

Более сложным оказывается характер поведения в окрестности разрыва  $q(\theta)$  напряжения  $\tau_{\theta\varphi}$ . Для иллюстрации приведем асимптотические формулы, описывающие поведение  $\tau_{\theta\varphi}$  в окрестности конического сечения  $\theta = \theta_0$ :

$$\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^{(0)} + \tau_{\theta\varphi}^{(1)}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\varphi}^{(0)} &= \frac{3e^{3/2\varepsilon}}{8R_2 \operatorname{sh}^{3/2}\varepsilon} \left[ \int_0^\theta F_\tau(\theta, \xi) q(\xi) \sin \xi d\xi + \int_\theta^{1/2\pi} F_\tau^{(1)}(\theta, \xi) q(\xi) \sin \xi d\xi \right] \\ \tau_{\theta\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{8\pi R_2} \left\{ \ln 2 \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon} (\theta - \theta_0) + \cos \lambda\pi \right] - \frac{\pi}{\varepsilon} |\theta - \theta_0| \right\} [q(\theta_0 - 0) - \\ &\quad - q(\theta_0 + 0)] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для того чтобы отброшенные члены имели указанный порядок, достаточно предположить, что  $q'(\theta)$  в точке  $\theta = \theta_0$  имеет конечные пределы слева и справа.

Из соотношений (2.25) видно, что  $\tau_{\theta\varphi}$  содержит в себе решение типа погранслоя, локализованного в окрестности сечения  $\theta = \theta_0$ , относительно  $\varepsilon$  порядок его  $O(1)$ , на линии разрыва имеет логарифмическую особенность. Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\tau_{\theta\varphi}$  всюду, кроме линий разрыва, асимптотически стремится к значению, определяемому безмоментной теорией оболочек.

Для того чтобы решение трехмерной задачи всюду стремилось к безмоментному состоянию, достаточно непрерывности внешней нагрузки  $q(\theta)$ .

Поступила 10 VII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
2. Лурье А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ, 1943, т. 7, вып. 6.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
4. Виленская Т. В., Борович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
5. Устинов Ю. А. Переход от трехмерной задачи теории упругости к двумерной для замкнутой сферической оболочки при негладкой внешней нагрузке. Тр. VI Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. М., Изд-во «Наука», 1965.
6. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. т. 1. М., Изд-во «Наука», 1965.

#### СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

А. Н. Руховец, Я. С. Уфлянд

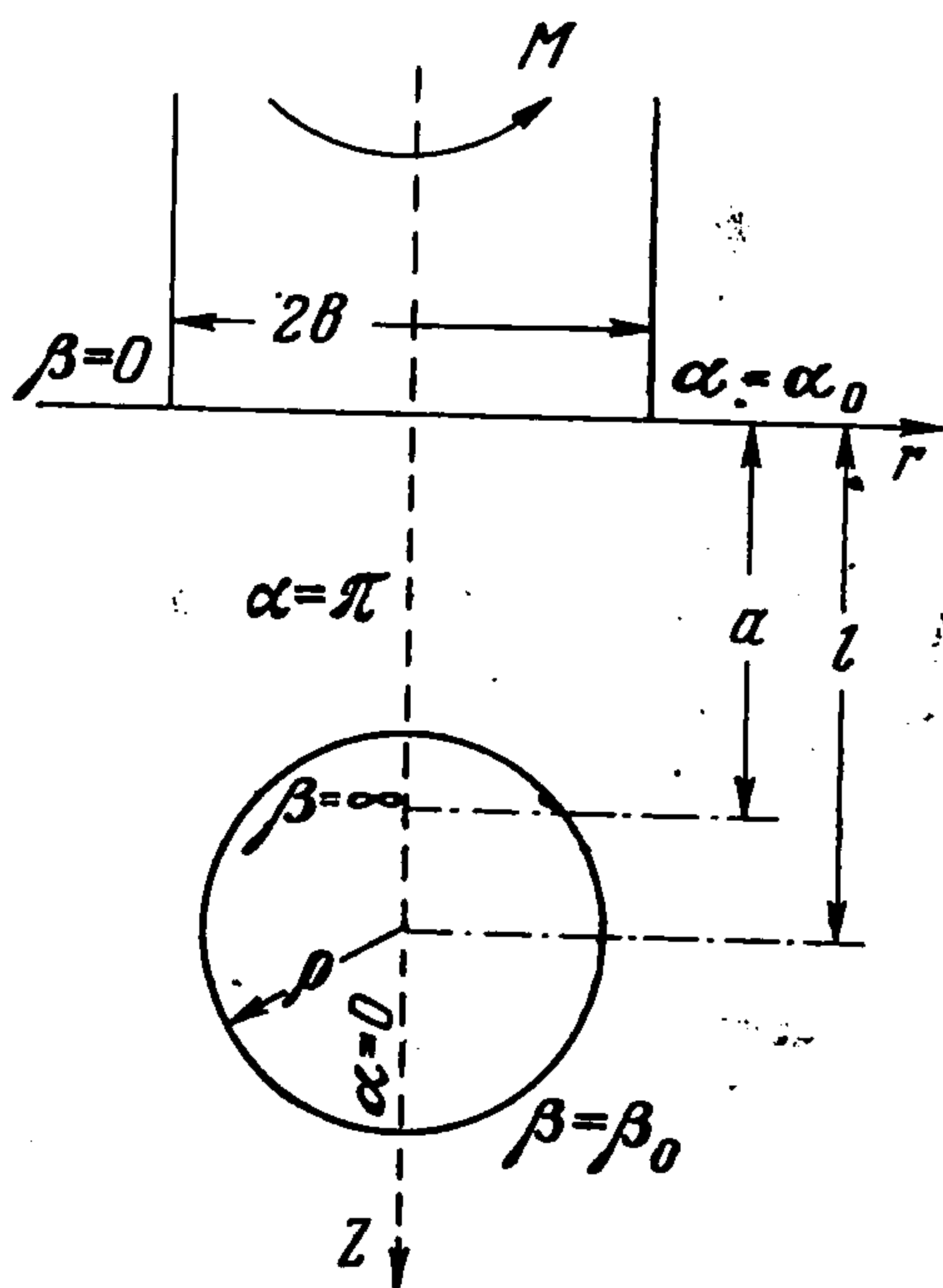
(Ленинград)

Методом парных рядов дано решение некоторых задач о кручении круговым штампом полупространства, содержащего сферическое включение.

Рассмотрен случай жесткого сферического ядра, а также случай сферической полости. В обоих вариантах задача поначалу сведена к парным рядам по присоединенным функциям Лежандра, а затем — к интегральному уравнению Фредгольма. Эффективное решение задачи получено путем разложения по малому параметру, связанному с отношением радиуса полости к расстоянию от ее центра до границы полупространства.

Найдены связи между углом поворота штампа и приложенным к нему скручивающим моментом.

§ 1. Предположим, что полупространство, сцепленное с жесткими круглым штампом и неподвижным сферическим ядром, скручивается с помощью момента  $M$ , приложенного к штампу. Если временно считать заданным угол поворота штампа  $\vartheta$ , то



напряженно-деформированное состояние определяется одной функцией  $v(r, z)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta v - r^{-2}v = 0 \quad (z > 0) \quad (1.1)$$

и граничным условиям

$$v|_S = \vartheta r, \quad \frac{\partial v}{\partial z}|_{S'} = 0, \quad v|_{\Sigma} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $S$  и  $S^1$  — области на граничной плоскости  $z = 0$  под штампом и вне штампа соответственно, а  $\Sigma$  — поверхность сферы.

Для решения задачи удобно ввести бисферическую систему координат  $(\alpha, \beta, \varphi)$  формулами (фиг. 1)

$$x = \frac{a \sin \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{a \sin \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \quad (1.3)$$

$$(0 \leq \beta \leq \beta_0, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi)$$

Тогда, разделяя переменные в уравнении (1.1) и удовлетворяя последнему из условий (1.2), будем иметь

$$v(\alpha, \beta) = \sqrt{2} \sqrt{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(n + 1/2)(\beta_0 - \beta) P_n^1(\cos \alpha) \quad (1.4)$$

Перепишывая оставшиеся граничные условия (1.2) в виде

$$v|_{\beta=0} = \vartheta \frac{a \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (\alpha_0 < \alpha \leq \pi) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta}|_{\beta=0} = 0 \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0) \quad (1.6)$$

приходим к следующим уравнениям в парных рядах<sup>1</sup>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(n + 1/2) \beta_0 P_n^1(\cos \alpha) = \frac{a \vartheta \sin \alpha}{\sqrt{2} (1 - \cos \alpha)^{3/2}} \quad (\alpha_0 < \alpha \leq \pi) \quad (1.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 1/2) A_n \operatorname{ch}(n + 1/2) \beta_0 P_n^1(\cos \alpha) = 0 \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0) \quad (1.8)$$

Положим

$$A_n \operatorname{ch}(n + 1/2) \beta_0 = \int_{\alpha_0}^{\pi} \varphi(t) \sin(n + 1/2)t dt \quad (1.9)$$

Тогда уравнение (1.8) удовлетворяется на основании соотношений [11]

$$P_n^1(\lambda) = -\sqrt{1 - \lambda^2} \frac{d}{d\lambda} P_n(\lambda), \quad \lambda = \cos \alpha \quad (1.10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t P_n(\cos \alpha) = 0, \quad t > \alpha \quad (1.11)$$

<sup>1</sup> Парные ряды по функциям  $P_n^m(\cos \alpha)$  для случаев  $m = 0$  и  $m = 1$  детально изучались в [1-6]. Случай произвольного значка  $m$  рассмотрен в статьях [7-10].

Второе из парных уравнений (1.7) преобразуется при помощи формул [12]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t P_n(\cos \alpha) \begin{cases} 0, & t < \alpha \\ [2(\cos \alpha - \cos t)]^{-1/2}, & t > \alpha \end{cases} \quad (1.12)$$

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{\sqrt{\cos \alpha - \cos x}} dx \quad (1.13)$$

к виду

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos \alpha - \cos x}} \left\{ \varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi} \varphi(t) [\eta(t-x) - \eta(t+x)] dt \right\} = - \frac{\vartheta a}{(1-\lambda)^{3/2}} \quad (1.14)$$

$$\eta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n + 1/2) u}{\exp[2(n + 1/2)\beta_0] + 1} \quad (1.15)$$

Интегрируя (1.14) по переменной  $\lambda$ , получаем интегральное уравнение Абеля

$$\int_{\alpha}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos \alpha - \cos x}} \left\{ \varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi} \varphi(t) [\eta(t-x) - \eta(t+x)] dt \right\} = - \frac{2\vartheta a}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} + c_0 \quad (1.16)$$

Решение этого уравнения после некоторых выкладок приводится к интегральному уравнению Фредгольма для основной функции  $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi} \varphi(t) [\eta(t-x) - \eta(t+x)] dt = \\ = \frac{c_0}{\pi} \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \vartheta a \frac{1}{\sin^{1/2} x} \quad (\alpha_0 < x < \pi) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Входящую в правую часть этого уравнения постоянную  $c_0$  определим из дополнительного условия интегрируемости величины  $\partial v / \partial \beta$  при  $\beta = 0$  в области  $\alpha_0 < \alpha < \pi$  (это условие эквивалентно требованию конечности приложенного к штампу крутящего момента). Воспользуемся соотношениями (1.9) — (1.11) и формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n + 1/2) t P_n(\cos \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)}, \quad t < \alpha \quad (1.18)$$

Тогда выражение

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = - \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (n + 1/2) \operatorname{ch}(n + 1/2) \beta_0 P_n^1(\cos \alpha) \quad (1.19)$$

приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = - \sqrt{1 - \cos \alpha} \left[ \varphi(\alpha_0) \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}} + \frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \right] \quad (1.20)$$

Чтобы удовлетворить поставленному выше требованию, следует, очевидно, положить в (1.20)

$$\varphi(\alpha_0) = 0 \quad (1.21)$$

Это и будет условием для определения постоянной  $c_0$ .

Теперь нетрудно вычислить величину момента  $M$ :

$$M = - G \iint_S \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0, r < b} r^2 dr d\varphi = - 2\pi G \int_0^b \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} r^2 dr \quad (1.22)$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига,  $b$  — радиус штампа.

Так как на основании (1.20), (1.21)

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1 - \cos \alpha}{a} \frac{\partial v}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = -\frac{1}{a} (1 - \cos \alpha)^{3/2} \frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}}$$

то

$$M = 2\pi G a^2 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \frac{d}{d\alpha} \left( \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \right) d\alpha \quad (1.23)$$

Интегрируя по частям и меняя порядок интегрирования, получим зависимость между моментом  $M$  и углом поворота  $\vartheta$

$$M = 2\pi G a^2 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sin^3(t/2)} dt \quad (1.24)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к интегральному уравнению Фредгольма (1.17), которое должно решаться, вообще говоря, численными методами; при этом возникают дополнительные трудности, так как ядро этого уравнения не выражается в явном виде. Тем не менее, при относительно малых значениях отношения  $\rho/l$  можно эффективно применить метод последовательных приближений.

Предварительно разложим ядро уравнения (1.17) по степеням  $\varepsilon = \exp(-\beta_0)$

$$\eta(t-x) - \eta(t+x) = 2 [(\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \dots) \sin^{1/2} t \sin^{1/2} x + (\varepsilon^3 - \varepsilon^6 + \dots) \sin^{3/2} t \sin^{3/2} x + (\varepsilon^5 - \varepsilon^{10} + \dots) \sin^{5/2} t \sin^{5/2} x + \dots] \quad (1.25)$$

Связь величин  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  с геометрическими параметрами дается формулами

$$\frac{l}{\rho} = \operatorname{ch} \beta_0, \quad \frac{l}{b} = \frac{\operatorname{cth} \beta_0}{\operatorname{ctg}^{1/2} \alpha_0}$$

В соответствии с этим разложим также в аналогичные ряды функцию  $\varphi(x)$  и величину  $c_0$ ; тогда уравнение (1.17) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \varphi_1(x) \varepsilon + \varphi_2(x) \varepsilon^2 + \dots &= \frac{4}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi} [\varphi_0'(t) + \varphi_1(t) \varepsilon + \varphi_2(t) \varepsilon^2 + \dots] \times \\ &\times \left[ (\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \dots) \sin \frac{t}{2} \sin \frac{x}{2} + (\varepsilon^3 - \varepsilon^6 + \dots) \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{3x}{2} + (\varepsilon^5 - \varepsilon^{10} + \dots) \times \right. \\ &\left. \times \sin \frac{5t}{2} \sin \frac{5x}{2} + \dots \right] dt + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{x}{2} (c_{00} + c_{01} \varepsilon + c_{02} \varepsilon^2 + \dots) - \frac{2va}{\pi} \frac{1}{\sin^{1/2} x} \quad (1.26) \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра в нулевом приближении, находим

$$\varphi_0(x) = \frac{2\vartheta a}{\pi} \left( \frac{\sin^{1/2} x}{(\sin^{1/2} \alpha_0)^2} - \frac{1}{\sin^{1/2} x} \right) \quad (1.27)$$

$$M_0 = 2\pi G a^2 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\varphi_0(t)}{(\sin^{1/2} t)^3} dt = \frac{16}{3} G \vartheta b^3 \quad (1.28)$$

Формула (1.28) совпадает с известным выражением крутящего момента для случая сплошного полупространства.

Последующие выкладки дают

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0, \quad \varphi_3(x) = 16\vartheta a \pi^{-2} (\sin \alpha_0 - \pi + \alpha_0) \sin^{1/2} x (\cos x - \cos \alpha_0) \quad (1.29)$$

Следовательно, первая поправка к моменту  $M_0$  имеет третий порядок малости, так что с хорошей степенью точности имеем

$$M \approx {}^{16/3} G \theta b^3 (1 + \Delta), \Delta = 12 \varepsilon^3 \pi^{-1} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_0)^3 (\sin \alpha_0 - \pi + \alpha_0)^2 \quad (1.30)$$

Для некоторых значений отношений  $\rho / l$  и  $b / l$  приводим значение поправки  $\Delta$ .

$\rho / l = 0.6$	0.7	0.8	
$\Delta = 0.012$	0.031	0.082	$(b/l = 1/3)$
$\Delta = 0.027$	0.059	0.133	$(b/l = 1/2)$
$\Delta = 0.048$	0.085	0.147	$(b/l = 1)$

Величина  $1 + \Delta$  характеризует степень увеличения момента  $M$ , связанного с наличием жесткого неподвижного ядра.

Заметим, что предложенным методом можно было бы решить и более общую задачу, когда крутящие моменты  $M$  и  $M'$  приложены и к штампу, и к ядру. При этом в решение следует ввести два угла поворота  $\vartheta$  и  $\vartheta'$  — штампа и ядра, так что последнее условие (1.2) становится неоднородным. После фактического вычисления моментов  $M$  и  $M'$  получается система уравнений с двумя неизвестными  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ . Рассмотренный выше случай соответствует значению  $\vartheta' = 0$ , так что величина  $M'$  может быть вычислена на основании найденного решения.

§ 2. Дадим решение задачи о скручивании круговым штампом полупространства со сферической плоскостью, поверхность которой свободна от напряжений.

Вместо обычно используемой в задачах подобного рода функции напряжений  $\Phi$ , удовлетворяющей уравнению [13]

$$\Delta \Phi - \frac{4}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

в данном случае удобно ввести другую функцию  $w(r, z)$  по формуле

$$\Phi = r^2 w \quad (2.2)$$

Нетрудно проверить, что функция  $w$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta w - 4r^{-2} w = 0 \quad (2.3)$$

и, следовательно, в бисферической системе координат представляется рядом

$$w = \sqrt{2} \sqrt{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \sum_{n=2}^{\infty} [A_n \operatorname{sh} (n + 1/2) (\beta_0 - \beta) + B_n \operatorname{sh} (n + 1/2) \beta] P_n^2 (\cos \alpha) \quad (2.4)$$

Используя известные соотношения теории кручения [13], поставим граничные условия для  $w(\alpha, \beta)$ :

$$[\partial w / \partial \beta]_{\beta=0} = 0 \quad (\alpha_0 < \alpha \leq \pi) \quad (2.5)$$

$$w|_{\beta=0} = C (1 - \cos \alpha)^2 / a^2 \sin^2 \alpha \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0) \quad (2.6)$$

$$w|_{\beta=\beta_0} = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (2.7)$$

Составляя момент усилий, приложенных к полусфере произвольного радиуса с центром в начале координат, можно получить следующую связь величины  $C$  с крутящим моментом  $M$ :

$$C = -1/2 M / \pi G \quad (2.8)$$

Условие (2.7) дает  $B_n = 0$ , после чего (2.5) и (2.6) приводят к системе парных сумматорных уравнений относительно величины  $A_n$ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n \operatorname{sh} (n + 1/2) \beta_0 P_n^2 (\cos \alpha) = \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{(1 - \cos \alpha)^{3/2}}{a^2 \sin^2 \alpha} \quad (0 \leq \alpha < \alpha_0) \quad (2.9)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n (n + 1/2) \operatorname{ch} (n + 1/2) \beta_0 P_n^2 (\cos \alpha) = 0 \quad (\alpha_0 < \alpha \leq \pi) \quad (2.10)$$

Полагая

$$A_n \operatorname{ch} \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta_0 = \int_0^{\alpha_0} \varphi(t) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt \quad (2.11)$$

и учитывая равенство

$$P_n^2(\lambda) = (1 - \lambda^2) \frac{d^2}{d\lambda^2} P_n(\lambda), \quad \lambda = \cos \alpha \quad (2.12)$$

а также (1.12), удовлетворим тождественно уравнению (2.10). Уравнение (2.9) на основании формул (2.12), (1.11), (1.18) с использованием интегрального представления

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(n + 1/2)x}{\sqrt{\cos x - \cos \alpha}} dx \quad (2.13)$$

преобразуется к виду

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \alpha}} \left\{ \varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \varphi(t) [\eta(t+x) + \eta(t-x)] dt \right\} = C \frac{(1-\lambda)^{3/2}}{a^2 (1-\lambda^2)^2} \quad (2.14)$$

Здесь функция  $\eta$  по-прежнему определена формулой (1.15).

Интегрируя (2.14) дважды по переменной  $\lambda$ , приходим к интегральному уравнению Абеля

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \alpha}} \left\{ \varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \varphi(t) [\eta(t+x) + \eta(t-x)] dt \right\} = \quad (2.15)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{C}{a^2} \left[ \sqrt{2} \sqrt{1-\lambda} + \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{2} + \sqrt{1-\lambda}} + \lambda \ln \frac{\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-\lambda}} \right] + c_1 \lambda + c_2$$

Решая последнее уравнение, получим, как и в § 1, для основной функции  $\varphi(x)$  интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \varphi(t) [\eta(t+x) + \eta(t-x)] dt =$$

$$= \frac{C}{a^2} \sin^3 \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} c_1 (1 - 2 \cos x) \cos \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} c_2 \cos \frac{x}{2} \quad (2.16)$$

Входящие в (2.16) постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определим из дополнительного условия интегрируемости величины  $\partial\psi / \partial s$  в области  $z = 0$  вне штампа ( $\psi$  — функция перемещения [13]).

Заметим, что смысл этого требования заключается в условии конечности угла поворота штампа  $\theta$ .

Используя связь между функциями  $\psi$  и  $\Phi$ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial n} (r^2 w) \quad (2.17)$$

находим, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} \Big|_{\beta=0} = -\left( \frac{1}{rh} \right)_{\beta=0} \frac{\partial w}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \quad \left( h = \frac{a}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \right) \quad (2.18)$$

Здесь  $h$  — коэффициент Ляме.

С учетом равенств (2.4), (2.11), (2.12), (1.12) получаем после выкладок

$$\frac{\partial w}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = -\sqrt{1 - \cos \alpha} \sin^2 \alpha \frac{[d^2]}{d(\cos \alpha)^2} \left[ \frac{\varphi(\alpha_0)}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}} - \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{\cos \alpha - \cos t}} \right] \quad (2.19)$$

так что должно иметь место равенство

$$\varphi(\alpha_0) = 0 \quad (2.20)$$

Далее, применяя к (2.19) формулу интегрирования по частям, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = & \sqrt{1 - \cos \alpha} \sin^2 \alpha \frac{d^2}{d(\cos \alpha)^2} \left[ 2 \sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0} \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\sin \alpha_0} - \right. \\ & \left. - 2 \int_{\alpha}^{\alpha_0} \left( \frac{\varphi'(t)}{\sin t} \right)'_t \sqrt{\cos \alpha - \cos t} dt \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Отсюда следует, что

$$\varphi'(\alpha_0) = 0 \quad (2.22)$$

Таким образом, соотношения (2.20), (2.22) служат для определения величин  $c_1$  и  $c_2$ , причем формула для  $\partial \psi / \partial s$  принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{\beta=0} = \frac{2}{a^2} (1 - \cos \alpha)^{3/2} \sin \alpha \frac{d^2}{d(\cos \alpha)^2} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \left[ \frac{\varphi'(t)}{\sin t} \right]'_t \sqrt{\cos \alpha - \cos t} dt \quad (2.23)$$

Из (2.23) нетрудно получить связь между углом поворота  $\vartheta$  и моментом  $M$ . Действительно, интегрируя (2.23) в области  $\beta = 0$ ,  $0 < \alpha < \alpha_0$  и учитывая, что  $\psi \rightarrow 0$  на бесконечности, получим

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \vartheta \quad (2.24)$$

Подставляя (2.23) в (2.24), после некоторых выкладок находим зависимость

$$\vartheta = -\frac{3}{4} \frac{\pi}{a} \varphi(0) \quad (2.25)$$

Величина  $\varphi(0)$  пропорциональна значению момента  $M$ , поэтому формула (2.25) и является искомой связью.

Для получения эффективного решения поставленной задачи аналогично способу, предложенному в § 1, разложим функции  $\eta$ ,  $\varphi$  и постоянные  $c_1$  и  $c_2$  в ряды по степеням параметра  $\varepsilon = e^{-\beta_0}$ . Приравнявая в уравнении (2.16) коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим в нулевом приближении

$$\varphi_0(x) = \frac{C}{a^2} \sin^3 \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} (1 - 2 \cos x) \cos \frac{x}{2} c_{10} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{x}{2} c_{20} \quad (2.26)$$

Находя  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  из условий (2.20), (2.22), получаем прежнюю зависимость (1.28), соответствующую случаю полупространства без полости. Дальнейшие выкладки дают

$$\varphi_k(x) = 0, \quad k = 1-4 \quad (2.27)$$

так что в этом случае поправка к моменту является величиной пятого порядка малости.

Приближенная формула для момента  $M$  имеет вид

$$M \approx M_0 (1 - \Delta), \quad \Delta = \varepsilon^5 \frac{64}{\pi} \sin^5 \frac{\alpha_0}{2} \cos^3 \frac{\alpha_0}{2} \quad (2.28)$$

Множитель  $1 - \Delta$  показывает, на сколько уменьшается значение момента  $M$ , необходимое для получения той же величины угла поворота  $\vartheta$  при наличии в полупространстве сферической полости со свободной поверхностью.

Приводим значения величины  $\Delta$  для некоторых значений параметров  $\rho / l$ ,  $b / l$ .

$\rho/l = 0.6$	0.7	0.8
$\Delta = 0.003$	0.012	0.038 ( $b/l = 1/3$ )
$\Delta = 0.005$	0.016	0.041 ( $b/l = 1/2$ )
$\Delta = 0.003$	0.008	0.014 ( $b/l = 1$ )

В заключение укажем, что методом парных рядов можно рассмотреть и сферическую полость, к поверхности которой приложены заданные касательные напряжения.

Поступила 27 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблюян А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, стр. 622.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, стр. 1101.
3. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Баблюян А. А. О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой. Изв. АН Арм.ССР, 1964, т. 17, № 3, стр. 55.
4. Баблюян А. А. Решение некоторых «парных» рядов. Докл. АН Арм. ССР, 1964, т. 39, № 3, стр. 149.
5. Минков И. М. О некоторых парных сумматорных уравнениях. Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матем. наук, Ленинград, 1964.
6. Руховец А. Н. Решение некоторых электростатических задач о поле незамкнутого сферического конденсатора. ЖТФ, 1965, т. 35, № 11, стр. 1989.
7. Руховец А. Н. Некоторые задачи электростатики, разрешимые с помощью систем парных уравнений. ЖТФ, 1967, т. 37, № 7.
8. Collins W. D. On some Dual Series Equations and their Applications to Electrostatic Problem for Spheroidal Caps. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1961, 57, 367.
9. Nobel B. Some Dual Series Equations involving Jacobi Polynomials. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1963, 59, 363.
10. Srivastava R. P. Dual Relations Involving Series of Jacobi Polynomials. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1956, 56, 185.
11. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд-во иностр. лит., 1952.
12. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
13. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз, 1963.

### О НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ В ГИБКИХ НИТЯХ

М. А. Зак

(Ленинград)

Рассматриваются динамические явления у свободного конца гибкой нити. Дается математическое и энергетическое обоснование резкого возрастания скоростей точек нити вблизи свободного конца.

Рассмотрим гибкую, нерастяжимую однородную тяжелую нить (цепочку) длиной  $l$ , верхний конец которой закреплен, а нижний свободен.

Ограничиваясь рассмотрением плоских малых отклонений нити от вертикали, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial s} \left[ (l-s) \frac{\partial v}{\partial s} \right] \quad (1)$$

Здесь  $v$  — горизонтальное отклонение точек нити от вертикали;  $l$  — длина;  $s$  — дуговая координата нити;  $t$  — время.

Начальные и граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$v(s, 0) = f_1(s), \quad \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \right]_{t=0} = f_2(s), \quad v(0, t) = 0, \quad \int_0^l \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( s \frac{\partial v}{\partial t} \right) - gv \right] ds = 0 \quad (2)$$

Последнее условие выражает теорему об изменении кинетического момента нити относительно точки подвеса для малых горизонтальных перемещений нити.