В заключение укажем, что методом парных рядов можно рассмотреть и сферическую полость, к поверхности которой приложены заданные касательные напряжения.

Поступила 27 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, стр. 622.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, стр. 1101.
3. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Баблоян А. А. О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой. Изв. АН Арм.ССР, 1964, т. 17, № 3, стр. 55.
4. Баблоян А. А. Решение некоторых «парных» рядов. Докл. АН Арм. ССР, 1964, т. 39, № 3, стр. 149.
5. Минков И. М. О некоторых парных сумматорных уравнениях. Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матем. наук, Ленинград, 1964.
6. Руховец А. Н. Решение некоторых электростатических задач о поле незамкнутого сферического конденсатора. ЖТФ, 1965, т. 35, № 11, стр. 1989.
7. Руховец А. Н. Некоторые задачи электростатики, разрешимые с помощью систем парных уравнений. ЖТФ, 1967, т. 37, № 7.
8. Collins W. D. On some Dual Series Equations and their Applications to Electrostatic Problem for Spheroidal Caps. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1961, 57, 367.
9. Nobel B. Some Dual Series Equations involving Jacobi Polynomials. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1963, 59, 363.
10. Srivastav R. P. Dual Relations Involving Series of Jacobi Polinomials. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1956, 56, 185.
11. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд-во иностр. лит., 1952.
12. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
13. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз, 1963.

О НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ В ГИБКИХ НИТЯХ

М. А. Зак

(Ленинград)

Рассматриваются динамические явления у свободного конца гибкой нити. Дается математическое и энергетическое обоснование резкого возрастания скоростей точек нити вблизи свободного конца.

Рассмотрим гибкую, нерастяжимую однородную тяжелую нить (цепочку) длиной l, верхний конец которой закреплен, а нижний свободен.

Ограничиваясь рассмотрением плоских малых отклонений нити от вертикали, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial s}\left[(l-s)\frac{\partial v}{\partial s}\right] \tag{1}$$

Здесь v — горизонтальное отклонение точек нити от вертикали; l — длина; s — дуговая координата нити; t — время.

Начальные и граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$v(s, 0) = f_1(s), \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_{t=0} = f_2(s), \quad v(0, t) = 0, \quad \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(s\frac{\partial v}{\partial t}\right) - gv\right] ds = 0 \tag{2}$$

Последнее условие выражает теорему об изменении кинетического момента нити относительно точки подвеса для малых горизонтальных перемещений нити.

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(s, t), \quad v_k = [C_{1k} J_0(\sigma) + C_{2k} N_0(\sigma)] (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t), \quad \sigma = 2\omega_k \sqrt{l - s/g} \tag{3}$$

Здесь J_0, N_0 — функции Бесселя первого и второго рода, постоянные A_k и B_k определяются по начальным условиям, постоянные C_{1k}, C_{2k}, ω_k определяются из граничных условий.

Однако из (3) легко усмотреть, что $v \to \infty$ при $s \to l$, если не все C_{2k} равны нулю, так как $N_0(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to 0$ и, следовательно, решение (3) противоречит исходным допущениям о малости v.

В работе [1] было сделано дополнительное ограничение, состоящее в требовании конечности v и всех производных в области $0 \leqslant s \leqslant l$, которое привело к равенству $C_{2k} = 0$; но при этом было игнорировано последнее равенство (2). Другими словами, было получено решение в несколько суженном классе функций, которое математически оказалось вполне корректным, но не полностью удовлетворяло физическим условиям задачи.

Действительно, посредством такого решения нельзя объяснить, например, возникновение сверхзвуковых скоростей на конце нити (щелчок кнута), которое может иметь место даже при малых возмущениях у точки подвеса. В то же время использование последнего равенства (2) вместо требований конечности позволяет сделать важный качественный вывод

$$|v(l)| \geqslant \delta > 0 \text{ при } f_1(s) \to 0, \qquad f_2(s) \to 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant l) \tag{4}$$

где δ — фиксированное число, так как если бы из (4) следовало $v(l) \to 0$, то этот факт имел бы место и в (3) при условии (2).

Следовательно, линеаризованная задача о подвешенной нити приводит к бесконечным решениям на конце потому, что соответствующая нелинейная задача некорректна в области $0 \leqslant s \leqslant l$, другими словами, сколь угодно малые возмущения у точки подвеса могут привести к достаточно большим возмущениям (в частности, скоростям) у свободного конца.

Рассмотрим полученное явление с энергетической точки зрения. Пусть у точки подвеса образовалась изолированная поперечная волна малой амплитуды (например, в результате скачкообразного горизонтального смещения точки подвеса с последующим возвращением ее в первоначальное положение за интервал времени t_0). При этом будем полагать, что до возникновения этой волны нить была вертикальна и точки ее не имели скоростей.

Для полной механической энергии нити в этом случае можно получить выражение

$$E = \frac{1}{2}\rho \int_{s_1}^{s_2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + g(l - s)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right] ds = E_0 = \text{const} \tag{5}$$

где s_1 и s_2 — дуговые координаты переднего и заднего фронтов волны.

Учитывая, что в невозмущенном состоянии

$$T = g\rho(l - s) \tag{6}$$

где T — натяжение нити, и оставаясь в рамках предположений о малости v и ее производных, получим для скоростей распространения переднего и заднего фронтов волны формулы

$$\frac{ds_1}{dt} = \lambda_1 = \sqrt{g(l - s_1)}, \qquad \frac{ds_2}{dt} = \lambda_2 = \sqrt{g(l - s_2)} \tag{7}$$

Очевидно, что

$$s_1 = t\sqrt{gl} - {}^1/_2\, g t^2, \qquad s_2 = (t - t_0)\sqrt{gl} - {}^1/_4\, g(t - t_0)^2 \tag{8}$$

следовательно

$$\Delta s = s_1 - s_2 = t_0 \left(\sqrt{gl} - {}^1/_2\, gt \right) \tag{9}$$

Нетрудно подсчитать время t_*, в течение которого волна достигает свободного конца

$$t_* = 2 \sqrt{l / g} \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что $\Delta s \to 0$ при $t \to t_*$. Тогда в достаточной близости от конца нити можно для (5) получить приближение

$$E_0 \approx \frac{1}{2} \rho \left(\left[\frac{\partial v}{\partial t} \right]^2 + g\,(l - s) \left[\frac{\partial v}{\partial s} \right]^2 \right) \Delta s \tag{11}$$

Здесь $[\partial v / \partial t]^2$ и $[\partial v / \partial s]^2$ — осредненные по Δs квадраты скачков $\partial v/\partial t$ и $\partial v/\partial s$.

Учитывая, что на фронте волны сильного разрыва в нерастяжимых нитях существуют соотношения

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] = -\lambda \left[\frac{\partial v}{\partial s} \right]$$

где λ — скорость распространения фронта волны, из (11) получим $E_0 \approx \rho\, [\partial v / \partial t]^2 \Delta s$ и, следовательно,

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] = \sqrt{E_0 / \rho \Delta s} \to \infty \quad \text{при } t \to t_* \tag{12}$$

причем (12) имеет место при сколь угодно малых E_0.

Итак, по мере приближения изолированной волны к свободному концу нити, длина волны стремится к нулю (так как скорость заднего фронта все время больше, чем скорость переднего) и энергия E_0 концентрируется на бесконечно малом участке нити, примыкающем к свободному концу, вследствие чего до бесконечности возрастает скорость этого конца.

Конечно этот результат не может дать количественной информации об изучаемом явлении по тем же причинам, что и решение (3) с условиями (2), ибо при его получении полагалось, что v и $\partial v / \partial t$ малы. Однако, в данном случае сходство физических явлений для линейного и нелинейного случаев более наглядно. Действительно, в случае больших v и $\partial v / \partial t$ натяжение нити над волной будет больше, чем под ней (хотя эти натяжения уже могут не подчиняться соотношению (6)) и, следовательно, скорость заднего фронта будет всегда больше скорости переднего; кроме того, и в нелинейном случае $T(l, t) = 0$, т. е. скорость переднего фронта будет стремиться к нулю; таким образом, концентрация полной механической энергии на малом участке вблизи свободного конца будет происходить и в нелинейном случае, что приводит к наблюдаемому в действительности резкому возрастанию концевых скоростей нити при достаточно малых начальных возмущениях.

Приведенные соображения свидетельствуют о том, что не всегда искусственное обеспечение корректности задачи является физически оправданным; в рассмотренном случае некорректные решения лучше отражают реальные физические явления в нити, нежели корректные.

Поступила 11 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.