

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИГРОВОЙ ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

Н. Н. Красовский, В. Е. Третьяков

(Свердловск)

Обсуждается нерегулярный характер задачи [1-4] о минимаксе времени до встречи двух линейных одноподобных объектов. Задача регуляризуется за счет введения дискретной схемы изменения прогнозируемого момента встречи. В эффективной форме строится стратегия, обеспечивающая для преследователя с точностью до сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в известной мере наилучший возможный результат.

§ 1. Предположим, что движения преследующего $y(t)$ и преследуемого $z(t)$ объектов описываются линейными дифференциальными уравнениями

$$dy/dt = Ay + Bu \quad (1.1)$$

$$dz/dt = Az + Bv \quad (1.2)$$

Здесь $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ и $z(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ — векторы фазовых координат управляемых объектов; u и v — r -мерные векторы управляющих воздействий; A и B — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Пусть выделены определенные фазовые координаты y_{i_k} и z_{i_k} ($k = 1, \dots, m \leq n$), совпадение которых в момент встречи $t = \theta$ составляет цель преследования. Без ограничения общности примем $i_k = k$. Будем считать избранные координаты управляемыми [5]. Для дальнейшего удобно трактовать наборы координат $\{y_i\} = y_{[m]}$; $\{z_i\} = z_{[m]}$, ($i = 1, \dots, m$) как векторы $\{q_i\} = q$, ($i = 1, \dots, m$) в m -мерном пространстве Q .

Рассмотрим задачу [4] о минимаксе времени до встречи объектов по части выделенных координат как дифференциальную позиционную игру преследования [1-3] при условии, что ресурсы управлений $u(t)$ и $v(t)$, которые можно использовать при $t \geq \tau$, для каждого текущего момента времени τ стеснены интегральными условиями вида

$$\int_{\tau}^{\infty} \|u(t)\|^2 dt \leq \mu^2(\tau), \quad \int_{\tau}^{\infty} \|v(t)\|^2 dt \leq \nu^2(\tau) \quad (1.3)$$

По условиям задачи управление u в каждый момент времени τ должно формироваться по принципу обратной связи на основании измерения величин $y(\tau)$, $z(\tau)$, $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$, т. е. в виде

$$u[\tau] = u[y[\tau], z[\tau], \mu[\tau], \nu[\tau]] \quad (1.4)$$

Для преследуемого партнера допускается как программное управление $v = v(t)$, $t \geq \tau$, так и управление по принципу обратной связи¹

$$v[\tau] = v[y[\tau], z[\tau], \mu[\tau], \nu[\tau]] \quad (1.5)$$

¹ По поводу использования круглых и квадратных скобок для обозначения управлений как функций времени см. работу [6] (стр. 535).

Подчеркнем, что преследователь не информируется о выборе преследуемым управлением $v = v [t]$ или $v = v (t)$, для моментов времени $t \geq \tau$. Стратегии u и v , т. е. совокупности функций вида (1.4), (1.5) будем считать допустимыми, если в процессе их реализации $u = u [t]$, $v = v [t]$ или $v = v (t)$ не нарушаются ограничительные условия (1.3) и уравнения (1.1), (1.2) не теряют своего смысла.

Итак, задача заключается в отыскании среди допустимых стратегий таких стратегий $u^\circ = u^\circ [y, z, \mu, \nu]$, $v^\circ = v^\circ [y, z, \mu, \nu]$ (оптимальных стратегий), чтобы при любых начальных данных $y (t_0)$, $z (t_0)$, $\mu (t_0)$, $\nu (t_0)$ (из заданной области их возможного изменения) выполнялось условие

$$T_{u^\circ, v^\circ} = \min_u \max_v T_{u, v} \quad (1.6)$$

где $T_{u, v} = \vartheta_{u, v} - \tau$ — время до встречи движений.

Обсуждаемая игровая задача о встрече двух управляемых движений решена в работе [5] в случае, когда $m = n$. В этом случае задача (1.6) разрешается правилом экстремального прицеливания, заключающемся в нацеливании в каждый момент времени $t = \tau$ движений $y (t)$ и $z (t)$ в точку $q^\circ [\tau]$ касания границ областей достижимости $G_1 [\tau, y [\tau], \mu [\tau], \vartheta_0]$ и $G_2 [\tau, z [\tau], \nu [\tau], \vartheta_0]$, построенных для момента поглощения $\vartheta = \vartheta_0$ процесса $z (t)$ процессом $y (t)$ (см., например, [3] стр. 7, 8). Если преследователь строит свою стратегию исходя из правила экстремального прицеливания, то при любом допустимом v во все время до встречи границы областей достижимости $G_1 [\tau, y [\tau], \mu [\tau], \vartheta_0]$ и $G_2 [\tau, z [\tau], \nu [\tau], \vartheta_0]$ касаются в одной точке и преследование завершится успешно при $t \leq \vartheta_0$, если только в начальный момент преследования $t = t_0$ область G_2 лежала внутри области G_1 .

В случае $m < n$ задача о минимаксе времени до встречи движений $y_{[m]} (t)$ (1.1) и $z_{[m]} (t)$ (1.2) осложняется. Здесь, как и при $m = n$, можно построить экстремальные стратегии

$$u_0 [\tau] = \frac{\mu [\tau]}{\mu [\tau] - \nu [\tau]} w_{x [\tau], x [\tau]}^\circ (\tau) \quad (1.7)$$

$$v_0 [\tau] = \frac{\nu [\tau]}{\mu [\tau] - \nu [\tau]} w_{x [\tau], x [\tau]}^\circ (\tau) \quad (1.8)$$

где $w_{x [\tau], x [\tau]}^\circ (t)$, ($\tau \leq t \leq \vartheta^\circ$) представляет собой программное оптимальное управление для вспомогательной задачи о переводе системы

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad (1.9)$$

из состояния

$$x = x [\tau] = y [\tau] - z [\tau]$$

в положение, отвечающее

$$y_{[m]} (\vartheta^\circ) - z_{[m]} (\vartheta^\circ) = x_{[m]} (\vartheta^\circ) = 0$$

при ограничении

$$\left[\int_{\tau}^{\infty} \|w (t)\|^2 dt \right]^{1/2} \leq \mu [\tau] - \nu [\tau] = \kappa [\tau] \quad (1.10)$$

и при условии

$$T_0 = \vartheta^\circ - \tau = \min_w T_w \quad (1.11)$$

Эту вспомогательную задачу будем называть задачей А. Наряду с задачей А, в дальнейшем потребуются вспомогательная задача В о переводе

системы (1.9) за заданное время $T = \vartheta - \tau$ из состояния $x[\tau]$ в положение $x_{[m]}(\vartheta) = 0$ при условии

$$\left[\int_{\tau}^{\vartheta} \|w(t)\|^2 dt \right]^{1/2} = \min \quad (1.12)$$

Введем обозначение

$$\zeta(x[\tau], \tau, \vartheta) = \left[\int_{\tau}^{\vartheta} \|w_{x[\tau], T}^{\circ}(t)\|^2 dt \right]^{1/2} \quad (1.13)$$

где $w_{x[\tau], T}^{\circ}(t)$ — решение задачи В. Тогда получается, что момент $t = \vartheta^{\circ}$ прихода движения $x_{[m]}(t)$ в положение $x_{[m]} = 0$ в задаче А совпадает с моментом поглощения ϑ_0 , который является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\zeta(x[\tau], \tau, \vartheta) = \mu[\tau] - \nu[\tau] \equiv \kappa[\tau] \quad (1.14)$$

Если партнеры руководствуются экстремальными стратегиями u_0 (1.7) и v_0 (1.8), то встреча, как и при $m = n$, произойдет в момент поглощения $t = \vartheta_0$. Но теперь в отличие от случая $m = n$ экстремальная стратегия u_0 (1.7) не обеспечивает при любых допустимых v единственность точки касания $q^{\circ}[\tau]$ во все время τ до встречи.

Это утверждение проверяется, например, в случае движений^[4]

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = u_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = y_4, \quad \frac{dy_4}{dt} = u_2 \quad (1.15)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = v_1, \quad \frac{dz_3}{dt} = z_4, \quad \frac{dz_4}{dt} = v_2 \quad (1.16)$$

когда требуется осуществить встречу лишь по координатам y_1, z_1 и y_3, z_3 . Экстремальное управление $u_0[\tau]$ (1.7) имеет здесь вид

$$u_0 = \left\{ -\frac{3}{T_0^2} \frac{\mu}{\mu - \nu} (x_1 + x_2 T_0), -\frac{3}{T_0^2} \frac{\mu}{\mu - \nu} (x_3 + x_4 T_0) \right\} \quad (1.17)$$

где величина T_0 есть наименьший положительный корень уравнения (1.14)

$$\left\{ \frac{3 [(x_1 + x_2 T)^2 + (x_3 + x_4 T)^2]}{T^3} \right\}^{1/2} = \mu - \nu \quad (1.18)$$

Если преследователь пользуется управлением u_0 (1.17), а преследуемый выбирает управление $v(t) = \psi = \text{const}$, где $\|\psi\|$ — достаточно малая величина, то существуют исходные данные $y(t_0), z(t_0), \mu(t_0), \nu(t_0)$ такие, что еще до совпадения $y_1(t), y_3(t)$ и $z_1(t), z_3(t)$ в некоторый момент времени $t = \tau_*$ области G_1 и G_2 сливаются. Но в моменты сливания областей достижимости, которые в общем случае для системы (1.1), (1.2) при ограничениях (1.3) суть подобные и одинаково ориентированные эллипсоиды, точек касания q° границ этих областей становится бесконечно много и правило экстремального прицеливания разрушается. В такие моменты у преследуемого появляется возможность выскользнуть из области [достижимости преследователя].

Таким образом, при $m < n$ выбор управления $u[\tau]$ из условия экстремального прицеливания не гарантирует встречи движений $y_{[m]}[t]$ и $z_{[m]}[t]$ во время $\tau \leq t \leq \vartheta_0$. Более того получается^[4], что при $m < n$ вообще нельзя построить управление $u = u^*[y[\tau], z[\tau], \mu[\tau], \nu[\tau]]$, коотрое обеспечивало бы встречу в момент $t \leq \vartheta_0[\tau]$. Однако эти затруднения при $m < n$ можно преодолеть путем соответствующей регуляризации задачи.

§ 2. В заметке [4] приведена регуляризация задачи, основанная на введении между границами областей G_1 и G_2 прослойки, организуемой за счет добавочного запаса $\varepsilon(\tau) > 0$ ресурса управления $\mu(\tau)$.

Здесь производится другая регуляризация задачи, опирающаяся на дискретную схему управления, позволяющего привести точку $y_{[m]}[t]$ в произвольно малую окрестность точки $z_{[m]}(\vartheta_0)$.

Допустим, что в начальный момент преследования $t = t_0$ область $G_2[t_0, z(t_0), v(t_0), \vartheta_0]$ находилась внутри области $G_1[t_0, y(t_0), \mu(t_0), \vartheta_0]$ и границы их касались в единственной точке $q^0[t_0]$. Тогда преследователь может пользоваться экстремальным управлением (1.7), по крайней мере, до момента $t = \tau_*$, в который области

$$G_2[\tau_*, z[\tau_*], v[\tau_*], \vartheta_0]; G_1[\tau_*, y[\tau_*], \mu[\tau_*], \vartheta_0]$$

сливаются. Обозначим

$$y[\tau_*] = y_*, z[\tau_*] = z_*, \mu[\tau_*] = \mu_*, v[\tau_*] = v_*$$

В момент $t = \tau_*$ справедливо равенство $\kappa[\tau_*] = \kappa_* = \mu_* - v_* = 0$.

Наиболее естественным в момент $t = \tau_*$, т. е. в точке $y_*, z_*, \kappa_* = 0$ является выбор управления $u[\tau_*]$ из условия рандомизации [2] экстремальных стратегий в случае бесконечного числа точек экстремального прицеливания, в каждую из которых в момент $t = \tau_*$ преследователь может нацеливаться с равновероятным успехом. Но в силу симметрии области достижимости каждому экстремальному управлению будет соответствовать равное ему по норме, но противоположно направленное экстремальное управление. Поэтому среднее значение всех экстремальных стратегий в момент сливания областей достижимости равно нулю. Следовательно, наиболее естественно¹ положить $u[\tau_*] = u_0[y_*, z_*, \mu_*, v_*] = 0$.

Однако в последующие моменты времени $t > \tau_*$ области G_1 и G_2 уже не будут, как правило², слившимися, и тогда придется выбирать управление $u[y[\tau], z[\tau], \mu[\tau], v[\tau]]$ из других соображений, полагая, например, опять $u = u_0$ (1.7). Это обстоятельство приводит к нерегулярности правых частей дифференциальных уравнений (1.1), которые оказываются разрывными в точке $x_* = y_* - z_*, \kappa_* = \mu_* - v_* = 0$. Поэтому целесообразен переход к дискретной схеме управления. Выберем малое $\Delta\tau > 0$ и положим $u(t) \equiv 0$ на время $\tau_* \leq t < \tau_* + \Delta\tau$. Нетрудно показать, что если во все время $t > \tau_*$ область G_2 сохраняется внутри области G_1 , то встреча состоится не позже, чем в момент $t = \vartheta_0[\tau_*]$. Неблагоприятен для преследователя противный случай.

Предположим, что преследуемый выбрал такое управление $v(t)$ ($\tau_* \leq t < \tau_* + \Delta\tau$), что часть области

$$G_2[\tau_* + \Delta\tau, z[\tau_* + \Delta\tau], v[\tau_* + \Delta\tau], \vartheta_0[\tau_*]]$$

¹ Таким же получается управление $u[\tau_*]$, выбираемое из условия $\min_u \max_v de/dt$, где ε — оценка возможного выхода области G_2 за область G_1 (в какой-нибудь [удобной метрике] (см. ниже стр.12)).

² Области G_1 и G_2 разойдутся наверное, если только при $t > \tau_*$ управления u и v одновременно не обращаются в тождественный нуль.

оказалась за пределами области

$$G_1 [\tau_* + \Delta \tau, y [\tau_* + \Delta \tau], \mu [\tau_* + \Delta \tau], \vartheta_0 [\tau_*]]$$

К моменту времени $t = \tau_* + \Delta \tau$ реализуется в соответствии с уравнением (1.14) новый момент поглощения $\vartheta_0 [\tau_* + \Delta \tau]$ и область $G_2 [\tau_* + \Delta \tau, z [\tau_* + \Delta \tau], v [\tau_* + \Delta \tau], \vartheta_0 [\tau_* + \Delta \tau]]$ будет находиться внутри области $G_1 [\tau_* + \Delta \tau, y [\tau_* + \Delta \tau], \mu [\tau_* + \Delta \tau], \vartheta_0 [\tau_* + \Delta \tau]]$, касаясь ее в единственной точке q^* . Тогда можно пользоваться экстремальной стратегией (1.7), прицеливаясь в точку q^* , до тех пор, пока области G_2 и G_1 снова не сольются.

Разумно надеяться, что циклически чередуя правило экстремального прицеливания с управлением, построенным на малое время $\Delta \tau > 0$ из условия рандомизации, получим регулярную стратегию (R -стратегию), обеспечивающую встречу в момент времени, сколь угодно близкий к моменту поглощения (при $\Delta \tau \rightarrow 0$). К сожалению, такой простой способ выбора управления u не обеспечивает желаемого результата.

Покажем это на примере движений (1.15), (1.16). Допустим, что наступил момент $t = \tau_* = 0$, когда области G_1 и G_2 слились, и при этом реализовалась позиция $y [\tau_*] = \{-\alpha, 1 + \beta, 0, 0\}$, $z [\tau_*] = \{0, \beta, 0, 0\}$; кроме того, $\mu [\tau_*] = v [\tau_*] = 1$, $\vartheta_0 [\tau_*] = \alpha > 0$. Полагая в течение времени $\Delta \tau$, $u (t) = \{0, 0\}$, $v (t) = \{\psi, 0\}$, выпишем уравнение (1.18) для определения момента поглощения $\vartheta_0 [\tau_* + \Delta \tau]$:

$$[1 - \sqrt{1 - \psi^2 \Delta \tau}]^2 (\vartheta - \Delta \tau)^3 - 3 \left[\left(\Delta \tau - \psi \frac{\Delta \tau^2}{2} - \alpha \right) + (1 - \psi \Delta \tau) (\vartheta - \Delta \tau) \right]^2 = 0 \quad (2.1)$$

Нетрудно убедиться в том, что при малом $\psi > 0$ наименьший положительный корень уравнения (2.1), равный величине $\vartheta_0 [\tau_* + \Delta \tau]$, будет сколь угодно большим при достаточно малом $\Delta \tau$. Следовательно, описанный закон управления не может, вообще говоря, обеспечить встречу в моменты времени, близкие к моменту поглощения $\vartheta_0 [\tau_*]$. Можно также проверить, что таким путем не обеспечивается и ε -сближение при $t \leq \vartheta_0 [\tau_*]$.

Попытаемся построить R -стратегию иначе. Зафиксируем число $\vartheta_0 [\tau_*] = \vartheta_*$ и предположим снова, что при $u (t) \equiv 0$ ($\tau_* \leq t < \tau_* + \Delta \tau$) часть области $G_2 [\tau_* + \Delta \tau, z [\tau_* + \Delta \tau], v [\tau_* + \Delta \tau], \vartheta_*]$ вышла за пределы области $G_1 [\tau_* + \Delta \tau, y [\tau_* + \Delta \tau], \mu [\tau_* + \Delta \tau], \vartheta_*]$. Пусть тогда $\varepsilon [\tau]$ — наименьшая величина, необходимая для того, чтобы область $G_2 [\tau, z [\tau], v [\tau], \vartheta_*]$ оказывалась для моментов $\tau \geq \tau_*$ лежащей внутри области $G_1 [\tau, y [\tau], \mu [\tau] + \varepsilon [\tau], \vartheta_*]$. Следовательно, $\varepsilon [\tau]$ определяется из условия

$$\varepsilon [\tau] = \zeta (x [\tau], \tau, \vartheta_*) - \kappa [\tau] \quad (2.2)$$

где ζ вычисляется по формуле (1.13). По истечении времени $\Delta \tau$ экстремальное управление для преследователя выберем в виде

$$u_\varepsilon [\tau] = \frac{\mu [\tau]}{\kappa [\tau] + \varepsilon [\tau]} w_{x[\tau], \zeta[\tau]}^\circ (\tau) \quad (2.3)$$

где $w_{x[\tau], \zeta[\tau]}^\circ (t)$ является решением задачи A при условии

$$\left[\int_{\tau}^{\infty} \|w (t)\|^2 dt \right]^{1/2} \leq \kappa [\tau] + \varepsilon [\tau] = \zeta [\tau] \quad (2.4)$$

Пусть преследователь пользуется управлением $u_\varepsilon[\tau]$ (2.3) до тех пор, пока области $G_1[\tau, y[\tau], \mu[\tau] + \varepsilon[\tau], \vartheta_*]$ и $G_2[\tau, z[\tau], \nu[\tau], \vartheta_*]$ не сольются, т. е. пока $\zeta[\tau]$ не обратится в нуль. После чего на время $\Delta\tau$ снова полагаем $u(t) \equiv 0$ и т. д. Если бы описанный способ управления гарантировал произвольную малость величины $\varepsilon(\vartheta_*)$ при $\Delta\tau \rightarrow 0$ и при любых допустимых ν , то [к моменту времени $t \leq \vartheta_*$ движение $y_{[m]}[t]$ попадало бы в произвольно малую окрестность точки $z_{[m]}(\vartheta_*)$, что означало бы удовлетворительное решение вопроса. Однако это не осуществляется.

В самом деле, по определению величин ζ и ε можно получить (см. ниже (3.13), (3.14), (3.21)), что при $\zeta = 0$:

$$\frac{d\zeta}{d\varepsilon} = \frac{d\zeta/dt}{d\zeta/dt - \|v\|^2/2\nu} \quad (2.5)$$

а при малых $\zeta > 0$:

$$\frac{d\zeta}{d\varepsilon} = 2 \frac{\varepsilon \|w^\circ\|^2 \zeta^{-2} + (w^\circ/\zeta, \delta v)}{\varepsilon \|w^\circ\|^2 \zeta^{-2} - \|\delta v\|^2 \nu^{-1}} + O(\zeta), \quad (2.6)$$

где $\delta v = v - \nu w^\circ/\zeta$ и $O(\zeta)$ — бесконечно малая порядка ζ . Величина $d\zeta/dt$ в (2.5) строго положительна, если $\nu \neq 0$, и обращается в нуль при $\nu = 0$. Если $\nu = \psi = \text{const}$, где величина $\|\psi\|$ достаточно мала, то $d\zeta/d\varepsilon$ (2.5) будет величиной сколь угодно близкой к единице, но при $\zeta > 0$ и $\varepsilon < \nu$ имеем, во-первых, $d\zeta/dt < 0$ и, во-вторых, величина $d\zeta/d\varepsilon$ (2.6) будет близка к двум. Следовательно, при таком ν , как бы мало ни было $\Delta\tau$, функция $\varepsilon(t)$ может возрасти пропорционально времени с коэффициентом пропорциональности, не стремящимся к нулю при $\Delta\tau \rightarrow 0$, и значит $\varepsilon(t)$ не может быть сделана к моменту $t = \vartheta_*$ меньше наперед выбранного положительного числа. В результате этого при указанном построении управления u и при $\nu = \psi = \text{const}$ возникает при $\Delta\tau \rightarrow 0$ своеобразный скользящий режим, который приводит к значительному увеличению $\varepsilon(t)$.

§ 3. В этом параграфе дается решение задачи, которое позволяет преодолеть трудности, описанные выше. Основу рассматриваемой модификации задачи составит дискретная схема изменения управления u , сопровождающаяся, как и в конце § 2, торможением величины $\vartheta_0[\tau]$. Однако теперь будет использоваться сглаженное экстремальное управление. Последнее обстоятельство и позволяет избежать встретившиеся в § 2 казусы. Опишем предлагаемый способ построения управления.

Пусть $\{\tau_k\}$ ($k = 0, 1, \dots$) — последовательность моментов времени; $\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta$. Символом $u_\Delta[t]$ будем обозначать управление u , которое изменяется лишь в моменты времени $t = \tau_k$. При этом значение $u_\Delta[t]$ на интервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$ определяется лишь величинами, реализовавшимися к моменту $t = \tau_k$. При таком выборе управления u в качестве оценки результатов преследования выберем величину

$$\gamma_u = \sup_\sigma \{ \limsup_{\Delta \rightarrow 0} [\sup_v T_{u_\Delta, v}^\sigma] \} \quad (\sigma > 0) \quad (3.1)$$

Здесь число $T_{u_\Delta, v}^\sigma$ определяет момент времени $t = \tau + T_{u_\Delta, v}^\sigma$ когда впервые выполняется условие

$$\|y_{[m]}[\tau + T] - z_{[m]}[\tau + T]\| \leq \sigma \quad (3.2)$$

при выбранных управлении $v(t)$ и законе построения управления $u_{\Delta}[t]$ и для заданного исходного состояния $y[\tau], z[\tau], \mu[\tau], v[\tau]$. Задача состоит теперь в выборе оптимального управления $u^{\circ}[t]$, которое обеспечивает минимум.

$$T^{\circ} = \gamma_{u_{\Delta}} = \min_u \gamma_u \quad (3.3)$$

для любых начальных условий $y[\tau], z[\tau], \mu[\tau], v[\tau]$ из области их возможного изменения. В качестве аргументов, определяющих экстремальное управление $u_{\Delta}[t]^{\circ}$ на интервалах $[\tau_k, \tau_{k+1})$ будем выбирать значения переменных $y[\tau_k], z[\tau_k], \mu[\tau_k], v[\tau_k]$ и еще одной вспомогательной переменной $\vartheta[\tau_k]$, смысл которой поясняется ниже. Итак, будем формировать управление $u_{\Delta}[t]^{\circ}$ в виде

$$u_{\Delta}[t]^{\circ} = u[y[\tau_k], z[\tau_k], \mu[\tau_k], v[\tau_k], \vartheta[\tau_{k-1}]]^{\circ} \quad (\tau_k \leq t < \tau_{k+1}) \quad (3.4)$$

Алгоритм, определяющий правую часть (3.4) и последовательность значений $\vartheta[\tau_k]$, таков. Пусть преследование началось при $t = \tau_0$. Везде в дальнейшем предполагается, что при $t = \tau_0$ выполняется неравенство $\mu[\tau_0] \geq v[\tau_0]$ и для $t = \tau_0$, $x[\tau_0] = y[\tau_0] - z[\tau_0]$, $\kappa[\tau_0] = \mu[\tau_0] - v[\tau_0]$ задача А имеет конечное решение $T_0[\tau_0]$.

Полагаем $\vartheta[\tau_{-1}] = \vartheta[\tau_0] = \tau_0 + T_0[\tau_0]$. Управление $u_{\Delta}[t]^{\circ}$ в формуле (3.4) определяем двумя различными по форме равенствами:

если $\kappa[\tau_0] > 0$

$$u_{\Delta}[t]^{\circ} = \frac{\mu[\tau_0]}{\kappa[\tau_0]} w_{x[\tau_0], \kappa[\tau_0]}^{\circ}(\tau_0) \quad (\tau_0 \leq t < \tau_1) \quad (3.5)$$

если $\kappa[\tau_0] = 0$

$$u_{\Delta}[t]^{\circ} \equiv 0 \quad (\tau_0 \leq t < \tau_1) \quad (3.6)$$

Пусть теперь $\tau = \tau_k > \tau_0$. Величины $\vartheta[\tau_j]$ будем определять рекуррентно, поэтому в момент $\tau = \tau_k$ величина $\vartheta[\tau_{k-1}]$ предполагается известной. Если при $\tau = \tau_k$ реализовалась величина $\kappa[\tau_k] = \mu[\tau_k] - v[\tau_k] \geq 0$, то снова решается задача А при реализовавшихся $\tau = \tau_k$, $x[\tau_k] = y[\tau_k] - z[\tau_k]$, $\kappa = \kappa[\tau_k]$.

Предположим сначала, что решение этой задачи дает

$$T_0[\tau_k] \leq \vartheta[\tau_{k-1}] - \tau_k \quad (3.7)$$

Тогда полагаем $\vartheta[\tau_k] = \tau_k + T_0[\tau_k]$ и
если $\kappa[\tau_k] > 0$

$$u_{\Delta}[t]^{\circ} = \frac{\mu[\tau_k]}{\kappa[\tau_k]} w_{x[\tau_k], \kappa[\tau_k]}^{\circ}(\tau_k) \quad (\tau_k \leq t < \tau_{k+1}) \quad (3.8)$$

если $\kappa[\tau_k] = 0$

$$u_{\Delta}[t]^{\circ} \equiv 0 \quad (\tau_k \leq t < \tau_{k+1}) \quad (3.9)$$

Если же рассмотренная задача A не имеет решения, удовлетворяющего условию (3.7), или если реализовалась величина $\kappa[\tau_k] < 0$, то решается задача B при условиях $\tau = \tau_k$, $x[\tau_k]$ и $T = \vartheta[\tau_{k-1}] - \tau_k$. Пусть решение этой задачи дает величину $\zeta[\tau_k]$. Ясно, что теперь $\zeta[\tau_k] > \kappa[\tau_k]$. Далее решается задача A при $\tau = \tau_k$, $x[\tau_k]$ и при условии

$$\left[\int_{\tau_k}^{\infty} \|w(t)\|^2 dt \right]^{1/2} \leq \zeta[\tau_k]$$

Решение дает, очевидно, величину $T_0[\tau_k] \leq \vartheta[\tau_{k-1}] - \tau_k$. Полагая $\vartheta[\tau_k] = \tau_k + T_0[\tau_k]$. Величина управления $u_{\Delta}[t]^{\circ}$ зависит теперь от значения величины

$$\varepsilon[\tau_k] = \zeta[\tau_k] - \kappa[\tau_k] > 0 \quad (3.10)$$

Именно полагаем:

если $\zeta[\tau_k] < \varepsilon[\tau_k]$

$$u_{\Delta}[t]^{\circ} = \frac{\mu[\tau_k]}{\varepsilon[\tau_k]} w_{x[\tau_k], \zeta[\tau_k]}^{\circ}(\tau_k) \quad (3.11)$$

если $\zeta[\tau_k] \geq \varepsilon[\tau_k]$

$$u_{\Delta}[t]^{\circ} = \frac{\mu[\tau_k]}{\zeta[\tau_k]} w_{x[\tau_k], \zeta[\tau_k]}^{\circ}(\tau_k) \quad (3.12)$$

Построение продолжается до тех пор, пока оказывается $\vartheta[\tau_k] \geq \tau_k$. Сформированное таким путем управление (3.4) разрешает задачу (3.1) — (3.3), причем оказывается, что $T^{\circ}[\tau] = T_0[\tau]$. Покажем это. Пусть сначала $\tau = \tau_0$. Проверим прежде всего, что при любом допустимом выборе $v[t]$ ($t \geq \tau_0$) и при $u = u_{\Delta}[t]^{\circ}$ необходимое σ -сближение (3.2) движений $y_{[m]}[t]$ и $z_{[m]}[t]$ произойдет не позже чем в момент $t = \tau_0 + T_0[\tau_0]$, если только величина Δ достаточно мала.

Для этого достаточно проверить, что при малых Δ величина $\varepsilon[\tau_k]$ остается с ростом времени τ_k произвольно малой во всяком случае, пока $\vartheta[\tau_k] - \tau_k \geq \eta(\varepsilon)$. (Здесь $\eta(\varepsilon)$ — бесконечно малая вместе с ε величина надлежащего порядка.) В самом деле, как отмечалось выше в § 2, величина $\varepsilon[\tau_k]$ — это та добавка, которую следует присовокупить к ресурсу управления $\mu[\tau_k]$, чтобы область достижимости $G_1[\tau_k, y[\tau_k], \mu[\tau_k] + \varepsilon[\tau_k], \vartheta[\tau_k]]$ охватывала область $G_2[\tau_k, z[\tau_k], v[\tau_k], \vartheta[\tau_k]]$.

Если, однако, величина $\varepsilon[\tau_k]$ мала, то область $G_2[\tau_k, z[\tau_k], v[\tau_k], \vartheta[\tau_k]]$ оказывается в малой σ -окрестности области $G_1[\tau_k, y[\tau_k], \mu[\tau_k], \vartheta[\tau_k]]$. Так как по построению $\vartheta[\tau_k] \leq \tau_0 + T_0[\tau_0]$ и при $\tau_k \rightarrow \vartheta[\tau_k]$ области G_1 и G_2 стягиваются в точку, то действительно убеждаемся, что достаточная малость $\varepsilon[\tau_k]$ при всех $\tau_0 \leq \tau_k \leq \vartheta[\tau_k] - \eta(\varepsilon)$ обеспечивает нужное σ -сближение движений $y_{[m]}[t]$ и $z_{[m]}[t]$.

В дальнейшем удобно изображать изменение параметров системы со временем t на плоскости $\{\varepsilon, \zeta\}$. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что для любого $\varepsilon^* > 0$ и $\eta^* > 0$ можно подобрать

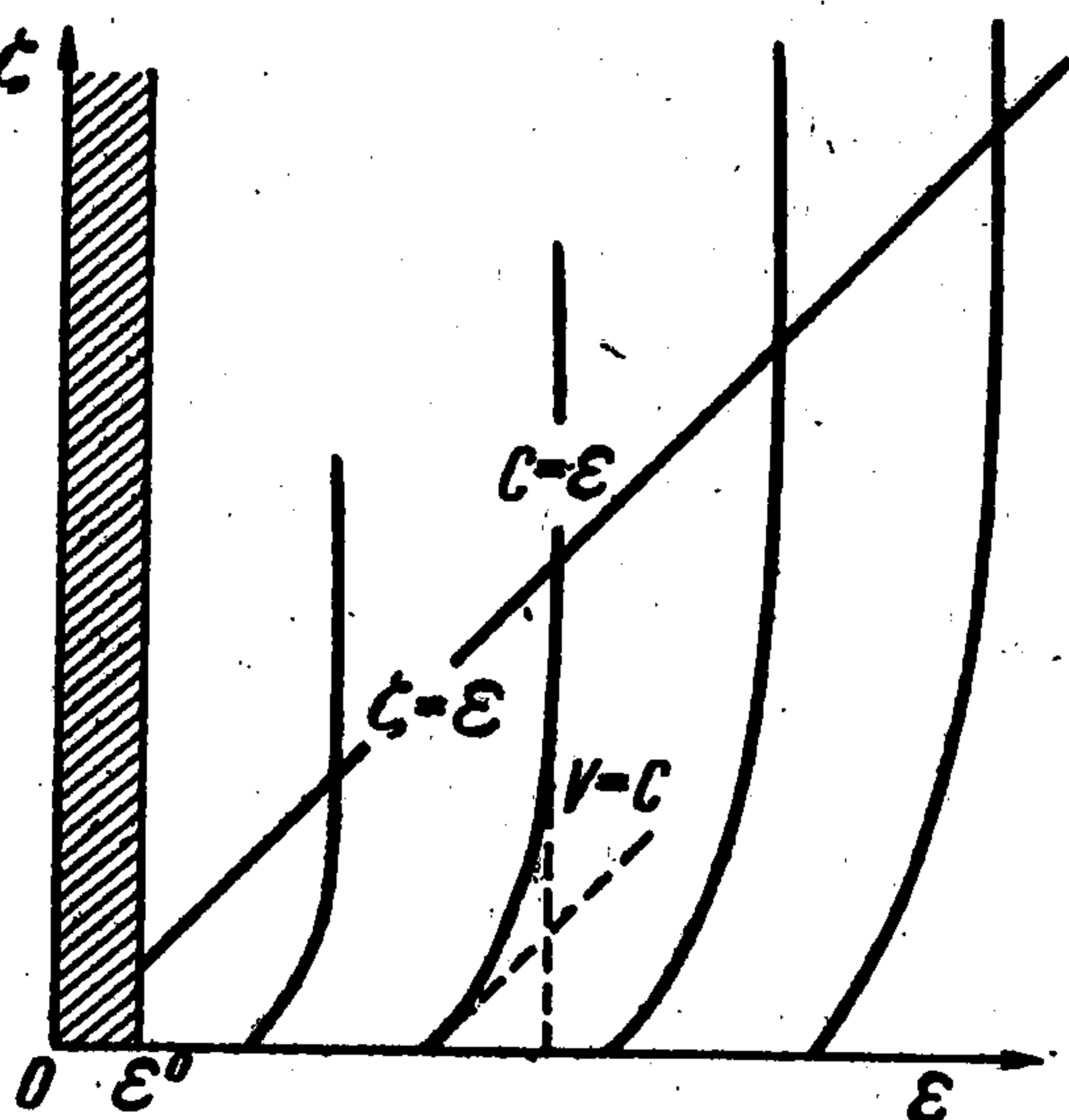
число $\Delta^\circ > 0$ такое, что при $\Delta < \Delta^\circ$ управление $u_\Delta [t]^\circ$ будет сохранять движение $\{\varepsilon [t], \zeta [t]\}$ в области $H: \{\varepsilon [t] < \varepsilon^*, \zeta [t] \geq 0\}$ при $\vartheta [\tau_k] - \tau_{k+1} \geq \eta^*$.

Рассмотрим область $\varepsilon \geq \varepsilon^\circ, \zeta \geq 0$ (фигура), где ε° — достаточно малое число, меньшее ε^* . Покажем, что в этой области величина $\varepsilon [t]$ не может возрастать слишком быстро. Предположим сначала, что в области H управление $u_\Delta [t]$ формируется на каждом интервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$ не по описанному выше правилу, но определяется формулами, аналогичными (3.11), (3.12), где, однако, в правой части аргумент τ_k заменен на t . (При этом величина $\vartheta [\tau_k]$, которая участвует в определении величины $\zeta [\tau]$, при $\tau = t$ на всем интервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$ остается постоянной.)

В области $\varepsilon > 0, \zeta > 0$ справедливы равенства

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{1}{2\zeta} [\|w^\circ\|^2 + 2(w^\circ, \delta w)] \quad (3.13)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\zeta^2} \|w^\circ\|^2 + \frac{\|\delta u\|^2}{2\mu} - \frac{\|\delta v\|^2}{2\nu} \quad (3.14)$$



вытекающие непосредственно из определения величин ζ и ε . Здесь $w^\circ [\tau] = w^\circ_{x[\tau], T(\tau)}$ — решение задачи В при $x [\tau], T = \vartheta [\tau_k] - \tau$; $\delta w = \delta u - \delta v - \varepsilon w^\circ / \zeta$, $\delta u = u_\Delta [t] - \mu [t] w^\circ [t] / \zeta [t]$; $\delta v = v [t] - \nu w^\circ [t] / \zeta [t]$. В области $\zeta \geq \varepsilon \geq \varepsilon_0$ имеем $\delta u = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\zeta^2} \|w^\circ\|^2 - \frac{\|\delta v\|^2}{2\nu} \leq \lambda \varepsilon \quad (\lambda = \text{const} > 0) \quad (3.15)$$

так как [7] при $\vartheta [\tau_k] - \tau \geq \eta^*$ величина $\|w^\circ\| / \zeta$ равномерно ограничена. Интегрируя неравенство (3.15), получим, что все время $t_\alpha \leq t < t_\beta$, пока траектория $\{\varepsilon [t], \zeta [t]\}$ остается в области $\varepsilon > 0, \zeta \geq \varepsilon$, будет выполнено неравенство

$$\varepsilon [t] \leq \varepsilon [t_\alpha] e^{\lambda [t-t_\alpha]} \quad (3.16)$$

В области $0 \leq \zeta < \varepsilon$ рассмотрим функцию

$$V(\varepsilon, \zeta) = (\varepsilon^2 - \varepsilon\zeta + \zeta^2)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\frac{\pi}{6} + \text{arctg} \frac{2\varepsilon - \zeta}{\sqrt{3}\zeta} \right] \right\} \quad (3.17)$$

линии уровня которой $V(\varepsilon, \zeta) = C > 0 - \text{const}$ изображены на фигуре. Полная производная этой функции dV/dt при $\varepsilon = \varepsilon [t], \zeta = \zeta [t] > 0$ в случае $u = u_\Delta [t]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{\varepsilon V}{\varepsilon^2 - \varepsilon\zeta + \zeta^2} \left\{ \frac{\|w^\circ\|^2}{2\zeta^2} \left[\varepsilon - \zeta \frac{(\zeta - \varepsilon)}{\varepsilon} + 2(\zeta - \varepsilon) - \frac{\mu(\zeta - \varepsilon)^2}{\varepsilon^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\|\delta v\|^2}{2\nu} + \frac{\zeta - \varepsilon}{\varepsilon\zeta} (w^\circ, \delta v) \right\} \quad (3.18) \end{aligned}$$

и допускает оценку

$$dV/dt \leq \lambda V \quad (3.19)$$

Из этой оценки следует, что все время $t_\alpha \leq t \leq t_\beta$, пока траектория $\{\varepsilon [t], \zeta [t]\}$ остается в области $\varepsilon > 0, 0 < \zeta \leq \varepsilon$, будет выполняться неравенство

$$V [t] \leq V [t_\alpha] e^{\lambda(t-t_\alpha)} \quad (3.20)$$

Так как при $\zeta \leq \varepsilon$ имеем $V \geq \varepsilon$ и $V = \varepsilon$ при $\zeta = \varepsilon$, то из оценки (3.16), (3.20) вытекает, что все время, пока при $t \geq t_\alpha$ траектория $\{\varepsilon [t], \zeta [t]\}$ остается в области $\varepsilon > 0, \zeta > 0$, выполняется неравенство (3.16).

Рассмотрим теперь изменение V при $u = u_\Delta [t]$ и при выходе траектории $\{\varepsilon [t], \zeta [t]\}$ на границу $\zeta = 0$ области $\varepsilon > 0, \zeta \geq 0$. В этом случае производная $d\zeta / dt$ определится равенством

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{+0} = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{\zeta - 0}{\Delta t} = V \sqrt{(D^{-1} H^{[m]} v, H^{[m]} v)} \quad (3.21)$$

где D и $H^{[m]}$ — некоторые матрицы, вычисляемые известным образом.

Кроме того, имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} - \frac{\|v\|^2}{2v} \quad (3.22)$$

поэтому для производной dV / dt получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V}{\varepsilon} \left[\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} \right] = -\frac{V}{\varepsilon} \frac{\|v\|^2}{2v} \quad (3.23)$$

т. е. при $\varepsilon > 0$ и $\zeta = 0$ при управлении $u = u_\Delta [t]$ функция V не возрастает. Таким образом, получается, что в области $\varepsilon > 0, \zeta \geq 0$ все время выполняется оценка (3.16). Следовательно, если величина $\varepsilon [t_\alpha]$ достаточно мала, то и в дальнейшем все время при $t \leq \vartheta [\tau_k] - \eta^* \leq \vartheta [\tau_0] - \eta^*$ значение $\varepsilon [t]$ будет оставаться достаточно малым, если только $u = u_\Delta [t]$.

Теперь остается оценить эффект, получающийся при переходе от управления $u_\Delta [t]$ к интересующему нас управлению $u_\Delta [t]^\circ$. Не приводя подробных оценок для дифференциальных уравнений (1.1), (3.13), (3.14), (3.21), (3.22), которые производятся в области $\varepsilon > \varepsilon^\circ$ без особенных трудностей по известному плану перехода от дифференциальной к конечно разностной схеме изменения переменных, приведем лишь окончательный результат: отклонение рассматриваемых траекторий при $u = u_\Delta [t]$ за один шаг $[\tau_k, \tau_{k+1})$ будет иметь порядок $o(\Delta)$, где $o(\Delta)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δ (все время, пока изображающая точка $\{\varepsilon, \zeta\}$ будет оставаться в области $\varepsilon^\circ > \varepsilon^\circ$), и эта оценка $o(\Delta)$ равномерна при каждом фиксированном $\varepsilon^\circ > \varepsilon^\circ$. Но тогда из оценки (3.16) следует нужная малость величины $\varepsilon [\tau_k]$, ибо $\varepsilon [\tau_0] = 0$.

Таким образом, для $\tau = \tau_0$ управление $u = u_\Delta [t]^\circ$ действительно обеспечивает σ -сближение движений $y_{[m]} [t]$ и $z_{[m]} [t]$ при $t < \tau_0 + T_0 [\tau_0]$, если только величина $\Delta > 0$ достаточно мала. Также точно, поскольку при любом промежуточном значении $\tau = \tau_{k^*}, k^* > 0$ по доказанному выше имеем малость $\varepsilon [\tau_{k^*}]$ при малых Δ , убеждаемся, что управление $u_\Delta [t]^\circ$

работая при $t \geq \tau_{k^*}$, обеспечивает σ -сближение движений $y_{[m]} [t]$ и $z_{[m]} [t]$ при $t < \tau_{k^*} + T_0 [\tau_{k^*}]$.

С другой стороны, выбирая $v^* [t] = \mu [t] u^* [t] / v [t]$, убеждаемся, что при любом $u^* [t]$ при $t > \tau_{k^*}$ произвольное σ -сближение не может быть гарантировано при $t < \tau_{k^*} + T_0 [\tau_{k^*}] - \alpha$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Отсюда и выводится окончательно оптимальность управления $u_{\Delta} [t]^{\circ}$ для задачи (3.1) — (3.3).

§ 4. Трудности, рассматриваемые в этой статье, сразу исчезают, если допустить [1,8,9] возможность построения управления $u [t]$ в виде

$$u [t] = u [y [t], z [t], \mu [t], v [t], v [t]] \quad (4.1)$$

так как тогда в критической ситуации, когда $\mu = v$, достаточно полагать, например, $u [t] = v [t]$. Если такая прямая дискриминация движения $z [t]$ нежелательна, то величину $v [t]$ можно при вычислении управления u учесть косвенно, вводя снова некоторое последствие в закон управления u . В качестве оценки результата преследования снова выберем величину γ_u (3.1) и будем строить управление

$$u_{\Delta} [t] = u_{\Delta} (t, y [\tau_k], z [\tau_k], \mu [\tau_k], v [\tau_k], z [\tau_{k-1}], v [\tau_{k-1}])_0 \quad (\tau_k \leq t < \tau_{k+1}) \quad (4.2)$$

таким путем. По значениям $y [\tau_k]$, $\mu [\tau_k]$, $z [\tau_{k-1}]$ и $v [\tau_{k-1}]$ определим момент поглощения $\vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]$, когда область достижимости $G_2 [\tau_{k-1}, z [\tau_{k-1}], v [\tau_{k-1}], \vartheta - \Delta]$ оказывается впервые внутри области $G_1 [\tau_k, y [\tau_k], \mu [\tau_k], \vartheta]$. Обозначим символом $\varepsilon [\tau, \tau_*, \vartheta]$ величину

$$\varepsilon [\tau, \tau_*; \vartheta] = \max_z \min_y \|y - z\| \quad (4.3)$$

при y из $G_1 [\tau, y [\tau], \mu [\tau], \vartheta]$ и z из $G_2 [\tau_*, z [\tau_*], v [\tau_*], \vartheta - \Delta]$. Очевидно, по выбору $\vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]$ имеем $\varepsilon [\tau_k, \tau_{k-1}, \vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]] = 0$.

Теперь управление $u_{\Delta} [t]$ (4.2) определяем на интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ как оптимальное программное управление, которое сохраняет условие

$$\varepsilon [\tau_{k+1}, \tau_k; \vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]] = 0 \quad (4.4)$$

т. е. сохраняет область

$$G_2 [\tau_k, z [\tau_k], v [\tau_k], \vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}] - \Delta]$$

в области

$$G_1 [\tau_{k+1}, y [\tau_{k+1}], \mu [\tau_{k+1}], \vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]]$$

и максимизирует притом расстояние между границами этих областей в какой-нибудь удобной метрике. Нетрудно видеть, что в нашем случае обеспечить равенство (4.4) действительно всегда возможно. В самом деле, данное равенство обеспечивает уже, например, экстремальное управление $u^* (t) = u_0 [t]$, нацеленное в точку касания границ областей

$$G_1 [t, y [t], \mu [t], \vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]]$$

$$G_2 [t - \Delta, z (t - \Delta), v [t - \Delta] + \beta (t), \vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]] \quad (\beta(t) \geq 0)$$

все время, пока

$$\mu [t] > v [t - \Delta] + \beta (t) \quad \text{или} \quad u^* (t) = v (t - \Delta),$$

когда $\mu [t] = v [t - \Delta] + \beta (t)$. Но равенство (4.4) обеспечивает реализацию неравенства $\vartheta^{\circ} [\tau_{k+1}, \tau_k] \leq \vartheta^{\circ} [\tau_k, \tau_{k-1}]$ и поэтому можно продолжить дальше построение управления $u_{\Delta} [t]$ аналогичным образом при $\tau_{k+1} \leq t < \tau_{k+2}$ и т. д. Описанный способ построения управления $u_{\Delta} [t]$ обеспечивает сближение точек $y_{[m]} [t]$ и $z_{[m]} [t - \Delta]$ в момент $t \leq \vartheta^{\circ} [\tau_{-1}, \tau_0]$, а следовательно, при достаточно малом значении $\Delta > 0$ таким образом обеспечивается и нужное сближение точек $y_{[m]} [t]$ и $z_{[m]} [t]$.

Описанная регуляризация проходит не только для линейных одностипных объектов, но в весьма общем случае — когда возможно успешное завершение процесса преследования при выборе управления $u [t]$ в виде (4.1) (хотя вопрос о минимаксности управления u в общем случае еще требует исследования). Условия обеспечения встречи управлением (4.1) известны для широкого класса задач с ограничениями на мгновенные значения управляющих сил (см., например, [1, 8, 9]). Подобные условия выводятся и для задач с интегральными ограничениями на управления. Заметим, в частности, что для успешного завершения преследования при условии (4.4) очевидно достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\max_v \min_u \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon [t + \tau, t + \tau; \theta^0 [\tau]] \right\}_{+0} = 0 \quad (4.5)$$

в каждый момент $t = \tau$ преследования во всех тех точках фазового пространства, где могут оказаться реализации величин $\{y [\tau], z [\tau], \mu [\tau], \nu [\tau]\}$.

Из равенств (4.3), (4.4) выводится сразу, что в нашем случае это условие выполняется очевидным образом. В общем случае более или менее эффективные достаточные условия, обеспечивающие сближение движений $y_{[m]} [t]$ и $z_{[m]} [t]$ и вытекающие из условия (4.5), строятся в терминах касательных плоскостей к областям достижимости $G_1 [\tau, y [\tau], \mu [\tau], \theta^0 [\tau]]$ и $G_2 [\tau, z [\tau], \nu [\tau], \theta^0 [\tau]]$, что приводит к исследованию функций, подобных величине ε (4.3). Оценка регуляризации, описанной в этом параграфе, зависит от результатов исследования и экспериментальной проверки устойчивости соответствующей вычислительной схемы. Эта проверка важна в связи с участием в схеме близких величин $z [\tau_k], z [\tau_{k-1}]$ и $\nu [\tau_k], \nu [\tau_{k-1}]$. По-видимому, в настоящее время нет такого, достаточно полного исследования затронутого вопроса.

Поступила 25 IX 1967

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Свердловское отделение

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Усп. матем. наук, 1966, т. 21, № 4 (130).
2. Isaacs R. Differential Games. N. Y., 1965.
3. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 4.
4. Красовский Н. Н., Третьяков В. Е. К задаче о встрече движений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, вып. 2.
5. Красовский Н. Н. К задаче о преследовании в случае линейных одностипных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
6. Красовский Н. Н. К задаче об игровой встрече движений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, вып. 3.
7. Субботин А. И. К задаче об игровой встрече движений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
8. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, вып. 1.
9. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх, 1. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, вып. 6.