Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

РЕЗОНАНСНЫЙ И НЕРЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАИ В ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

Рассматривается задача о возбуждении механических колебаний в линейных колебательных системах. Показано, что решением задачи, полученным методом малого параметра для случая отсутствия резонанса в колебательной системе, можно пользоваться и для определения резонансных колебаний. Приводится также обобщение теоремы И. Г. Малкина и С. Н. Шиманова о периодических решениях квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений ([1]), гл. II, § 9), позволяющее, в частности, распространить эту теорему на задачи о возбуждении колебаний в системах с распределенными параметрами.

1. В случаях, когда перемещения в колебательной системе можно считать малыми по сравнению с характерным размером возбудителей колебаний (пример составляют задачи динамики систем с механическими вибраторами [2–4]), уравнения задачи о возбуждении механических колебаний содержат малый параметр и могут быть записаны в виде

$$\varphi^{\cdot} = \Phi(\varphi, t) + \mu\Theta(\varphi, \xi, \xi^{\cdot}, \xi^{\cdot\cdot}, t, \mu),$$
$$Mu^{\cdot\cdot} + \gamma Bu^{\cdot} + Cu = f\left[\sum_{r=1}^{m} Q_r(\varphi, \varphi^{\cdot})\, q_r + \mu \ldots\right] \qquad (1.1)$$

Здесь $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — вектор, компонентами которого являются величины, применяемые для описания работы (движения) возбудителей, u — N-мерный вектор или элемент некоторого гильбертова пространства H, характеризующий конфигурацию колебательной системы; M, B, C — $N \times N$ матрицы с не зависящими от времени компонентами или линейные операторы в H; $q_1, \ldots, q_m$ — заданные постоянные векторы или элементы H, описывающие распределение развиваемых возбудителями сил по колебательной системе; $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ $\xi_r = (u, q_r)$, $r = 1, \ldots, m$; скобки здесь означают скалярное произведение; $f, \gamma > 0$, $\mu > 0$ — скалярные параметры, из которых последний предполагается достаточно малым.

К виду (1.1) могут быть приведены уравнения задачи о возбуждении механических колебаний и в некоторых из тех случаев, когда указанные выше перемещения следует считать сравнимыми с характерным размером возбудителей. Пример составляют задачи о колебаниях, возбуждаемых электромагнитами [5].

Члены уравнений движения, описывающие обратное влияние колебанийа на работу возбудителей и входящие в $\Theta(\varphi, \xi, \ldots)$, считаются зависящими от величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$, называемых далее «параметрами обратного влияния», а не непосредственно от координат u. Это объясняется тем, что физический смысл величин $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и вид функций Θ (а также Q_r) могут быть обычно определены независимо от вида колебательной системы и способа введения координат u. Последние определяют только векторы q_r. В случае электромагнитов параметры обратного влияния — расстояния между их якорями и сердечниками [5], в случае механических вибраторов— перемещения их осей [4].

Последующие выводы распространяются как на автономные, так и на неавтономные системы, однако далее рассматривается лишь неавтономный случай. Правые части уравнений (1.1) предполагаются 2π-периодическими по явно входящему времени t; принимаются также обычные [1] предположения об их гладкости. Рассматриваются 2π-периодические решения.

При исследовании колебаний, возбуждаемых некоторым возбудителем в линейных колебательных системах, приходится порознь разбирать два случая — резонансный и нерезонансный, отвечающие разным свойствам решения задачи о вынужденных колебаниях колебательной системы под действием заданных сил. Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний колебательной системы под действием некоторой 2π-периодически изменяющейся во времени нагрузки, распределенной по колебательной системе по закону, описываемому одним из векторов q_r:

$$Mu_r^{\cdot\cdot} + \gamma Bu_r^{\cdot} + Cu_r = F(t)\, q_r \tag{1.2}$$

и вычислим для 2π-периодического решения этого уравнения параметры обратного влияния $\xi_{r1},\ldots, \xi_{rm}$. Для колебательных систем, рассматриваемых в нерезонансном случае, при любой достаточно гладкой $F(t)$ должно быть $\varkappa_{rs} = (\max|\xi_{rs}|) : (\max|F(t)|) = O(1)$ для $r,\ s = 1,\ldots, m$. В резонансном случае $\varkappa_{rs}=O(1/\mu)$, по крайней мере, для одной пары $r,\ s$. При этом в соответствии с техническим смыслом задачи в нерезонансном случае параметр f нужно предполагать немалым, т. е. $f = O(1)$, в резонансном следует считать $f = O(\mu)$.

Пусть известны 2π-периодические решения

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(0)}(t,\ \alpha),\quad \varphi^{(0)}= (\varphi_1^{(0)}, \ldots, \varphi_k^{(0)}),\quad \alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_j)$$

системы

$$\varphi^{(0)\prime\prime} = \Phi(\varphi^{(0)},\ t) \tag{1.3}$$

образующие семейство[1] с j постоянными $\alpha_1,\ldots, \alpha_j$. Пусть известны также периодические периода 2π решения $z_{1i},\ldots, z_{ki}$ $(i = 1,\ldots, j)$ системы, сопряженной системе в вариациях уравнений (1.3) (1.4)

$$z_\beta^{\cdot\cdot} + p_{1\beta}z_1 + \ldots + p_{k\beta}z_k = 0 \quad (\beta=1,\ldots, n),\quad p_{r\beta}= \left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial\varphi_\beta}\right)_{\varphi=\varphi^{(0)}} \qquad (r,\ \beta=1,\ldots,k)$$

Предполагается, что таких решений ровно j. Используем то обстоятельство, что функции Φ, Θ и Q_r определяются только свойствами возбудителей и не зависят от вида колебательной системы. Тогда выражения для параметров порождающего решения $\alpha_1,\ldots, \alpha_j$ и вынуждающих сил $Q_r^{(0)}$, подсчитанных по порождающему решению, а также условия устойчивости могут быть в нерезонансном случае записаны так,

[1] Случай изолированного порождающего решения в задачах о возбуждении колебаний интереса не представляет; отметим также, что в случае малых вибрационных сил имеет смысл определять только порождающее решение [4].

чтобы они содержали как параметры компоненты матричных амплитудно- и фазочастотных характеристик колебательной системы. Делается это следующим образом.

Подставляя (1.3) в $Q_r(\varphi, \varphi^{\cdot})$ и разлагая последние в тригонометрические полиномы (как получается, например, в [4,5]) или (в общем случае) в ряды Фурье, получим

$$Q_r^{(0)}(t, \alpha) = \sum_\nu Q_{r\nu}^{(0)}(\alpha)\cos(\nu t - \vartheta_{r\nu}(\alpha)) \qquad (r = 1, \ldots, m) \qquad (1.5)$$

Введем в рассмотрение матрицы $K_\nu = \| k_\nu^{(rs)} \|$ и $\Psi_\nu = \| \psi_\nu^{(rs)} \|$, определяющие амплитуды и фазовые сдвиги параметров обратного влияния при установившихся колебаниях колебательной системы, возбуждаемых заданными единичными гармоническими силами частоты ν. Величины $k_\nu^{(rs)}$ и $\psi_\nu^{(rs)}$ задаются равенствами

$$\xi_\nu^{(rs)} = k_\nu^{(rs)}\cos(\nu t - \psi_\nu^{(rs)}), \qquad \xi_\nu^{(rs)} = (u_\nu^{(r)}, q_s) \qquad (1.6)$$

Здесь $u_\nu^{(r)}$ суть $2\pi/\nu$-периодические решения уравнений

$$Mu_\nu^{(r)\cdot\cdot} + \gamma B u_\nu^{(r)\cdot} + C u_\nu^{(r)} = \cos \nu t q_r \qquad (1.7)$$

Запишем теперь выражения для параметров обратного влияния, подсчитанных по порождающему решению, содержащие компоненты матриц K_ν и Ψ_ν как параметры

$$\xi_s^{(0)} = \sum_{r=1}^{m} \sum_\nu Q_{r\nu}^{(0)}(\alpha) f k_\nu^{(rs)} \cos(\nu t - \vartheta_{r\nu}(\alpha) - \psi_\nu^{(rs)}) \qquad (s = 1, \ldots, m) \qquad (1.8)$$

Подставляя далее (1.3) и (1.8) в малые части первых k уравнений (1.1) (вектор — результат подстановки обозначается далее через Θ_0) и составляя обычным [1] образом уравнения для определения параметров порождающего решения, получим j уравнений

$$P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, fK_\nu, \Psi_\nu, \ldots) \equiv \qquad (i = 1, \ldots, j) \qquad (1.9)$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{\beta=1}^{k} \Theta_{0\beta}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, fK_\nu, \Psi_\nu, \ldots) z_{\beta i}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_j)\, dt = 0$$

Здесь индекс ν принимает все или часть тех значений, что и в (1.5).

Если найти теперь параметры $\alpha_1 = \alpha_1^*, \ldots, \alpha_j = \alpha_j^*$, образующие решение уравнений (1.9) как функции компонент матриц K_ν и Ψ_ν, и подставить результат в (1.5), то полученные таким образом соотношения

$$\alpha_i^* = \alpha_i^*(\ldots, fK_\nu, \Psi_\nu, \ldots) \qquad (i = 1, \ldots, j) \qquad (1.10)$$

$$\xi_r = \xi_r(t, \ldots, fK_\nu, \Psi_\nu, \ldots), \qquad Q_r^{(0)} = Q_r^{(0)}(t, \ldots, fK_\nu, \Psi_\nu, \ldots) \quad (r = 1, \ldots, m)$$

дадут возможность определить колебания, возбуждаемые данными возбудителями в любой линейной колебательной системе, как только для этой системы будут найдены матрицы K_ν и Ψ_ν для всех ν, входящих в (1.9) т. е. будет решена задача о вынужденных колебаниях [1]. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы показать, что этими соотношениями можно пользоваться и в резонансном случае.

[1] Соответствующее рассмотрение задачи о синхронизации механических вибраторов проведено в [4], о колебаниях, возбуждаемых электромагнитами, —в [5].

2. Матрицы K_ν и Ψ_ν могут быть определены как для колебательных систем с конечным числом степеней свободы, так и для систем с распределенными параметрами, поэтому описанный выше способ сведения задачи о возбуждений колебаний к задаче о вынужденных колебаниях формально охватывает оба этих типа систем. Однако в случаях, когда колебательная система схематизируется в виде системы с распределенными параметрами, возникает вопрос о существовании у системы (1.1) периодических решений и о сходимости к ним обычных в методе малого параметра последовательных приближений. Полезным здесь может быть следующее простое обобщение теоремы, доказанной И. Г. Малкиным и усиленной С. Н. Шимановым ([1], гл. II, § 9).

Пусть дана физическая система, состояние которой характеризуется элементом u некоторого линейного пространства U, и в U определены m линейных функционалов $\xi_1(u),\ldots, \xi_m(u)$. Пусть периодическое решение уравнений движения системы под действием заданных периодических сил (это могут быть уравнения в частных производных, уравнения с запаздыванием и т. п.) ставит в соответствие m задаваемым 2π-периодическим функциям $F_1(t),\ldots, F_m(t)$ (их можно рассматривать как величины нагрузок) 2π-периодическую функцию $u(t)$; это соответствие предполагается линейным. Используем обозначение $u(t) \leftarrow (F_1(t),\ldots, F_m(t))$. Пусть для любых 2π-периодических функций $F_1,\ldots, F_m$, имеющих непрерывную [1] первую производную, 2π-периодическая функция $u(t)$ существует и единственна.

Назовем в соответствии с [6] систему с указанными свойствами, обладающей «ослабленным обобщенным свойством фильтра на классе функций с непрерывной первой производной», если для любой $F(t)$ из данного класса выполняются неравенства

$$\max_t |\xi_s(u_r(t))| < h_{rs} \max_t |F(t)| \qquad (r,\ s=1,\ldots,m) \tag{2.1}$$
$$u_r(t) \leftarrow (0,\ldots,F_r(t)=F(t),\ldots,0), \qquad h_{rs}>0$$

Здесь h_{rs} — некоторые постоянные. Рассмотрим систему

$$\varphi_s^{\cdot} = a_{s1}\varphi_1+\ldots+a_{sk}\varphi_k+\eta_s(t)+\mu\Theta_s(\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\ \xi_1,\ldots,\xi_m,\ t,\ \mu) \qquad (s=1,\ldots,k$$
$$u(t)\leftarrow(Q_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_k),\ldots,Q_m(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)),\qquad \xi_1=\xi_1(u),\ldots,\xi_m=\xi_m(u) \tag{2.2}$$

где $u(t)$ отвечает системе, обладающей указанным выше свойством фильтра. Будем считать, что функции $Q_1,\ldots,Q_m$ определены в некоторой области G пространства переменных $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ и в этой области имеют непрерывные вторые производные по всем своим аргументам. Относительно гладкости остальных функций примем те же предположения, что и в [1], гл. II, § 9 (переменные ξ_r в этом смысле приравниваются к φ_s); замкнутую область пространства переменных $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$, $\xi_1,\ldots,\xi_m$, где определены функции Θ_s, обозначим через G_*; функции η_s и Θ_s предположим 2π-периодическими по явно входящему времени t. Предположим также, что система

$$\varphi_s^{(0)\cdot} = a_{s1}\varphi_1^{(0)}+\ldots+a_{sk}\varphi_k^{(0)}+\eta_s(t) \qquad (s=1,\ \ldots,\ k) \tag{2.3}$$

пускает семейство 2π-периодических решений с j постоянными

$$\varphi_s^{(0)} = \varphi_s^{(0)}(t,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_j) \tag{2.4}$$

(соответствующие этому требования к коэффициентам (2.3) и к $\eta_s(t)$ и вид решений указаны в [1], гл. II, §4). Составим систему уравнений (2.5)

$$P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_j) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{\beta=1}^{k}\Theta_\beta(\varphi_1^{(0)},\ldots,\varphi_k^{(0)},\ \xi_1^{(0)},\ldots,\xi_m^{(0)},\ t,\ 0)\, z_{\beta i}(t)\,dt = 0$$
$$(i=1,\ \ldots,\ j)$$
$$\xi_r^{(0)}(t,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_j) = \xi_r(u^{(0)}(t)),\quad u^{(0)}(t) \leftarrow (Q_1(\varphi_1^{(0)},\ \ldots,\ \varphi_k^{(0)}),\ \ldots,\ Q_m(\varphi_1^{(0)},\ \ldots,\ \varphi_k^{(0)}))$$

[1] Периодические решения задачи о вынужденных колебаниях практически интересных колебательных систем определены для значительно более широкого класса нагрузок. Сделанное ограничение здесь необходимо по тем же причинам, что и ограничения на малые члены системы, рассматриваемой в § 9 гл. II [1].

где функции $z_{\beta i}$ ($\beta = 1,\ldots, k$; $i = 1,\ldots,j$) образуют j периодических решений системы, сопряженной однородной системе, получаемой из (2.3) при $\eta_s(t) \equiv 0$.

Обобщением теоремы § 9 гл. II [1] является следующее утверждение.

Пусть система (2.5) допускает простое решение

$$\alpha_1 = \alpha_1^*, \ldots, \alpha_j = \alpha_j^*$$

такое, что

$$\varphi_{1*}^{(0)}, \ldots, \varphi_{k*}^{(0)} \in G, \qquad \varphi_{1*}^{(0)}, \ldots, \varphi_{k*}^{(0)}, \ \xi_{1*}^{(0)}, \ldots, \xi_{m*}^{(0)} \in G_* \quad \text{при } t \geqslant 0$$

$$\varphi_{1*}^{(0)} = \varphi_1^{(0)}(t, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_j^*) \qquad \text{и т. д.}$$

Тогда при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, где μ_0 — некоторая постоянная, система (2.2) допускает 2π-периодическое решение такое, что отвечающие ему функции $\varphi_1(t, \mu),\ldots, \varphi_k(t, \mu)$, $\xi_1(t, \mu),\ldots, \xi_m(t, \mu)$ при $t \geqslant 0$ остаются в G и G_*; обращаются при $\mu=0$ в $\varphi_{1*}^{(0)}(t),\ldots$ $\ldots, \xi_{m*}^{(0)}(t)$, и к решению $\varphi_1(t, \mu), \ldots, \xi_m(t, \mu)$ равномерно сходятся последовательности 2π-периодических функций $\varphi_1^{(\rho)}(t, \mu),\ldots, \xi_m^{(\rho)}(t, \mu)$ ($\rho = 1,2,\ldots$), определяемые из уравнений

$$\varphi_s^{(\rho)\cdot} = a_{s1}\varphi_s^{(\rho)} + \ldots + a_{sk}\varphi_k^{(\rho)} + \eta_s(t) + \tag{2.6}$$
$$+ \mu\Theta_s(\varphi_1^{(\rho-1)}, \ldots, \varphi_k^{(\rho-1)}, \xi_1^{(\rho-1)}, \ldots, \xi_m^{(\rho-1)}, t, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

$$u^{(\rho)} \leftarrow (Q_1(\varphi_1^{(\rho)}, \ldots, \varphi_k^{(\rho)}), \ldots, Q_m(\varphi_1^{(\rho)}, \ldots, \varphi_k^{(\rho)}))$$

Для доказательства достаточно повторить доказательство теоремы § 9 гл. II [1] (довольно сложное ввиду необходимости оценки возникающих на каждом этапе постоянных); необходимо только при получении всех нужных оценок составлять неравенства, связывающие величины $|\xi_r^{(\rho)} - \xi_r^{(\rho-1)}|$ с величинами $|\varphi_1^{(\rho)} - \varphi_1^{(\rho-1)}|,\ldots$ $\ldots, |\varphi_k^{(\rho)} - \varphi_k^{(\rho-1)}|$. Это возможно, так как, в силу (2.1) величины $|\xi_r^{(\rho)} - \xi_r^{(\rho-1)}|$ могут быть оценены через

$$|Q_s(\varphi_1^{(\rho)}, \ldots, \varphi_k^{(\rho)}) - Q_s(\varphi_1^{(\rho-1)}, \ldots, \varphi_k^{(\rho-1)})| \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

а последние при помощи условий Липшица для Q_s оцениваются через

$$|\varphi_r^{(\rho)} - \varphi_r^{(\rho-1)}| \qquad (r = 1, \ldots, k)$$

Если в U определен предел, то в ряде случаев можно показать и сходимость к решению последовательности $u^{(\rho)}$.

Теоремы, подобные данной, позволяют распространить результаты метода малого параметра, установленные для систем с конечным числом степеней свободы, на системы, обладающие указанным выше ослабленным свойством фильтра. Ряд результатов такого рода для различных приближенных методов разыскания периодических решений получен в последнее время Е. Н. Розенвассером при анализе соответствующих интегральных уравнений [6]. Приведенное выше утверждение показывает, что в этом смысле не составляет исключение и метод малого параметра в случае семейства порождающих решений.

3. Описанный в п. 1 процесс, при помощи которого решение задачи о возбуждении колебаний сводится к составлению соотношений (1.10) и к решению задачи о вынужденных колебаниях, в резонансном случае неприменим. Периодические решения в этом случае определяются при помощи специальной резонансной процедуры, которая состоит в следующем. Ограничимся рассмотрением колебательных систем с конечным числом степеней свободы. Из указанных ранее предположений следует,

что для колебательных систем, рассматриваемых в резонансном случае, справедливы соотношения

$$M = M_0 + \mu d M_1, \quad C = C_0 + \mu c C_1, \quad \gamma = \mu g, \quad f = \mu f_1 \tag{3.1}$$

где матрицы M_0 и C_0 таковы, что полином $\Delta_N(\lambda)$:

$$\Delta_N(\lambda) = \det \| C_0 - \lambda M_0 \| \tag{3.2}$$

имеет некоторое число корней, равных квадратам натуральных чисел.

Система (1.1), таким образом, принимает вид

$$\varphi^{\cdot} = \Phi(\varphi, t) + \mu\,\Theta(\varphi, \xi^{\cdot}, \xi^{\cdot\cdot}, \xi^{\cdot\cdot}, t, \mu) \tag{3.3}$$

$$M_0 u^{\cdot\cdot} + C_0 u = -\mu\left[d M_1 u^{\cdot\cdot} + g B u^{\cdot} + c C_1 u - f_1 \sum_{r=1}^{m} Q_r(\varphi, \varphi^{\cdot})\, q_r\right] + \mu^2 \ldots$$

Далее предполагается, что, по крайней мере, одно из чисел d, c, g отлично от нуля; случай $d = c = g = 0$ отвечает колебательной системе без трения при настройке точно в резонанс и интереса не представляет.

Пусть полином $\Delta_N(\lambda)$ имеет h корней $\nu_1^2, \ldots, \nu_h^2$, равных квадратам натуральных чисел (каждый корень учитывается здесь столько раз, какова его кратность), а остальные $N - h$ корней отличаются от квадратов натуральных чисел на величины порядка единицы относительно μ.

Будем считать матрицы M, M_0, C, C_0, B симметричными, матрицы C, C_0 и B — неотрицательными, а матрицы M и M_0 — положительно определенными; эти предположения согласуются с физическим смыслом задачи.

Тогда 2π-периодические решения порождающей системы, получаемой из системы (3.3) при $\mu = 0$, составят семейство с $j + 2h$ постоянными $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$, $A_{11}, \ldots, A_{\varkappa\rho_\varkappa}$, $D_{11}, \ldots, D_{\varkappa\rho_\varkappa}$. Эти решения имеют вид

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(0)}(t, \alpha), \qquad u^{(0)} = \sum_{n=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_n} (A_{n\rho} \cos \nu_n t + D_{n\rho} \sin \nu_n t)\, u_{n\rho} \tag{3.4}$$

Здесь ρ_n — кратность корня $\lambda = \nu_n^2$ полинома $\Delta_N(\lambda)$; $\varkappa$ — число различных корней указанного вида; очевидно, $\rho_1 + \ldots + \rho_\varkappa = h$. Отметим, что при принятых предположениях кратным корням полинома $\Delta_N(\lambda)$ отвечают линейные элементарные делители [7], а собственные векторы $u_{11}, \ldots, u_{\varkappa\rho_\varkappa}$, $u_{h+1}, \ldots, u_N$, где последние $N - h$ векторов соответствуют корням, отличным от квадратов натуральных чисел, образуют базис в пространстве конфигураций колебательной системы. Этот базис считаем ортонормированным в том смысле, что

$$(M_0 u_\rho, u_\varkappa) = \delta_{\rho\varkappa} \tag{3.5}$$

где u_ρ, $u_\varkappa$ — любые два собственных вектора, $\delta_{\rho\varkappa}$ — символ Кронекера.

Первые j уравнений для определения параметров порождающего резонансного решения составляются аналогично уравнениям (1.9). Они имеют вид

$$P_i^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, A_{11}, \ldots, A_{\varkappa\rho_\varkappa}, D_{11}, \ldots, D_{\varkappa\rho_\varkappa}) \equiv \qquad (i = 1, \ldots, j) \tag{3.6}$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\beta=1}^{k} \Theta_{0\beta}^*(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, A_{11}, \ldots, A_{\varkappa\rho_\varkappa}, D_{11}, \ldots, D_{\varkappa\rho_\varkappa})\, z_{\beta i}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_j)\, dt = 0$$

Здесь $\Theta_{0\beta}^*$ — компоненты вектора $\Theta(\varphi_j^{(0)}, \xi^{(0)}, \xi^{(0)\cdot}, \xi^{(0)\cdot\cdot}, t, 0)$; входящий сюда вектор параметров обратного влияния $\xi^{(0)}$ должен быть найден как функция постоянных $A_{11},\ldots, D_{\varkappa\rho_\varkappa}$, согласно соотношениям $\xi_s^{(0)} = (u^{(0)}, q_s)$ из (3.4).

Остальные $2h$ уравнений получаются из условия, чтобы формы косинусной и синусной составляющих частоты ν_n $(n = 1, \ldots, \varkappa)$ правой части второго уравнения (3.3) были ортогональны всем отвечающим числу ν_n^2 собственным векторам $u_{n1}, \ldots, u_{n\rho_n}$. Запишем эти уравнения в форме [1]

$$P_{j+n+\rho}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, A_{n1}, \ldots, A_{n\rho_n}, D_{n1}, \ldots, D_{n\rho_n}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\beta=1}^{\rho_n} [((cC_1 - \nu_n^2 dM_1) u_{n\beta}, u_{n\rho}) A_{n\beta} + g\nu_n (Bu_{n\beta}, u_{n\rho}) D_{n\beta}] -$$

$$- f_1 \sum_{r=1}^{m} Q_{r\nu_n}^{(0)} (\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \cos \vartheta_{r\nu_n} (\alpha_1, \ldots, \alpha_j)(q_r, u_{n\rho}) = 0$$

$$P_{j+n+\rho}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, A_{n1}, \ldots, A_{n\rho_n}, D_{n1}, \ldots, D_{n\rho_n}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\beta=1}^{\rho_n} [-g\nu_n (Bu_{n\beta}, u_{n\rho}) A_{n\beta} + ((cC_1 - \nu_n^2 dM_1) u_{n\beta}, u_{n\rho}) D_{n\beta}] -$$

$$- f_1 \sum_{r=1}^{m} Q_{r\nu_n}^{(0)} (\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \sin \vartheta_{r\nu_n} (\alpha_1, \ldots, \alpha_j)(q_r, u_{n\rho}) = 0$$

$$(\rho = 1, \ldots, \rho_n;\ n = 1, \ldots, \varkappa) \qquad (3.7)$$

Резонансная процедура решения задачи заключается в составлении уравнений (3.6), (3.7), определении из них параметров порождающего решения и т. д.

Рассмотрим некоторую колебательную систему, характеризующуюся каким-либом числом параметров (величин масс, жесткостей, коэффициентов трения и т. п.). Область пространства параметров, в которой справедливы соотношения (3.1), назовем резонансной, область, в которой справедливы нерезонансные предположения, указанные в п. 1,— нерезонансной. Представим матрицы M и C в виде

$$M = M_0 + \delta M_1, \qquad C = C_0 + \sigma C_1 \qquad (3.8)$$

В нерезонансной области справедливы соотношения (1.10)

$$\alpha_i^* = \alpha_i^* (\ldots, fK_\nu, \Psi_\nu, \ldots) \qquad (i = 1, \ldots, j) \qquad (3.9)$$

Заметим, что при достаточно малом μ матрицы K_ν и Ψ_ν существуют и в точках резонансной области (случай $d = c = g = 0$ исключен), причем здесь $k_{\nu_n}^{(rs)} = O(1/\mu)$, а произведение $fk_{\nu_n}^{(rs)} = O(1)$. Выберем точку в резонансной области и предположим, что функции α_i^* определены в некоторой области пространства своих аргументов, непрерывны в ней по их совокупности и величины $fk_{\nu_n}^{(rs)}(n = 1,\ldots, \varkappa;\ r, s = 1,\ldots, m)$, подсчитанные для выбранной точки (в этой точке $f = \mu f_1$, $\sigma = \mu c$, $\delta = \mu d$, $\gamma = \mu g$), принадлежат области определения функций α_i^*. Определим α_i^* в рассматриваемой точке резонансной области соотношениями (3.9).

[1] Здесь предполагается, что все ν_n $(n = 1,\ldots, \varkappa)$ входят в разложения (1.5); в противном случае члены с ν_n, отсутствующими в (1.5), просто не войдут в (3.4).

Покажем теперь, что заданные таким образом величины α_i^* связаны с величинами α_i^{**}, определяемыми для данной точки резонансной области из уравнений (3.6), (3.7), соотношениями

$$\alpha_i^{**} = \alpha_i^* + O(\mu) \qquad (i = 1, \ldots, j) \tag{3.10}$$

Рассмотрим для этого уравнение вынужденных колебаний колебательной системы, возбуждаемых нагрузкой, подсчитанной по порождающему решению при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$:

$$Mu^{(0)\cdot\cdot} + \gamma Bu^{\cdot} + Cu = f \sum_{r=1}^{m} Q_r(\varphi^{(0)}(t, \alpha))\, q_r \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) допускает периодическое периода 2π решение в любой точке нерезонансной области. Будем искать его в виде

$$u^{(0)} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{\nu} (u_{\nu 1}^{(r)} \cos \nu t + u_{\nu_2}^{(r)} \sin \nu t) \tag{3.12}$$

Для определения коэффициентов Фурье $u_{\nu_1}{}^{(r)}$ и $u_{\nu_2}{}^{(r)}$ в соответствии с (1.5) получим

$$(C - \nu^2 M)\, u_{\nu 1}^{(r)} \pm \gamma \nu B u_{\nu 2}^{(r)} = f Q_{r\nu}^{(0)} \cos \vartheta_{r\nu}\, q_r$$

$$-\gamma \nu B u_{\nu 1}^{(r)} + (C - \nu^2 M)\, u_{\nu 2}^{(r)} = f Q_{r\nu}^{(0)} \sin \vartheta_{r\nu}\, q_r \tag{3.13}$$

Решение уравнений (3.13) ищем в виде разложений по векторам $u_{11}, \ldots, u_{\varkappa\rho_\varkappa}, u_{h+1}, \ldots, u_N$

$$u_{\nu 1}^{(r)} = \sum_{n=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_n} v_{r\nu}^{(n,\rho)} u_{n\rho} + \sum_{l=h+1}^{N} v_{r\nu}^{(l)} u_l, \qquad u_{\nu 2}^{(r)} = \sum_{n=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_n} w_{r\nu}^{(n,\rho)} u_{n\rho} + \sum_{l=h+1}^{N} w_{r\nu}^{(l)} u_l \tag{3.14}$$

Это возможно, так как эти векторы образуют базис в пространстве конфигураций колебательной системы.

Для разыскания коэффициентов разложений (3.14) получается система $2N$ линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{n=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_n} [((C - \nu^2 M)\, u_{n\rho}, u_\eta)\, v_{r\nu}^{(n,\rho)} + \nu\gamma\, (Bu_{n\rho}, u_\eta)\, w_{r\nu}^{(n,\rho)}] + \tag{3.15}$$

$$+ \sum_{l=h+1}^{N} [((C - \nu^2 M)\, ul, u_\eta)\, v_{r\nu}^{(l)} + \nu\gamma\, (Bu_l, u_\eta)\, w_{r\nu}^{(l)}] - f Q_{r\nu}^{(0)} \cos \vartheta_{r\nu}\, (q_r, u_\eta) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_n} [-\nu\gamma\, (Bu_{n\rho}, u_\eta)\, v_{r\nu}^{(n,\rho)} + ((C - \nu^2 M)\, u_{n\rho}, u_\eta)\, w_{r\nu}^{(n,\rho)}] +$$

$$+ \sum_{l=h+1}^{N} [-\nu\gamma\, (Bu_l, u_\eta)\, v_{r\nu}^{(l)} + ((C - \nu^2 M)\, u_l, u_\eta)\, w_{r\nu}^{(l)}] - f Q_{r\nu}^{(0)} \sin \vartheta_{r\nu}\, (q_r, u_\eta) = 0$$

Здесь u_η — некоторый собственный вектор; уравнения (3.15) составляются для каждого из N векторов $u_{11}, \ldots, u_{\varkappa\rho_\varkappa}, u_{h+1}, \ldots, u_N$.

Все системы уравнений (3.15) разрешимы в нерезонансной области. Если для некоторой точки этой области найти из них $v_{r\nu}^{(n,\rho)}$ и $w_{r\nu}^{(n,\rho)}$ как функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$, определить из (3.14) и (3.12) решение уравнения (3.11), вычислить для него параметры обратного влияния, подставить их в малые члены (1.1), осреднить и найти $\alpha_1^*, \ldots, \alpha^*_j$, то получим значения $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_j^*$, определяемые из (3.9) при значениях fK_ν, Ψ_ν, соответствующих данной точке. Указанные системы разрешимы и в выбранной ранее точке резонансной области, а описанные операции приводят к значениям $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_j^*$, отвечающим этой точке.

Выясним вид уравнений (3.15) в резонансной области, для чего положим в них $M = M_0 + \mu dM_1$, $C = C_0 + \mu c C_1$, $\gamma = \mu g$, $f = \mu f_1$. Пусть ν в (3.15) равно некоторому ν_n из $\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa$. Учитывая условия ортонормированности (3.5), получим:

а) для значений индекса η в (3.15), отвечающих векторам $u_{n1}, \ldots, u_{n\rho_n}$

$$\sum_{\beta=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_\beta} [((cC_1 - \nu_n^2 dM_1) u_{\beta\rho}, u_{ns}) v_{r\nu_n}^{(\beta,\rho)} + \nu_n g (B u_{\beta\rho}, u_{ns}) w_{r\nu_n}^{(\beta,\rho)}] +$$
$$+ \sum_{l=h+1}^{N} [((cC_1 - \nu_n^2 dM_1) u_l, u_{ns}) v_{r\nu_n}^{(l)} + \nu_n g (B u_l, u_{ns}) w_{r\nu_n}^{(l)}] -$$
$$- f_1 Q_{r\nu_n}^{(0)} \cos \vartheta_{r\nu_n} (q_r, u_{ns}) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, \rho_n) \tag{3.16}$$

б) для прочих значений η

$$(\nu_\eta^2 - \nu_n^2) v_{r\nu_n}^{(\eta)} + \mu \Big\{ \sum_{\beta=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_\beta} [((cC_1 - \nu_n^2 dM_1) u_{\beta\rho}, u_\eta) v_{r\nu_n}^{(\beta,\rho)} +$$
$$+ \nu g (B u_{\beta\rho}, u_\eta) w_{r\nu_n}^{(\beta,\rho)}] + \sum_{l=h+1}^{N} [((cC_1 - \nu_n^2 dM_1) u_l, u_\eta) v_{r\nu_n}^{(l)} +$$
$$+ \nu g (B u_l, u_\eta) w_{r\nu_n}^{(l)}] \Big\} - \mu f_1 Q_{r\nu_n}^{(0)} \cos \vartheta_{r\nu_n} (q_r, u_\eta) = 0 \tag{3.17}$$

В (3.16) и (3.17) приведены лишь «косинусные» уравнения, т. е. отвечающие первому уравнению (3.15); «синусные» уравнения записываются аналогично. Что касается уравнений, соответствующих значениям $\nu \overline{\in} (\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa)$, то все они будут иметь вид уравнений (3.17).

Из рассмотрения (3.16), (3.17) следует, что

$$v_{r\nu_n}^{(n,\rho)}, w_{r\nu_n}^{(n,\rho)} = O(1) \qquad (\rho = 1, \ldots, \rho_n, n = 1, \ldots, \varkappa); \qquad v_{r\nu}^{(\eta)}, \quad w_{r\nu}^{(\eta)} = O(\mu)$$

при всех прочих значениях ν и η. Отсюда, из (3.12) и (3.14) после суммирования по r получим

$$u^{(0)} = \sum_{n=1}^{\varkappa} \sum_{\rho=1}^{\rho_n} (v_{\nu_n}^{(n,\rho)} \cos \nu_n t + w_{\nu_n}^{(n,\rho)} \sin \nu_n t) u_{n\rho} + O(\mu) \tag{3.18}$$

Уравнения (3.16) и соответствующие синусные уравнения после суммирования по r дают (см. (3.7))

$$P_{j+n+\rho} (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, v_{\nu_n}^{(n,1)}, \ldots, v_{\nu_n}^{(n,\rho_n)}, w_{\nu_n}^{(n,1)}, \ldots, w_{\nu_n}^{(n,\rho_n)}) + O(\mu) = 0$$
$$P_{j+n+\rho}^* (\ldots) + O(\mu) = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, \rho_n, \; n = 1, \ldots, \varkappa) \tag{3.19}$$

В результате приходим к соотношениям

$$v_{\nu_n}^{(n,\rho)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = A_{n\rho}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) + O(\mu),\ w_{\nu_n}^{(n,\rho)}(\ldots) = D_{n\rho}(\ldots) \qquad (3.20)$$

Тем самым показано следующее. Если для точки резонансной области определить с помощью нерезонансной процедуры параметры обратного влияния как функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$, то с точностью до величин порядка малого параметра получится тот же результат, что и в случае, когда параметры обратного влияния вычислены согласно второму равенству (3.4) в котором $A_{n\rho}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ и $D_{n\rho}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ найдены из (3.7). Иначе говоря, если подсчитать для точки резонансной области коэффициенты влияния $k_\nu^{(rs)}$ и фазы $\psi_\nu^{(rs)}$ и, не обращая внимания на то что $k_{\nu_n}^{(rs)} = O(1/\mu)$, воспользоваться соотношениями (1.10), то найденные из этих соотношений величины $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_j^*$ совпадут (с точностью до малых порядка μ) с их значениями $\alpha_1^{**}, \ldots, \alpha_j^{**}$, найденными с помощью резонансной процедуры. Тем самым показана справедливость равенств (3.10) и установлено, что соотношениями (1.10) можно пользоваться и в резонансном случае.

Обратный переход — использование резонансного решения для определения нерезонансных колебаний — эквивалентен удержанию в разложении решения уравнения (3.12) в ряд Фурье и в разложениях коэффициентов по собственным векторам u_η только тех членов, которые вносят вклад порядка единицы в исходной резонансной области, и пренебрежению остальными членами. Если (1.5) не содержат значений ν, не входящих в (3.4), а векторы q_r — линейные комбинации векторов $u_{n\rho}$ (последнее, очевидно, обязательно выполняется для колебательной системы с одной степенью свободы), то резонансное порождающее решение везде совпадает с нерезонансным.

Из приведенных выше выводов следует, что если интересоваться только построением решения, то для системы типа (1.1) особое рассмотрение резонансного случая излишне. Представляет интерес сравнить в этом смысле и условия устойчивости в обоих рассмотренных случаях. Так, например, в задаче о колебаниях, возбуждаемых вращающимся неуравновешенным телом, условия устойчивости, полученные в [4] из рассмотрения вибратора как объекта, близкого к консервативному в нерезонансных предположениях, совпадают с соответствующим условием, полученным В. О. Кононенко в [4] фактически при помощи резонансной процедуры.

Поступила 31 VIII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Блехман И. И. Проблема синхронизации динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., Изд-во «Наука», 1964.
4. Ходжаев К. Ш. Синхронизация механических вибраторов, связанных с линейной колебательной системой. Инж. ж., МТТ, 1967, № 4.
5. Ходжаев К. Ш. Колебапия в системе со многими электромагнитными возбудителями. Инж. ж., МТТ, 1966, № 2.
6. Розенвассер Е. Н. Применение интегральных уравнений для построения и обоснования приближенного метода определения периодических движений нелинейных систем. Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. т. 1, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.