Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ОДНО ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

М. В. Миронов

(Ленинград)

Излагается некоторое видоизменение теории равномерного распределения Г. Вейля [1–5], позволяющее расширить область ее применения. В частности, удается показать, что могут быть значительно расширены границы применимости известной формулы, которая относится к усреднению по времени функций, зависящих от нескольких гармоник с различными частотами, и сводит интеграл с бесконечным пределом к повторному. В качестве примера рассматриваются бигармонические колебания механической системы при наличии кулонова, вязкого и квадратичного трения.

1. Во многих задачах теории колебаний приходится иметь дело с вычислениями средних значений функций, зависящих, вообще говоря, от совокупности гармоник с произвольными частотами. Примером может служить метод Ван дер Поля (метод осреднения) в применении к системам с n степенями свободы, а также изложенный в работе [6] метод исследования полигармонических колебаний в нелинейных системах, который основан на усреднении лагранжиана и функции W, характеризующей неконсервативные силы.

Рассмотрим некоторую действительную функцию $f = f(x_0, \ldots, x_r)$, периодическую с периодом единица по переменным $x_0, x_1, \ldots, x_r$ и собственно интегрируемую по Риману в области $0 \leqslant x_\nu < 1$ $(\nu = 0, \ldots, r)$.

Предположим, что для функции

$$f(t) = f(\omega_0 t, \ldots, \omega_r t) \tag{1.1}$$

которая получена из f заменой x_ν на $\omega_\nu t$ $(\nu = 0, \ldots, r)$, где $\omega_0, \ldots, \omega_r$ — действительные числа, существует предел

$$\langle f \rangle = M[f(t)] = \lim_{(\tau - \tau_0) \to \infty} \frac{1}{\tau - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau} f(t)\, dt \tag{1.2}$$

называемый средним значением $f(t)$. При $r \geqslant 1$ непосредственное вычисление интеграла (1.2) может представить большие трудности. Однако, если числа $\omega_1 / \omega_0, \ldots, \omega_r / \omega_0$ рационально независимы[1], то имеет место значительно более простая формула [2–4]

$$\langle f \rangle = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_0, \ldots, x_r)\, dx_0 \ldots dx_r \tag{1.3}$$

[1] Заметим, что числа $\xi_1, \ldots, \xi_r$ называются рационально независимыми, если равенства $m_1 \xi_1 + \ldots + m_r \xi_r = m_0$ невозможны ни для одной совокупности целых чисел $(m_0, m_1, \ldots, m_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Возникает вопрос, нельзя ли получить результат, близкий к формуле (1.3), и в том случае, когда среди чисел $\omega_0, \ldots, \omega_r$ есть соизмеримые. Ответить на этот вопрос дает возможность излагаемая ниже теория P-равномерного распределения, являющаяся видоизменением теории равномерного распределения Г. Вейля.

2. *Определение 2.1.* Пусть имеется целый вектор $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_r)$, проекции которого есть положительные числа [1]. Систему

$$x_\nu(k) \qquad (\nu = 1, \ldots, r, \; k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.1}$$

действительных функций натурального аргумента назовем P-равномерно распределенной (P-р. р.) по mod 1, если для произвольных действительного вектора $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ и целых векторов $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ и $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_r)$, проекции которых удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant i_\nu < j_\nu \leqslant P_\nu$,

$$\mu [\chi (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{P}; \mathbf{x}(k) + \sigma)] = \prod_{\nu=1}^{r} \frac{j_\nu - i_\nu}{P_\nu} \tag{2.2}$$

$$\mu [\varphi (k)] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi (k), \quad \chi (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{P}; \mathbf{x}) = \prod_{\nu=1}^{r} \chi (i_\nu, j_\nu, P_\nu; x_\nu) \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, а функция

$$\chi (i_\nu, j_\nu, P_\nu; x_\nu) = \begin{cases} 1, & i_\nu / P_\nu < \{x_\nu\} < j_\nu / P_\nu \\ 1/2, & \{x_\nu\} = i_\nu / P_\nu, \; \{x_\nu\} = j_\nu / P_\nu \\ 0, & \{x_\nu\} < i_\nu / P_\nu, \; \{x_\nu\} > j_\nu / P_\nu \end{cases} \tag{2.4}$$

Причем $\{x_\nu\}$ есть дробная часть числа x_ν.

Теорема 2.1. Для того чтобы система функций (2.1) была P-р. р. по mod 1, необходимо и достаточно, чтобы предельное соотношение

$$\mu [\varphi (\mathbf{x}(k) + \sigma)] = \frac{1}{P_1, \ldots, P_r} \sum_{h_r=1}^{P_r} \cdots \sum_{h_1=1}^{P_1} \varphi^* \left(\frac{h_1}{P_1}, \ldots, \frac{h_r}{P_r} \right) \tag{2.5}$$

выполнялось для всякой собственно интегрируемой по Риману в единичном кубе $0 \leqslant x_\nu \leqslant 1$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ функции $\varphi (\mathbf{x}) = \varphi (x_1, \ldots, x_r)$ периодической с периодом единица по переменным $x_1, \ldots, x_r$, для которой имеет смысл предел $\mu \; [\varphi (\mathbf{x}(k) + \sigma)]$.

В (2.5) через $\varphi^*(h_1 / P_1, \ldots, h_r / P_r)$ обозначено некоторое значение функции $\varphi (\mathbf{x})$, удовлетворяющее неравенству

$$\varphi_i (h_1 / P_1, \ldots, h_r / P_r) \leqslant \varphi^* (h_1 / P_1, \ldots, h_r / P_r) \leqslant \varphi_s (h_1 / P_1, \ldots, h_r / P_r)$$

где $\varphi_i \; (h_1 / P_1, \ldots, h_r / P_r)$ и $\varphi_s(h_1 / P_1, \ldots, h_r / P_r)$ — соответственно точные нижняя и верхняя границы функции $\varphi (\mathbf{x})$ в открытом прямоугольном параллелепипеде $(h_\nu - 1) / P_\nu < x_\nu < h_\nu / P_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, r)$.

Доказательство. Необходимость. Если условиться, что

$$\varphi (x_1, \ldots, x_r) = 1/2 \; [\varphi (x_1 + 0, \ldots, x_r + 0) + \varphi (x_1 - 0, \ldots, x_r - 0)]$$

[1] Целый вектор — вектор, все проекции которого есть целые числа.

то для каждой из рассматриваемых в данной теореме функций имеет место

$$\varphi(\mathbf{x}(k)+\sigma)=\sum_{h_r=1}^{P_r}\dots\sum_{h_1=1}^{P_1}\varphi_k^*\left(\frac{h_1}{P_1},\dots,\frac{h_r}{P_r}\right)\chi(\mathbf{h}-\mathbf{1},\mathbf{h},\mathbf{P};\mathbf{x}(k)+\sigma) \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{h}=(h_1,\dots,h_r)$, $\mathbf{1}=(1,\dots,1)$, а

$$\varphi_k^*\left(\frac{h_1}{P_1},\dots,\frac{h_r}{P_r}\right)=\begin{cases}\varphi(\dots,x_\nu(k)+\sigma_\nu),\dots), & (h_\nu-1)/P_\nu<\{x_\nu(k)+\sigma_\nu)\}<h_\nu/P^\nu\\ \varphi(\dots,(h_\nu-1)/P_\nu+0,\dots), & \{x_\nu(k)+\sigma_\nu)\}\leqslant(h_\nu-1)/P_\nu\\ \varphi(\dots,h_\nu/P_\nu-0,\dots), & \{x_\nu(k)+\sigma_\nu\})\geqslant h_\nu/P_\nu\\ & (\nu=1,\dots,r)\end{cases}$$

Следовательно,

$$\varphi_i(h_1/P_1,\dots,h_r/P_r)\leqslant\varphi_k^*(h_1/P_1,\dots,h_r/P_r)\leqslant\varphi_s(h_1/P_1,\dots,h_r/P_r) \tag{2.7}$$

Если предположить теперь, что система функций $x_\nu(\mathbf{k})$ P-р. р. по mod 1, то, суммируя по k обе части равенства (2.6) и учитывая неравенства (2.7) и соотношение (2.2), в пределе получим соотношение (2.5).

Достаточность. Пусть для системы функций (2.1) справедливо соотношение (2.5). Выбрав в качестве $\varphi(\mathbf{x})$ функцию $\chi(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{P};\mathbf{x})$ и учитывая очевидную формулу

$$\sum_{h_r=1}^{P_r}\dots\sum_{h_1=1}^{P_1}\chi^*\left(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{P};\frac{h_1}{P_1},\dots,\frac{h_r}{P_r}\right)=\prod_{\nu=1}^{r}(j_\nu-i_\nu)$$

приходим к соотношению (2.2).

Следовательно, система функций (2.1) P-р. р. по mod 1.

Для системы функций вида

$$x_\nu(k)=q_\nu(k)/P_\nu \qquad (\nu=1,\dots,r,\ k=1,2,3,\dots) \tag{2.8}$$

где $q_\nu(k)$ — целые числа, аналогично доказывается более определенная теорема.

Теорема 2.2. Система функций (2.8) P-р. р. по mod 1, тогда и только тогда, когда предельное соотношение

$$\mu[\varphi(\mathbf{x}(k)+\sigma)]=\frac{1}{P_1,\dots,P_r}\sum_{h_r=1}^{P_r}\dots\sum_{h_1=1}^{P_1}\varphi\left(\frac{h_1}{P_1}+\sigma_1,\dots,\frac{h_r}{P_r}+\sigma_r\right)$$

выполняется для каждой из упомянутых в теореме 2.1 функций $\varphi(\mathbf{x})$.

Теорема 2.3. Система функций (2.1) — P-р. р. по mod 1, если предельное соотношение

$$\mu[e(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}(k))]=0 \tag{2.9}$$

где $e(z)=e^{2\pi iz}$, выполняется для целых векторов $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_r)\neq(0,\dots,0)$, проекции которых $m_\nu\neq h_\nu P_\nu$, $h_\nu=\pm1,\pm2,\pm3,\dots$ $(\nu=1,\dots,r)$.

Доказательство. Учитывая определение функций $\chi(i_\nu,j_\nu,P_\nu;x_\nu)$, их можно представить сходящимися рядами Фурье

$$\chi(i_\nu,j_\nu,P_\nu;x_\nu+\sigma_\nu)=\sum_{m_\nu=-\infty}^{\infty}a_\nu(m_\nu)e(m_\nu x_\nu) \tag{2.10}$$

$$a_\nu(m_\nu)=\int_0^1\chi(i_\nu,j_\nu,P_\nu;x_\nu+\sigma_\nu)e(-m_\nu x_\nu)\,dx_\nu$$

Причем, как нетрудно видеть

$$a_\nu(0) = (j_\nu - i_\nu)/P_\nu, \qquad a_\nu(h_\nu P_\nu) = 0 \qquad (h_\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{2.11}$$

Обратимся теперь к системе функций (2.1) и предположим, что она удовлетворяет условиям теоремы. Для функции (2.3), согласно (2.10), имеем

$$\chi(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{P}; \mathbf{x}(k) + \sigma) = \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} a_1(m_1) \ldots a_r(m_r)\, e(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}(k)) \tag{2.12}$$

Суммируя обе части равенства (2.12) по k с учетом равенств (2.9) и (2.11), получим соотношение (2.2). Следовательно, система функций (2.1) P-р. р. по mod 1.

Определение 2.2. Числа $y_1, \ldots, y_r$ назовем P-рационально независимыми, если равенства $m_1 y_1 + \ldots + m_r y_r = m_0$ невозможны ни для одной совокупности целых чисел $(m_0, m_1, \ldots, m_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ такой, что значения $m_\nu \neq h_\nu P_\nu$, $h_\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ $(\nu = 1, \ldots, r)$.

Теорема 2.4. Если числа $y_1, \ldots, y_r$ — P-рационально независимы, то система функций $x_\nu(k) = k y_\nu (\nu = 1, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots)$ P-р. р. по mod 1.

Доказательство. По формуле для суммы геометрической прогрессии имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}(k))\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} e(k\eta)\right| = \left|\frac{e((n+1)\eta) - e(\eta)}{1 - e(\eta)}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - e(\eta)|} = \frac{1}{|\sin \pi\eta|}$$

где, по условию теоремы, $\eta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{y} = m_1 y_1 + \ldots + m_r y_r$ не может быть целым числом, если $\mathbf{m} \neq (0, \ldots, 0)$ и все $m_\nu \neq h_\nu P_\nu$, $h_\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Следовательно, справедливо соотношение (2.9) теоремы 2.3, что и доказывает данную теорему.

Отметим следующее. Если в определении 2.1. требовать выполнения равенства (2.2) для любых, как угодно больших чисел $P_1, \ldots, P_r$, то оно станет равносильно определению равномерного распределения (р. р.) в смысле Г. Вейля [3,5]. Точно так же из приведенных выше теорем могут быть получены аналогичные теоремы теории р. р. Далее, из определения 2.1, видно, что р. р. по mod 1 система функций является и P-р. р. по mod 1. Обратное, вообще говоря, неверно. Рассмотрим, например, следующую систему функций, которая заведомо не является р. р. по mod 1

$$x_\nu(k) = k u_\nu / v_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, r;\ k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.13}$$

Здесь u_ν, $v_\nu \neq 0$ — целые числа такие, что $D(u_\nu, v_\nu) = 1$ $(\nu = 1, \ldots, r)$, где $D(u_\nu, v_\nu)$ есть наибольший общий делитель чисел u_ν и v

Нетрудно показать, что систему функций (2.13) всегда можно представить в виде

$$x_\nu(k) = k q_\nu / c p_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{2.14}$$

где q_ν, c, $p_\nu \neq 0$ — целые числа, такие, что

$$D(p_\nu, q_\nu) = 1, \quad D(p_\mu, p_\nu) = 1 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, r,\ \mu \neq \nu)$$

Теорема 2.5. Система функций (2.13), представимая в виде (2.14), P-р. р. по mod 1, где $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_{r-1}, c_1 p_r)$, причем $c_1 p_r = v_r = c p_r / D(c, q_r)$.

Доказательство. Покажем сначала, что числа $q_1/cp_1, \ldots, q_r/cp_r$ P-рационально независимы. Для этого исследуем значения суммы

$$\eta = m_1 q_1 / c p_1 + \ldots + m_r q_r / c p_r \tag{2.15}$$

если вектор $(m_1, \ldots, m_r) \neq (0, \ldots, 0)$ имеет проекции $m_\nu \neq h_\nu P_\nu$, $h_\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$(\nu = 1, \ldots, r)$. Пусть $m_r \neq 0$, а $m_\nu = 0$ $(\nu = 1, \ldots, r-1)$. Тогда $\eta = m_r q_r / c p_r = m_r u_r / v_r$ и ясно, что при $m_r \neq h_r P_r = h_r v_r$ число η — дробное. Если хотя бы одно из чисел $m_1, \ldots, m_{r-1}$, например, $m_1 \neq 0$, то η можно представить в виде

$$\eta = m_1 q_1 / c p_1 + B_1 / c G_1 \tag{2.16}$$

Здесь $G_1 = p_2, \ldots, p_r$ и $B_1 = m_2 q_2 G_1 / p_2 + \ldots + m_r q_r G_1 / p_r$ — целые числа Умножив (2.16) на cG, находим, что с $G\eta = m_1 q_1 G_1 / p_1 + B_1$ — дробное число, так как $D(p_1, q_1) = D(p_1, G_1) = 1$ и $m_1 \neq h_1 p_1$, где h_1 — целое число. Следовательно, η также дробное число, т. е. по определению 2.2 числа $q_1 / c p_1, \ldots, q_r / c p_r$ Р-рационально, независимы и на основании теоремы 2.4 настоящая теорема доказана.

3. Вернемся к вопросу, затронутому в п. 1. Представим выражение (1.2) для среднего значения функции (1.1) в виде

$$\langle f \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{nT} \sum_{k=1}^{n} \int_{kT}^{(k+1)T} f(\omega_0 t_k, \omega_1 t_k, \ldots, \omega_r t_k)\, dt_k$$

где положено $\tau_0 = T > 0$, $\tau = (n+1)\,T$. Число T удобно приравнять к одной из величин $|1/\omega_0|, \ldots, |1/\omega_r|$. Пусть, например, $T = T_0 = |1/\omega_0|$. Обозначая $t_k = \vartheta + kT_0$, получим

$$\langle f \rangle = \mu \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f\left(\omega_0 \vartheta, k\frac{\omega_1}{\omega_0} + \omega_1 \vartheta, \ldots, k\frac{\omega_r}{\omega_0} + \omega_r \vartheta\right) d\vartheta \right] = \mu\,[\varphi(k y_1, \ldots, k y_r)]$$

Здесь $y_\nu = \omega_\nu / \omega_0$ $(\nu = 1, \ldots, r)$, а функция

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(\omega_0 \vartheta, \xi_1 + \omega_1 \vartheta, \ldots, \xi_r + \omega_r \vartheta)\, d\vartheta \tag{3.1}$$

Пусть числа $y_1, \ldots, y_r$ являются Р — рационально независимыми. Используя теоремы 2.4 и 2.1, придем к равенству

$$\langle f \rangle = \frac{1}{P_1, \ldots, P_r} \sum_{h_r=1}^{P_r} \cdots \sum_{h_1=1}^{P_1} \varphi^*\left(\frac{h_1}{P_1}, \ldots, \frac{h_r}{P_r}\right)$$

Если числа $P_1, \ldots, P_r$ достаточно велики, чтобы без значительной погрешности можно было положить

$$\frac{1}{P_\nu} \sum_{h_\nu=1}^{P_\nu} \varphi^*\left(\ldots, \frac{h_\nu}{P_\nu}, \ldots\right) = \int_0^1 \varphi(\ldots, \xi_\nu, \ldots)\, d\xi_\nu \tag{3.2}$$

то, учитывая соотношение (3.1) и полагая $x_0 = \omega_0 \vartheta$, будем иметь

$$\langle f \rangle = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\int_0^1 f\left(x_0, \xi_1 + \frac{\omega_1}{\omega_0} x_0, \ldots, \xi_r + \frac{\omega_r}{\omega_0} x_0\right) dx_0 \right] d\xi_1 \ldots d\xi_r =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_0, \xi_1 + y_1 x_0, \ldots, \xi_r + y_r x_0)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r \right] dx_0$$

Обозначив $x_\nu = \xi_\nu + y_\nu x_0$ ($\nu = 1,\ldots, r$) и переставив интегралы в нужном порядке, найдем, что

$$\langle f\rangle = \int_0^1\ldots\int_0^1\int_0^1 f(x_0, x_1, \ldots, x_r)\, dx_0\, dx_1, \ldots, dx_r \tag{3.3}$$

Следует отметить, что функция $\varphi(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ является значительно более гладкой, чем $f(x_0, x_1,\ldots, x_r)$, из которой она получена интегрированием. Поэтому практически для всех функций $f(\omega_0 t,\ldots, \omega_r t)$, встречающихся при исследовании колебаний, замена (3.2) вполне оправдана уже при $P_\nu > 3$.

Из изложенного выше, в частности, вытекает, что среднее значение функции $f(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t)$ можно вычислять по формуле

$$\langle f\rangle = \int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{3.4}$$

если отношение чисел $|\omega_1|$ и $|\omega_2|$ есть иррациональное число (в таком случае, формула (3.4) является точной) или может быть представлено отношением взаимно простых чисел P_1 и P_2, хотя бы одно из которых достаточно велико для возможности замены, подобной (3.2), т. е. практически, когда одно из них больше трех.

4. Рассмотрим функцию

$$\Psi_{2i} = |\cos(2\pi\omega_1 t - \varphi_1) + \gamma\cos(2\pi\omega_2 t - \varphi_2)|^{2i+1} \tag{4.1}$$

где $i = 0, 1, 2,\ldots$, а $\omega_1, \omega_2 > 0$. Эта функция является равномерной почти-периодической, так как соответствующая ей функция $|\cos(2\pi x_1 - \varphi_1) + \gamma\cos(2\pi x_2 - \varphi_2)|^{2i+1}$ непрерывна относительно своих переменных x_1 и x_2. Следовательно, для функции (4.1) существует среднее значение (1.2) (см., например, [4]). Если отношение частот ω_1 и ω_2 подчиняется ограничениям, указанным в конце предыдущего пункта, то, согласно формуле (3.4)

$$\langle\Psi_{2i}(\gamma)\rangle = \int_0^1\int_0^1 |\cos 2\pi x_1 + \gamma\cos 2\pi x_2|^{2i+1}\, dx_1\, dx_2$$

Предположим, что $|\gamma| \leqslant 1$ и вычислим сначала интеграл

$$B_{2i}(\gamma_2) = \int_0^1 |\cos 2\pi x_1 + \gamma_2|^{2i+1}\, dx_1$$

Здесь $\gamma_2 = \gamma_2(x_2) = \gamma\cos 2\pi x_2$. Имея в виду очевидные формулы (z — действительная величина)

$$d|z|/dz = \operatorname{sign} z, \qquad z^{2i+2}\operatorname{sign} z = z|z|^{2i+1}$$

нетрудно получить равенства [1]

$$B''_{2(i+1)}(\gamma_2) = (2i+2)(2i+3)B_{2i}(\gamma_2), \quad B_{2i}(0) = \frac{2}{\pi}\frac{2i!!}{(2i+1)!!}, \quad B'_{2i}(0) = 0 \tag{4.2}$$

которые позволяют по известному значению $B_{2i}(\gamma_2)$ найти $B_{2(i+2)}(\gamma_2)$. Учитывая это вычислим в первую очередь $B_0(\gamma_2)$. Несложные выкладки приводят к результату

$$B_0(\gamma_2) = \frac{2}{\pi}(\gamma_2\arccos\gamma_2 + \sqrt{1-\gamma_2^2}) = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{\gamma_2^2}{2} + \ldots + \frac{(2n-3)!!\,\gamma_2^{2n}}{2n!!\,(2n-1)} + \ldots\right) \tag{4.3}$$

Легко показать, что ряд (4.3) сходится при $|\gamma| \leqslant 1$. Сказанное относится и к рядам, которые будут получены ниже интегрированием (4.3).

[1] $m!!$ означает произведение натуральных чисел, не превосходящих m и одной с ним четности.

Воспользовавшись равенствами (4.2), найдем

$$B_2(\gamma_2)=\frac{4}{3\pi}\left(1+\frac{9}{2}\gamma_2^2+\frac{3}{8}\gamma_2^4+\ldots+9\frac{(2n-5)!!\,\gamma_2^{2n}}{2n!!\,(2n-1)(2n-3)}+\ldots\right) \qquad (4.4)$$

Аналогично можно определить и функции B_4, B_6,... Интегрируя (4.3) и (4.4) по x_2, получим

$$\langle\Psi_0(|\gamma|\leqslant 1)\rangle=\Theta_0(\gamma)=\frac{4}{\pi^2}\left[2E(\gamma)-(1-\gamma^2)K(\gamma)\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^4}{64}+\ldots+\left(\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\right)^2\gamma^{2n}+\ldots\right) \qquad (4.5)$$

$$\langle\Psi_2(|\gamma|\leqslant 1)\rangle=\Theta_2(\gamma)=\frac{4}{3\pi}\left(1+\frac{9}{4}\gamma^2+\frac{9}{64}\gamma^4+\ldots+9\left(\frac{(2n-5)!!}{2n!!}\right)^2\gamma^{2n}+\ldots\right) \qquad (4.6)$$

и т. д. В (4.5) через $K(\gamma)$ и $E(\gamma)$ обозначены полные эллиптические интегралы, соответственно, первого и второго рода.

Для $|\gamma|\geqslant 1$ таким же путем находим

$$\langle\Psi_0(|\gamma|\geqslant 1)\rangle=\gamma\Theta_0(1/\gamma), \qquad \langle\Psi_2(|\gamma|\geqslant 1)\rangle=\gamma^3\Theta_2(1/\gamma),\ldots \qquad (4.7)$$

5. Как сказано в п. 1, полученные результаты могут найти применение в теории колебаний. Обратимся еще раз к задаче, уже затронутой в работе [6].

Рассмотрим установившиеся колебания линейной упругой системы, к точке A которой, способной перемещаться вдоль оси x, приложена вынуждающая сила

$$H(t)=\sum_{i=1}^{m}H_i\sin(2\pi\omega_i t-\psi_i) \qquad (H_i\geqslant 0) \qquad (5.1)$$

направленная по той же оси, и сила трения

$$f(x^\cdot)=-\beta_0\operatorname{sign}x^\cdot-\beta_1 x^\cdot-\beta_2 x^{\cdot 2}\operatorname{sign}x^\cdot \qquad (5.2)$$

где β_0 — величина кулонова трения, а β_1 и β_2 — коэффициенты, соответственно, вязкого и квадратичного трения.

Пусть среди собственных частот Ω_j системы имеются две резонансные $\Omega_1=\omega_1$ и $\Omega_2=\omega_2$. Предположив, что отношение частот ω_1 и ω_2 подчиняется ограничениям [1], указанным в конце п. 3, выясним характер воздействия резонансных колебаний с одной частотой на резонансные колебания с другой частотой. Делая те же предположения, что и в работе [6], установившиеся колебания системы разыскиваем в виде (q_j — главные координаты)

$$q_j=a_j'\sin(2\pi\omega_j t-\varphi_j) \quad (j=1,\,2), \qquad q_j=0 \quad (j>2) \qquad (5.3)$$

что соответствует перемещению точки A по закону

$$x=\sum_j\alpha_j(A)\,q_j=\sum_{j=1}^{2}a_j\sin(2\pi\omega_j t-\varphi_j) \qquad (5.4)$$

где $a_j=\alpha_j(A)\,a_j'$, причем $\alpha_j(A)$ — есть значения коэффициентов формы собственных колебаний системы с частотами Ω_j в точке A.

Используя выкладки, произведенные в [6], получаем уравнения, служащие для определения неизвестных параметров решения (5.4)

$$\frac{1}{V_j}\frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial\varphi_j}=\frac{H_j}{2}\cos(\varphi_j-\psi_j), \qquad \frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial V_j}=\frac{H_j}{2}\sin(\varphi_j-\psi_j) \qquad (j=1,\,2) \qquad (5.5)$$

---

[1] Некоторым случаям, когда эти ограничения нарушаются, уделено внимание в работе [6].

Здесь $V_j = 2\pi\omega_j a_j$, а $\Phi = \Phi(x^{\cdot}) = \beta_0 | x^{\cdot} | + {}^1/_2\, \beta_1 x^{\cdot 2} + {}^1/_3\, \beta_2 | x^{\cdot} |^3$ диссипативная функция, соответствующая силам трения (5.2) [6]. Учитывая ограничения, наложенные на отношение частот ω_1 и ω_2, при помощи формул (4.5) — (4.7) нетрудно найти ее среднее значение ($\gamma = V_1 / V_2$):

$$\langle \Phi(\gamma) \rangle = \beta_0 V_2 \langle \Psi_0(\gamma) \rangle + {}^1/_4\, \beta_1 (V_1^2 + V_2^2) + {}^1/_3\, \beta_2 V_2^3 \langle \Psi_2(\gamma) \rangle \tag{5.6}$$

Рассмотрим два случая.

а) *Кулоново и вязкое трение.* При $\beta_2 = 0$ из (5.5) следует

$$\varphi_j - \psi_j = \pi/2, \qquad \beta_1 V_j + 2\beta_0\, \partial^{\cdot}(V_2 \langle \Psi_0 \rangle) / \partial V_j = H_j \quad (j = 1, 2) \tag{5.7}$$

Отсюда, допуская погрешность не более 10%, нетрудно, например, для a_1 получить приближенные формулы

$$a_1 = \begin{cases} \dfrac{H_1}{\beta_1 k}\left(1 - b_1 + \dfrac{b_1 H_2^2}{H_1^2 (2 - b_1)^2}\right), & H_2 \leqslant 0.5, \quad b_1 \leqslant 1 \\ \dfrac{H_1 (1 - b_2)}{\beta_1 k_1 (1 - b_2 / 2)}, & H_2 \geqslant 1.25 H_1, \quad b_2 \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.8}$$

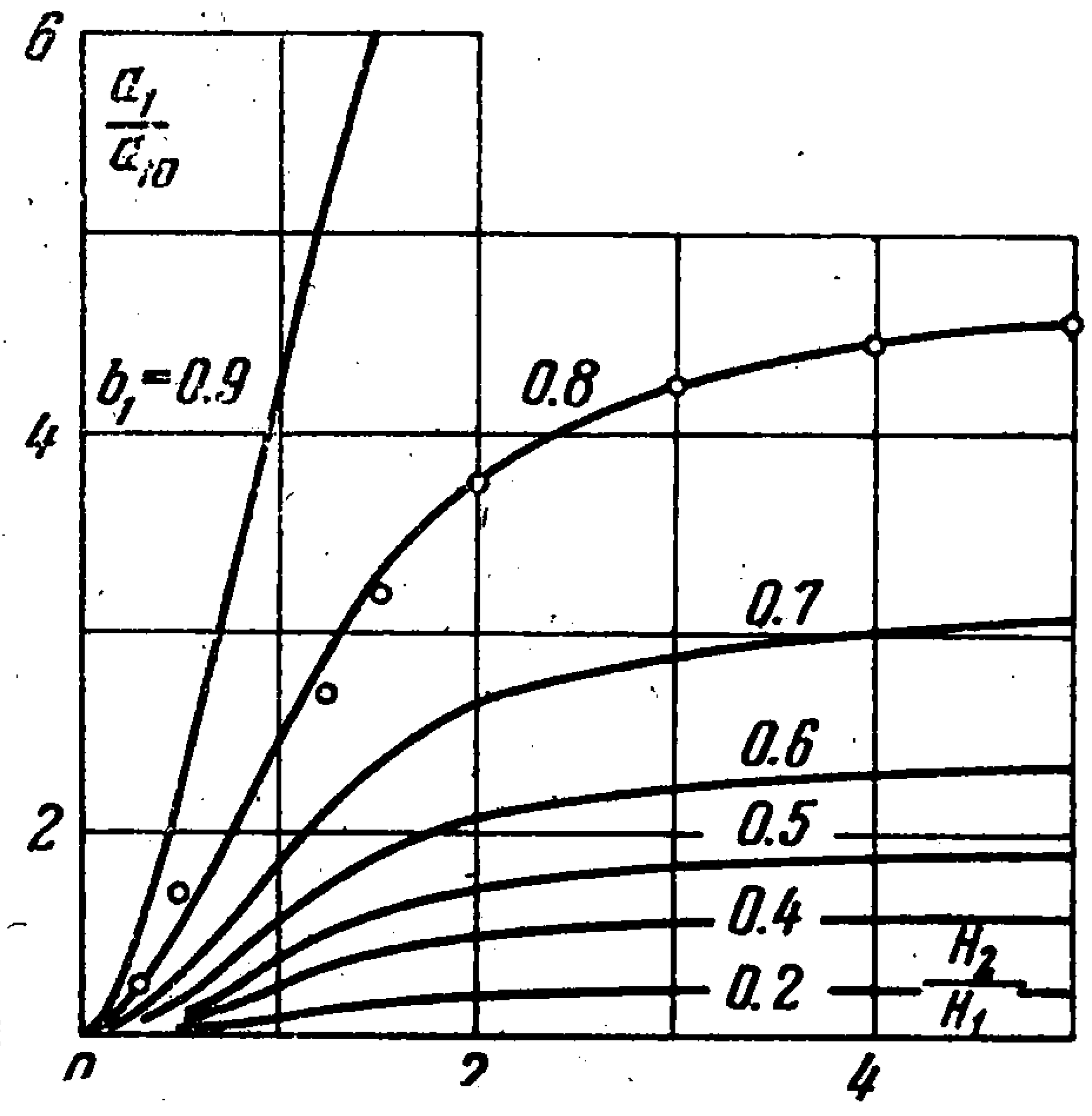
Здесь $b_j \doteq 4\beta_0 / \pi H_j$ $(j = 1, 2)$, а $k_1 = 2\pi\omega_1$.

Если $H_2 = 0$, то $a_1 = a_{10} = (1 - b_1) H_1/\beta_1 k_1$ $(b_1 < 1)$. Сравнивая a_1 и a_{10}, находим

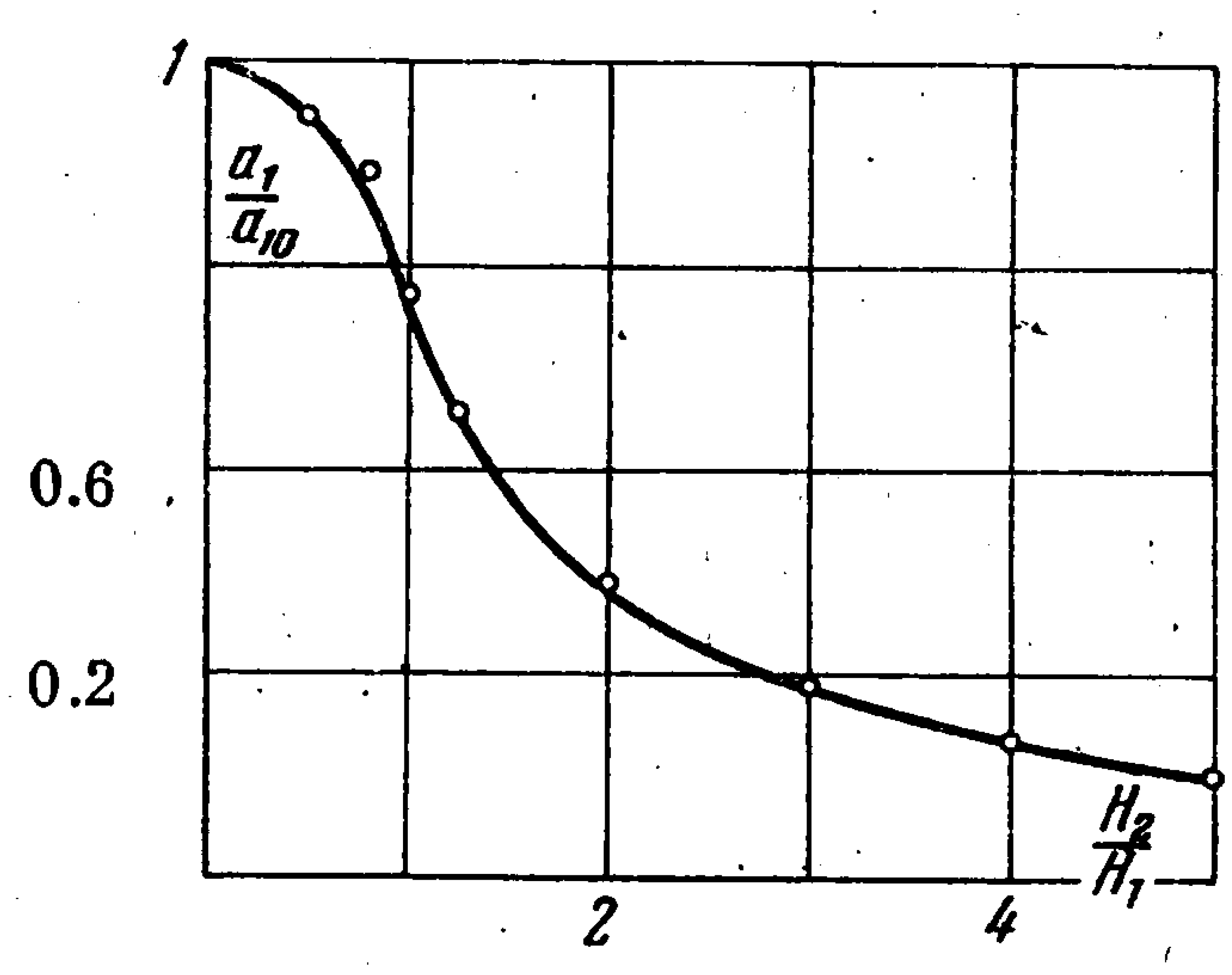
$$\frac{a_1}{a_{10}} = \begin{cases} 1 + \dfrac{b_1 h^2}{(1 - b_1)(2 - b_1)^2} \geqslant 1, & 0 \leqslant h \leqslant 0.5 \\ \dfrac{h - b_1}{(h - b_1/2)(1 - b_1)^2} > 1, & h \geqslant 1.25 \end{cases} \tag{5.9}$$

$$(h = H_2 / H_1, \; b_1 < 1)$$

На фиг. 1 представлена зависимость a_1 / a_{10} от $h = H_2 / H_1$, которая получена непосредственно из уравнений (5.7) для различных значений параметра b_1. Точки, нанесенные на кривой $b_1 = 0.8$, соответствуют формулам (5.9).



Фиг. 1



Фиг. 2

Анализируя результаты, полученные выше, а также в работе [6], можно сделать вывод, что в системе с кулоновым трением амплитуда резонансных колебаний увеличивается при введении дополнительного сигнала другой частоты. Кроме того, как это видно из (5.8), при $H_2 \geqslant 1.25\, H_1$, что соответствует приблизительно $V_2 \geqslant 1.15\, V_1$, резонансная амплитуда a_1 есть линейная функция амплитуды силы H_1. Следовательно, имеет место линеаризация кулонова трения, производимая гармоникой с большей амплитудой скорости для более «медленной» гармоники (ср. [6,7]).

б) *Квадратичное трение.* При β_0, $\beta_1 = 0$ уравнения (5.5) примут вид

$$\varphi_j - \psi_j = \pi / 2, \qquad {}^2/_3\, \beta_2\, \partial (V_2^3 \langle \Psi_2 \rangle) / \partial V_j = H_j \quad (j = 1,2) \tag{5.10}$$

Отсюда, внося погрешность не более чем 3%, получим

$$a_1 = \begin{cases} \sqrt{3\pi H_1 / 8\beta_2 k_1^2}\,(1 - H_2^2 / 6H_1^2), & H_2 \leqslant 0.8 H_1 \\ H_1 \sqrt{\pi / 6\beta_2 H_2 k_1^2}\,(1 + H_1^2 / 6H_2^2), & H_2 \geqslant H_1 \end{cases} \tag{5.11}$$

При $H_2 = 0$, $a_1 = a_{10} = \sqrt{3\pi H_1 / 8\beta_2 k_1^2}$. Следовательно,

$$\frac{a_1}{a_{10}} = \begin{cases} 1 - h^2 / 6, & 0 \leqslant h \leqslant 0.8 \\ (2 + {}^1/_3 h^2)/3 \sqrt{h}, & h \geqslant 1 \end{cases} \qquad (h = H_2 / H_1) \tag{5.12}$$

Зависимость a_1 / a_{10} от $h = H_2 / H_1$, представленная на фиг. 2, где кривая получена непосредственно из уравнений (5.10), а точки соответствуют результатам вычислений по формулам (5.12), показывает, что в системе с квадратичным трением амплитуда резонансных колебаний уменьшается при введении дополнительного сигнала другой частоты. Далее, при $H_2 \geqslant 1.5\ H_1$, т. е. $V_2 \geqslant 2\, V_1$ с незначительной погрешностью можно отбросить скобку в выражении (5.11), что говорит о фактической линеаризации квадратичного трения, производимой «быстрой» гармоникой для гармоники с меньшей амплитудой скорости.

Поступила 1 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. W e y l H. Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins, Math. Ann., Bd. 77, s.s. 313—352.
2. П о л и а Г., С е г е Г. Задачи и теоремы из анализа, т. I, Гостехиздат, 1956.
3. C o r p u t, J. G. Van der. Diophantische Unglechungen, 1. Zur Gleichverteilung Modulo Eins. Acta Math., 1931, Bd. 56, p. 373—456.
4. Л е в и т а н Б. М. Почти-периодические функции. Гостехиздат, 1953.
5. К а с с е л ь с Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. Изд-во иностр. лит., 1961.
6. М и р о н о в М. В. Использование принципа Гамильтона — Остроградского в задачах теории нелинейных колебаний, ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
7. К о л о в с к и й М. З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейных системах. Тр. Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1963, № 226, стр. 8—17.