A_1 A_2 \bar{A}_3 \frac{e^{(P-p)t} - 1}{P-p}, \quad A_i = A(k_i) \\ P = p(k_1) + p(k_2) + \bar{p}(k_3)$$

Если подставить (4.2), (4.5) в (4.1), то при больших t наибольший вклад в X_{11} дадут слагаемые суммы (4.5), для которых

$$t \text{Re}(P - p) \gg 1$$

В таких слагаемых можно пренебречь единицей по сравнению с экспонентой и сохранить только сильную экспоненциальную зависимость от волновых чисел. Из дальнейшего будет видно, что в не зависящих от t множителях следует принять все k_i равными волновому числу k , при котором инкремент γ максимален.

Таким образом, при $\gamma_0 t \gg 1$:

$$Q^{(1)} = \Gamma A \frac{|A|^2}{2\gamma} \sum \exp tP$$

Аналогично можно найти, что (4.3) при $\gamma_0 t \gg 1$ удовлетворяется выражениями

$$Q^{(n)} = f_n A \left(\frac{|A|^2}{2\gamma} \right)^n \sum \exp tP_n \quad (4.6)$$

$$P_n = p(k_1) + \dots + p(k_{n+1}) + \bar{p}(k_{n+2}) + \dots + \bar{p}(k_{2n+1})$$

суммирование производится по волновым числам k_i , удовлетворяющим условию

$$k_1 + \dots + k_{n+1} - k_{n+2} - \dots - k_{2n+1} = k \quad (4.7)$$

в множителях перед суммой все волновые числа равны κ , а коэффициенты f определяются рекуррентным соотношением

$$f_n = \frac{\Gamma}{n} \sum_m f_{m_1} f_{m_2} \bar{f}_{m_3}, \quad f_0 = 1 \quad (4.8)$$

в котором сумма берется по числам m , удовлетворяющим второму условию (4.4).

Из (4.6), (4.2), (4.1) получается

$$X_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} A \varepsilon f_n \frac{|\varepsilon A|^{2n}}{(2\gamma)^n} \sum e^{ikx} Z(k) e^{P_n t} \quad (4.9)$$

где сумма берется по произвольным числам k_1, \dots, k_{2n+1} , а величина k определяется равенством (4.7). Асимптотическое поведение второй суммы в (4.9) существенно зависит от величины t . Если $|\gamma_0''| \delta^2 t \ll 1$ (что не противоречит условию $\gamma_0 t \gg 1$, так как $\delta \ll \Delta$), то слагаемые суммы с близкими k мало отличаются, и ее можно заменить интегралом по волновым числам (см. приложение); для таких t система ведет себя как бесконечная.

В противоположном предельном случае

$$t(\gamma - \gamma_1) \gg 1, \quad [\gamma = \gamma(\kappa), \quad \gamma_1 = \max[\gamma(\kappa - 2\delta), \gamma(\kappa + 2\delta)] \quad (4.10)$$

сумма асимптотически равна слагаемому

$$Z(\kappa) \exp[i\kappa x + tp(\kappa) + 2nt\gamma(\kappa)]$$

в котором $k_1 = \dots = k_{2n+1} = \kappa$. При достаточно больших t в системе устанавливается периодическое движение с длиной волны κ :

$$X_{11} = Z e^{i\kappa x} \left[A \varepsilon e^{pt} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{\varepsilon^2 |A|^2 e^{2\gamma t}}{2\gamma} \right)^n \right] \quad (4.11)$$

Каждый член суммы в (4.11) экспоненциально возрастает, однако вся сумма может быть конечной при любых t . Стоящая в квадратных скобках в (4.11) функция времени есть не что иное, как решение начальной задачи

$$dQ/dt = pQ + \Gamma Q^2 Q^*, \quad Q(0) = \varepsilon A, \quad p = \gamma + i\Omega, \quad \Gamma = B + iD, \quad \gamma > 0$$

при больших t . В самом деле, после замены (4.12)

$$Q = R e^{pt}, \quad T = (e^{2\gamma t} - 1) / (2\gamma)$$

решение (4.12) нетрудно получить как непосредственно, так и в виде ряда (4.2). Первое решение можно представить в виде

$$Q = \varepsilon A e^{pt} (1 - 2TB\varepsilon^2 |A|^2)^{-1/2\Gamma/B} \quad (4.13)$$

Второе решение есть

$$Q = \varepsilon A e^{pt} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\varepsilon^2 |A|^2 T)^n \quad (4.14)$$

при $\gamma t \gg 1$ оно совпадает с функцией времени в (4.11). Сравнение (4.13), (4.14) показывает, что ряд в (4.14) сходится¹, если

$$2TB\varepsilon^2 |A|^2 < 1$$

$$f_n = \Gamma (2\Gamma + \bar{\Gamma}) \dots [n\Gamma + (n-1)\bar{\Gamma}] / n!$$

Если $B < 0$, то при $t \rightarrow \infty$:

$$Q \rightarrow \sqrt{q_\infty} \exp it (\Omega + Dq_\infty), \quad q_\infty = -\gamma / B$$

5. Полученные в предыдущем разделе результаты легко обобщаются на случай точного уравнения (2.15); при этом снова¹ получается выражение (4.6), в котором

$$nf_n = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sum_m f_{m_1} \dots f_{m_{i+1}} \bar{f}_{m_{i+2}} \dots \bar{f}_{m_{2i+1}} \quad (m_1 + \dots + m_{2i+1} = n-1) \quad (5.1)$$

и в величинах Γ все волновые числа равны κ . После подстановки (4.6), (4.2) в сумму

$$X_{n,n+2m} = \sum_{k \approx nk_0} e^{ikx} \Sigma Y_{n,n+2m} Q_1 \dots Q_{n+m} \bar{Q}_{n+m+1} \dots \bar{Q}_{n+2m} \quad (5.2)$$

можно найти, что любое произведение $n+2m$ величин $Q^{(i)}$ асимптотически равно слагаемому, в котором все волновые числа равны κ . Оставляя только эти слагаемые, получим

$$X_{n,n+2m} = Y_{n,n+2m} (k_1 = \dots = k_{n+2m} = \kappa) e^{in\kappa x} Q^{n+m} \bar{Q}^m$$

где Q есть функция времени в (4.11) с коэффициентами f из (5.1). Эта функция времени есть решение уравнения (3.1) при $k = \kappa$, $Q(0) = \varepsilon A(\kappa)$, $\gamma t \gg 1$; в этом можно убедиться, разыскивая решение (3.1) в виде (4.2).

Таким образом, при достаточно больших t (когда становится существенной ограниченность системы) в системе устанавливается периодическое движение с длиной волны κ .

Это движение описывается соотношениями (2.14), (2.15), в которых только $Q(\kappa) \neq 0$; такие соотношения можно получить описанными ранее методами [2,3,5], если волновое число (являющееся неопределенным параметром этих методов) принять равным значению κ , при котором инкремент дискретного спектра максимален.

Поведение системы при больших t можно также рассмотреть, отыскивая решение X уравнений (2.1) в виде ряда по начальной амплитуде ε и суммируя члены с одинаковыми множителями $\exp(ikx)$.

Рассмотрим зависимость стационарного движения системы от параметра в случае, когда (фиг. 1) k_0 зависит от λ :

$$k_0(\lambda) \approx k_* + k_*'(\lambda - \lambda_*), \quad k_*' \neq 0 \quad (5.3)$$

¹ При $t \rightarrow \infty$ используется аналитическое продолжение решения, заданного в виде степенного ряда, в область расходимости ряда. Аналогичная процедура широко используется в статистике и квантовой теории поля.

В этом случае согласно (1.2) существует дискретный ряд значений λ_n , при которых максимум инкрементов дискретного спектра достигается в двух точках $k_0 \pm \delta$.

Из (5.3) следует, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = G_1 / l, \quad G_1 = 2\delta l / |k_*'| \quad (5.4)$$

Согласно вышеизложенному, в интервалах $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$ волновое число κ периодического движения остается постоянным, а при переходе λ через значение λ_n оно скачкообразно изменяется на величину 2δ . Увеличение κ происходит при увеличении надкритичности $\lambda - \lambda_*$, если $k_*' > 0$.

Одновременно со скачком волнового числа скачкообразно изменяется амплитуда стационарного движения. Обозначим

$$q = q(\kappa, \lambda_n), \quad q_+ = q(\kappa + 2\delta, \lambda_n)$$

С точностью до членов $\sim \delta$ из (3.2) получается

$$q_+ - q = 2\delta [(\partial S / \partial k) / (\partial S / \partial q)]_{\kappa, \lambda_n}$$

Здесь через S обозначена сумма в (3.2). Если $\gamma_1(k_*, \lambda_*) < 0$, то при малой надкритичности q мало и

$$(q_+ - q) / q = G_2 / l, \quad G_2 = 2\delta l (\gamma_1^{-1} \partial \gamma_1 / \partial k)_{k_*, \gamma_*} \quad (5.5)$$

амплитуда приближенно определяется равенством (3.2), в котором $k = k_0(\lambda)$:

$$q(\kappa, \lambda) \approx q(k_0, \lambda) [1 + (\kappa - k_0) G_2 / (2\delta l)], \quad |\kappa - k_0| \leq \delta$$

В отличие от скачков амплитуды при жестком возбуждении [4,5] скачки (5.5) всегда происходят при переходе λ через λ_n независимо от направления изменения λ .

При $\lambda = \lambda_n$ стационарное движение системы является не периодическим, а турбулентным; оно описывается выражениями (2.14), (2.15), в которых отличны от нуля только величины $Q_{\pm} = Q(k_0 \pm \delta)$. Действительно, вторая сумма в (4.9) асимптотически равна сумме слагаемых, в которых $k_i = k_0 \pm \delta$, $i = 1, \dots, 2n + 1$; множители перед второй суммой можно взять при $k = k_0$. Выражение (4.9) принимает вид (4.1), где Q есть решение при больших t начальной задачи.

$$\frac{dQ}{dt} = p(k) Q + \Gamma \Sigma Q_1 Q_2 \bar{Q}_3, \quad Q_{\pm}(0) = \varepsilon A(k_0) \quad (5.6)$$

$$Q(0, k \neq k_0 \pm \delta) = 0, \quad \Gamma = \Gamma_1(k_0, k_0, k_0) = B + iD, \quad B < 0$$

Устойчивое стационарное решение уравнения (5.6) есть

$$Q(k \neq k_0 \pm \delta) = 0, \quad Q_{\pm} = \sqrt{q} \exp it(\Omega_{\pm} + 3qD), \quad q = -^{1/3}\gamma / B$$

В стационарном состоянии величина (5.2) есть пакет волн с числами

$$k = nk_0 + (N - 2i)\delta, \quad N = n + 2m, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Ширина пакета равна $2\delta N$. Начиная с $N \approx k_0 / \delta$, волновые пакеты в сумме

$$X_N = \sum_{i=0}^N X_{N-2i, N} \sim |Q|^N, \quad X_{-n, N} = \bar{X}_{n, N}$$

сливаются, заполняя всю область волновых чисел $(-Nk_0, Nk_0)$. Так как

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_N + \dots$$

то в стационарном состоянии имеются пульсации с любыми масштабами. При больших λ_n турбулентность становится развитой.

Если $\lambda \approx \lambda_n$, то описанное здесь турбулентное движение¹ существует для значений t , когда $|\gamma_0''| \delta^2 t \gg 1$, а неравенство (4.10) имеет противоположный смысл.

6. Выше рассматривались одномерные задачи, в которых k, x были числами. В задачах о движении среды между горизонтальными плоскостями нужно k, x считать векторами, а произведение kx понимать как скалярное

$$kx = k^1 x_1 + k^2 x_2, \quad |x_{1,2}| \leq 1/2 l$$

Вертикальная координата x_3 является в данном случае поперечной; расстояние между плоскостями считается много меньшим горизонтальных размеров l .

Инкременты γ возмущений плоскопараллельных течений, направленных вдоль оси x_1 , максимальны [11] при $k^2 = 0, k^1 \neq 0$. Поэтому при малой надкритичности возможно сведение (2.5), (2.6) к (2.14), (2.15).

Пусть $k_* = (k_*^1, 0)$ есть вектор, для которого $\gamma(k_*, \lambda_*) = 0$. Если в (2.15)

$$B = \operatorname{Re} \Gamma_1(k_1 = k_2 = k_3 = k_*, \lambda_*) < 0$$

то при малой надкритичности в системе установится одномерное ($k^2 = 0$) движение малой амплитуды.

При $B > 0$ в системе возникает движение большой амплитуды, которое может не быть ни одномерным, ни периодическим. При уменьшении надкритичности это движение должно исчезать в области $\lambda < \lambda_*$, когда бесконечно малые возмущения затухают [4,5].

В задаче о возникновении конвекции между горизонтальными плоскостями величина $\gamma = \gamma(|k|)$, поэтому даже при произвольно малой надкритичности в системе нарастает большое число возмущений с равными по модулю волновыми векторами. В отличие от задачи о плоскопараллельных течениях эта задача является существенно двумерной и требует отдельного рассмотрения.

7. В заключение можно отметить, что в ограниченной системе устанавливается движение с длиной волны, для которой линейный инкремент максимален. В некоторых случаях это относится и к бесконечным системам. Если, однако, неустойчивость бесконечной системы является сносной, то (см. приложение) система возвращается в равновесное состояние.

Дискретность волновых чисел (1.5) имитирует дискретность спектра системы с учетом граничных условий при $x = \pm 1/2 l$. Собственные функции $f_n(x, r)$ этого спектра, соответствующие нарастающим возмущениям, можно характеризовать числом экстремумов по x ; это число возрастает при увеличении n . Для больших n зависимость f_n от x отделяется (за исключением областей вблизи концов) в виде множителей $\exp(in c_n x / l)$, где $c_n \sim 1$ может зависеть от n ; вследствие этого правые части в (5.4), (5.5) также могут зависеть от n .

¹ По терминологии [12] в этом турбулентном движении возбуждено две степени свободы.

Приложение. Выше отмечалось, что при $t\delta^2 |\gamma_0''| \ll 1$ ограниченная система ведет себя как бесконечная; в этом случае во всех соотношениях суммирование по k можно заменить интегрированием, например

$$\sum f Q_1 \dots Q_n \rightarrow \int f Q_1' \dots Q_n' \delta(k_1 + \dots + k_n - k) dk_1 \dots dk_n, \quad Q' = 1/2 Q / \delta$$

Вторая сумма в (4.9) заменяется на произведение интегралов типа

$$J(x, t) = \int Z(k) \exp[ikx + tp(k)] dk \quad (\text{A.1})$$

Поведение этого интеграла при больших t определяет тип неустойчивости равновесного состояния. Неустойчивость называется абсолютной, если $|J| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$; если $J \rightarrow 0$, то неустойчивость называется сносной [12]. Вообще говоря, для оценки J необходимо знать свойства $p(k)$ в комплексной k -плоскости. Исключением является рассматриваемый ниже случай, когда в разложении

$$p(k) = p_0 + (k - k_0) iv + 1/2 p_0'' (k - k_0)^2 + \dots$$

групповая скорость $v = \Omega_0'$ мала. Последнее возможно в системах, где $v = 0$ для некоторых λ . При малых v вблизи $k = k_0$ существует точка перевала (определяемая уравнением $p' = 0$), и для J получается

$$J = (-2\pi / tp'')^{1/2} Z(k) e^{ikx + pt} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (\text{A.2})$$

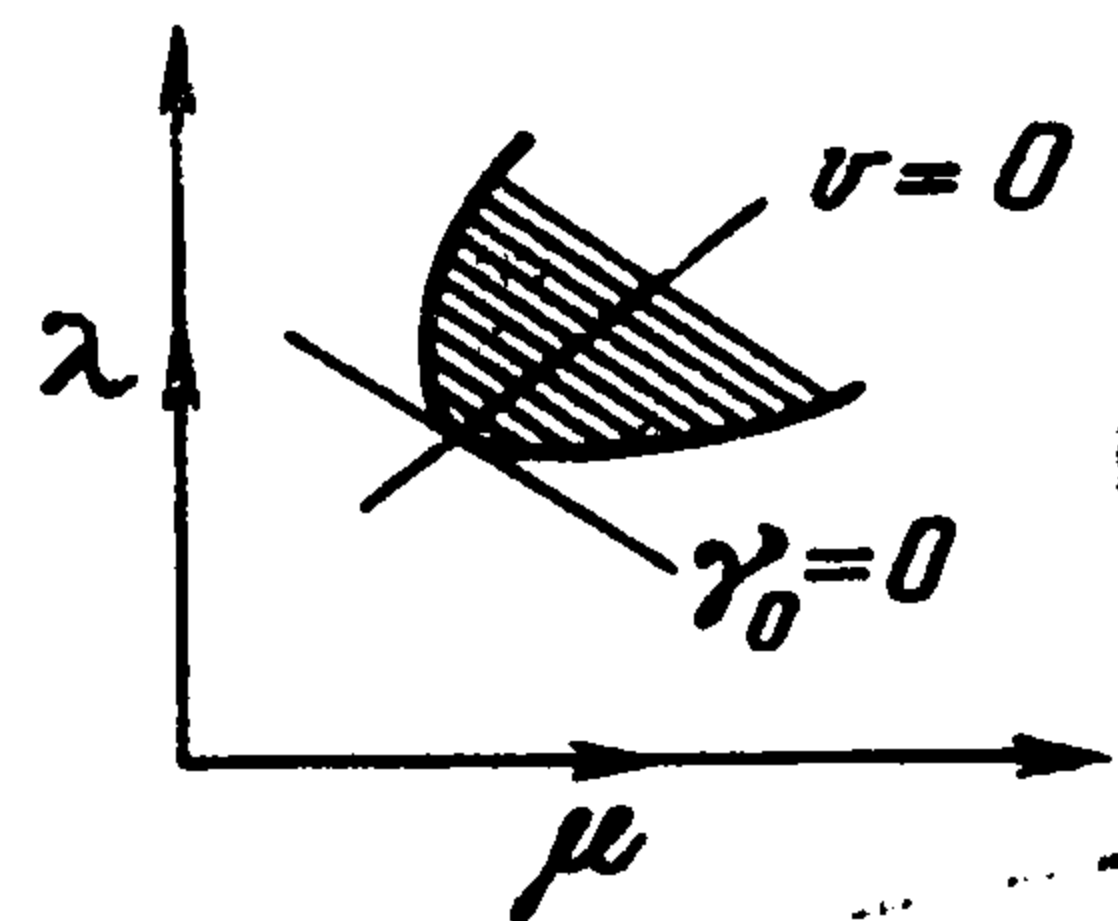
$$k \approx k_0 - iv / p_0'' = \alpha + i\beta, \quad p \approx p_0 + 1/2 v^2 / p_0'' = \gamma + i\Omega, \quad p'' \approx p_0''$$

Пусть в плоскости изменения двух параметров λ, μ кривые $\gamma_0 = v = 0$ пересекаются (фиг. 2). Согласно (A.2) неустойчивость является абсолютной, если

$$\gamma = \gamma_0 + 1/2 \gamma_0'' v^2 / |p_0''|^2 > 0$$

Пусть параметры λ, μ таковы, что неустойчивость абсолютна (фиг. 2, соответствующая область заштрихована). Тогда из (4.6), (4.9), (A.2) получается

$$X_{11} = \sum_{n \geq 0} A \varepsilon |A \varepsilon|^{2n} f_n Z(k + 2ni\beta) \left(-\frac{2\pi}{tp''}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi}{t|p''|}\right)^n \exp[ix(k + 2ni\beta) + (p + 2n\gamma)t] \quad (\text{A.3})$$



Фиг. 2

где $A = A(k)$, а f_n определяется соотношением (4.8), в котором Γ / n заменено на

$$\Gamma(k, k, k) / [2n\gamma + p(k) - p(k + 2ni\beta)] \quad (\text{A.4})$$

причем действительная часть знаменателя считается положительной

$$n < n_0 \sim -\gamma_0 / (\gamma_0'' \beta^2)$$

Если в выражениях для f_n и Z принять $k + 2ni\beta \approx k$, то из (A.3), (A.4), (4.13), (4.14) нетрудно получить

$$X_{11} \approx Z(k) e^{ikx + pt} A \varepsilon \left(-\frac{2\pi}{tp''}\right)^{1/2} \left(1 - B \frac{|A \varepsilon|^2 2\pi \exp(2\gamma t - 2\beta x)}{\gamma t |p''|}\right)^{-1/2 \Gamma / B} \quad (\text{A.5})$$

Это равенство становится точным, если $v = 0$. При $B < 0$ будет

$$X_{11} \rightarrow Z \sqrt{q} \exp i[\alpha x + t(\Omega + qD)], \quad q = -\gamma / B$$

В случае сносной неустойчивости нелинейные эффекты несущественны при любых t , если начальное отклонение от равновесия достаточно мало; возвращение

системы в равновесное состояние удовлетворительно описывается линеаризованными уравнениями.

Из фиг. 2 видно, что при достаточно малой надкритичности неустойчивость является сносовой, если на границе устойчивости $v \neq 0$; это справедливо и для не малых v , поскольку с увеличением v декремент γ увеличивается. В системе координат, движущейся со скоростью $u \approx v$, неустойчивость является сносовой при $\gamma(v-u) \ll 0$ (оценка для $J(x-ut, t)$ получается из (А.2) заменой $v \rightarrow v-u$ и умножением на $\exp(-ik_0ut)$. В случае $u=v$ для $X_{11}(x-vt, t)$ получается (с точностью до множителя $\exp(-ik_0vt)$) выражение (А.5), в котором $v=0$. Необходимо отметить, что это выражение неприменимо в неподвижной координатной системе; как и выражение (А.2) при $v=0$, оно справедливо для значений

$$|x| < (\Delta x) \sim 1/(\Delta k) \sim \sqrt{t|p_0''|} \quad (\text{А.6})$$

Здесь (Δk) — эффективная ширина спектра; в области $|x| > (\Delta x)$, осцилляции J экспоненциально затухают с ростом $|x|$. Фиксированная точка неподвижной системы координат в рассматриваемой системе движется со скоростью $-v$, поэтому для нее (А.6) не выполняется при $t \rightarrow \infty$ (это дает возможность предположить, что в случае абсолютной неустойчивости с $v \neq 0$ возмущение сначала возрастает согласно (А.3, А.5), а затем исчезает).

В ограниченной системе время движения пакета $t \sim 1/(\delta v)$ конечно, поэтому условие (А.6) для $x \sim l$ может выполняться, если $|p_0''|\delta v > 1$; при этом, однако, становится существенной дискретность спектра, и вместо (А.5) следует использовать (4.11), (4.13).

Таким образом, в случае сносовой неустойчивости возникновение периодических движений связано с ограниченностью систем.

Поступила 22 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8, стр. 339.
2. S t u a r t J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 9, p. 353.
3. W a t s o n T. On the non — linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, p. 371.
4. В е д е н о в А. А., П о н о м а р е н к о Ю. Б. О возникновении турбулентности. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 46, вып. 6, стр. 2247.
5. П о н о м а р е н к о Ю. Б. О «жестком» возникновении стационарных движений в гидродинамике. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, стр. 309.
6. П о н о м а р е н к о Ю. Б. Об одном виде стационарного движения в гидродинамике. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, стр. 688.
7. T a y l o r G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Philos. Trans. Soc. A, 1923, vol. 223, p. 289.
8. P u r p W. Über laufende Schichten in der positiven säule von Edelgasen. Physik Z., 1932, vol. 33, s. 844.
9. M a l k u s W., V e r o n i s G. Finite amplitude cellular convection. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, No. 3, p. 225.
10. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1954.
11. Л и н ь - Ц з я - ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
12. Л а н д а у Л. Д., Л и в ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.