

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕГЛАДКИХ НАГРУЗКАХ

Н. А. Поляков, Ю. А. Устинов

(Ростов-на-Дону)

Осесимметричная задача упругого равновесия сферической оболочки рассматривалась в работах [1-3]. Подробный анализ асимптотического поведения решения для оболочки малой толщины в связи с проблемой предельного перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным дан в работе [4]. Однако вопрос о поведении решения при негладких нагрузках в этой работе не рассматривается. Некоторые результаты, касающиеся данной проблемы, получены в работе [5].

Дается анализ асимптотического поведения напряженно-деформированного состояния замкнутой сферической оболочки при кручении ее усилиями, равномерно распределенными вдоль параллелей, а также нагрузками, имеющими более слабые особенности. Исследование проводится на основе специальных формул суммирования рядов, содержащих функции Лежандра. Приводится вывод этих формул с той степенью общности, которая необходима для анализа поставленной задачи.

§ 1. Формулы суммирования. Рассмотрим ряд следующего вида

$$K(\theta, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} F(x_k) P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi) \quad F(z) = \frac{zU(z)}{D(z)} \quad \begin{matrix} (x_k = k + 1/2) \\ (z = x + iy) \end{matrix} \quad (1.1)$$

Здесь $P_k(\mu)$ — полиномы Лежандра, $F(z)$ — нечетная мероморфная функция.

Предположим, что $U(z)$ и $D(z)$ таковы, что выполняются следующие условия.

1) Функции $U(z)$, $D(z)$ — целые, принимающие действительные значения при $z = x$.

2) Поведение $F(z)$ вне окрестности полюсов для достаточно больших значений $|z|$ определяется неравенством

$$|F(z)| < M |z|^p e^{-\alpha|x|}$$

$$(M, p, \alpha = \text{const}; M > 0, \alpha > 0) \quad (1.2)$$

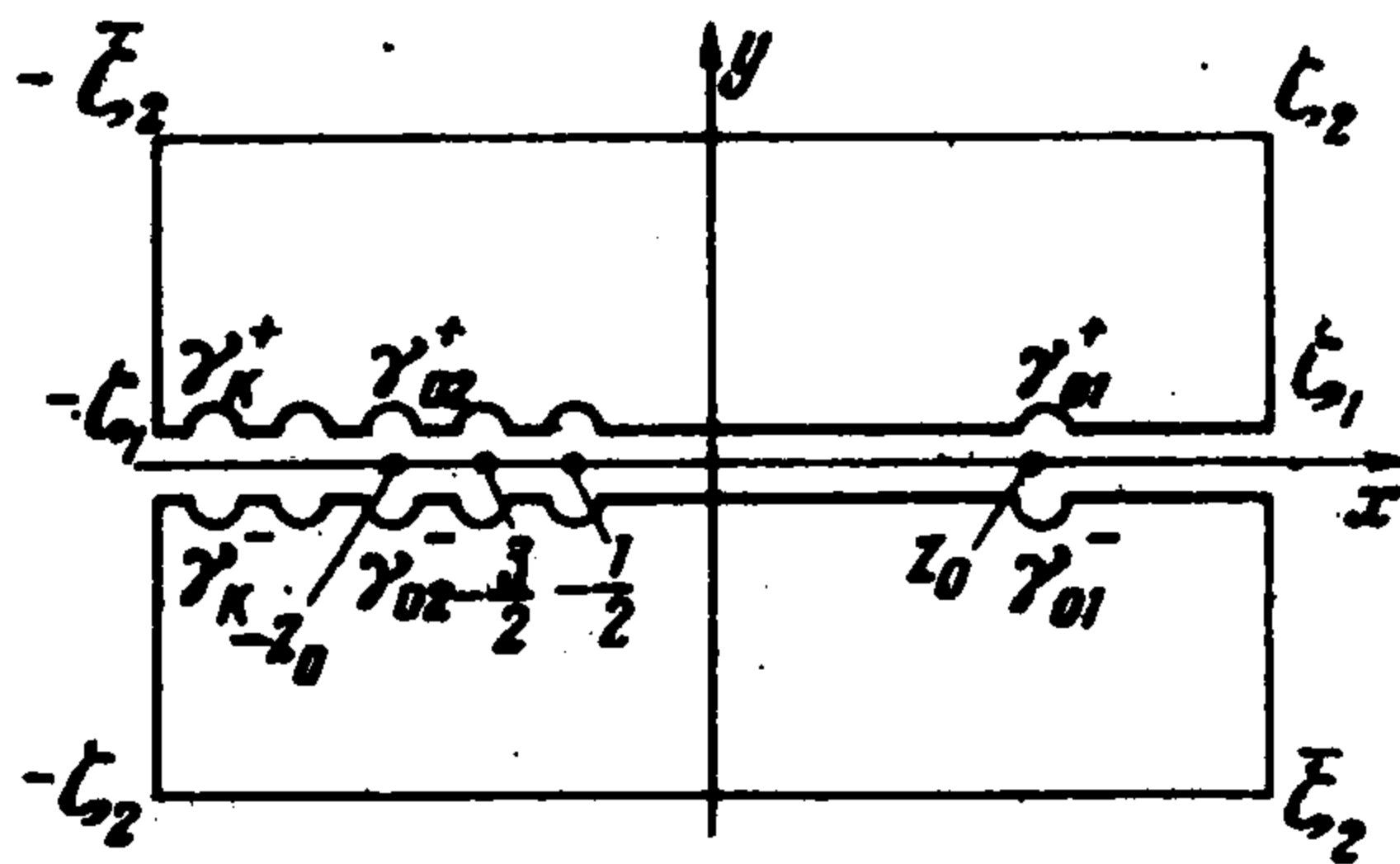
3) Функция $F(z)$ имеет счетное множество полюсов. Для простоты предположим, что на действительной оси имеется два n -кратных полюса z_0 и $-\bar{z}_0$ (если z_0 совпадает с каким-либо x_k , то ряд (1.1) не содержит соответствующего члена); все остальные полюса простые и комплексные. Те, которые лежат в первом квадранте, обозначим через z_k ($k = 1, 2, \dots$). Очевидно, что в силу свойства 1) вместе с z_k полюсами будут $-\bar{z}_k, \bar{z}_k, -z_k$.

Рядами типа (1.1) описывается напряженно-деформированное состояние сферической оболочки, если внешняя нагрузка приложена в виде условий, распределенных вдоль параллели $\theta = \xi$ (применяя принцип суперпозиции, можно получить решение и для любой распределенной нагрузки). В связи с этим и сформулированы условия для функции $F(z)$.

Исследовать поведение напряженно-деформированного состояния оболочки при стремлении ее относительно толщины к нулю, исходя непосредственно из рядов типа (1.1), не удастся. Для этого будут использованы формулы суммирования, вывод которых дается ниже.

1°. Допустим для определенности, что $\theta > \xi$, и рассмотрим следующие интегралы

$$J^{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^{\pm}} \Phi^{\pm}(z) dz, \quad \Phi^{\pm}(z) = F(z) P_{z-1/2}(\cos \xi) Q^{\pm}_{z-1/2}(\cos \theta)$$



Фиг. 1

Здесь C^+ , C^- — контуры, изображенные на фиг. 1, где ζ_1 , ζ_2 выбираются так, чтобы C^+ и C^- не содержали полюсов функции $F(z)$ и $Q_{z-1/2}^\pm(\cos \theta)$. Отметим следующие свойства функции Лежандра первого рода $P_{z-1/2}(\cos \xi)$, функции Лежандра второго рода

$$Q_{z-1/2}^\pm(\cos \theta) = Q_{z-1/2}(\cos \theta \mp i0).$$

1) при $|z| \rightarrow \infty$ в области $\delta \leq \theta \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$, имеем асимптотические выражения [6]:

$$P_{z-1/2}(\cos \theta) = \left(\frac{2}{\pi z \sin \theta}\right)^{1/2} \left[\cos\left(z\theta - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1})\right] \quad (1.3)$$

$$Q_{z-1/2}^\pm(\cos \theta) = \left(\frac{\pi}{2z \sin \theta}\right)^{1/2} [1 + O(z^{-1})] \exp\left[\pm i\left(z\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (1.4)$$

2) Величины $Q_{z-1/2}^\pm(\cos \theta)$ — мероморфные функции своего индекса, имеющие простые полюса в точках $z = -x_k$ ($x_k = k + 1/2$), при этом

$$\operatorname{res} Q_{z-1/2}^\pm(\cos \theta) = P_k(\cos \theta) \quad \text{при } z = -x_k \quad (1.5)$$

Это соотношение легко получить, если воспользоваться представлениями:

$$Q_{z-1/2}^\pm(\cos \theta) = P_{z-1/2}(\cos \theta) \left[\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \gamma - \psi(z + 1/2) \pm i\pi/2\right] + \\ + \frac{\cos \pi z}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma(l + 1/2 + z) \Gamma(l + 1/2 - z) \frac{\sigma(l)}{(l!)^2} \sin^{2l} \frac{\theta}{2} \quad \sigma(l) = \psi(l + 1) + \gamma$$

Здесь γ — постоянная Эйлера, $\psi(z + 1/2)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Нерегулярность $Q_{z-1/2}^\pm(\cos \theta)$ связана с тем, что функция $\psi(z + 1/2)$ имеет простые полюса в точках $z = -x_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Соотношение (1.5) является следствием того, что $\operatorname{res} \psi(z + 1/2) = -1$ относительно $z = -x_k$ и $P_{z-1/2}(\cos \theta) = P_{-z-1/2}(\cos \theta)$.

Вычисляя теперь J^+ и J^- при помощи теории вычетов, при $|\zeta_1|, |\zeta_2| \rightarrow \infty$ в пределе получаем

$$J^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z_k U(z_k)}{D'(z_k)} P_{z_k-1/2}(\cos \xi) Q_{z_k-1/2}^+(\cos \theta) + \frac{\bar{z}_k U(\bar{z}_k)}{D'(\bar{z}_k)} P_{\bar{z}_k-1/2}(\cos \xi) Q_{\bar{z}_k-1/2}^+(\cos \theta) \right] \quad (1.6)$$

$$J^- = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z_k U(z_k)}{D'(z_k)} P_{z_k-1/2}(\cos \xi) Q_{-z_k-1/2}^-(\cos \theta) + \frac{\bar{z}_k U(\bar{z}_k)}{D'(\bar{z}_k)} P_{\bar{z}_k-1/2}(\cos \xi) Q_{\bar{z}_k-1/2}^-(\cos \theta) \right] \quad (1.7)$$

Далее, представим J^+ и J^- в виде

$$J^+ = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_L - \sum_{k=1}^{[\zeta_1]} \int_{\gamma_k^+} - \int_{\gamma_{01}^+} - \int_{\gamma_{02}^+} + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} + \int_{\zeta_2}^{-\bar{\zeta}_2} + \int_{-\bar{\zeta}_2}^{-\zeta_1} \right\} \Phi^+(z) dz \quad (1.8)$$

$$J^- = \frac{1}{2\pi i} \left\{ - \int_L - \sum_{k=1}^{[\zeta_1]} \int_{\gamma_k^-} - \int_{\gamma_{01}^-} - \int_{\gamma_{02}^-} + \int_{-\zeta_1}^{-\zeta_2} + \int_{-\zeta_2}^{\bar{\zeta}_2} + \int_{\bar{\zeta}_2}^{\zeta_1} \right\} \Phi^-(z) dz \quad (1.9)$$

Здесь L — часть контуров C^+ и C^- , точки которой лежат на действительной оси; γ_{01}^+ , γ_{01}^- — полуокружности с центром в точке z_0 , лежащие соответственно выше и ниже действительной оси; γ_{02}^+ , γ_{02}^- — полуокружности с центром в точке $-z_0$ и распо-

ложенные соответственно выше и ниже действительной оси; γ_k^+ , γ_k^- — полуокружности с центрами в точках $z = -x_k$ и лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Покажем вначале, что при $|\zeta_1|, |\zeta_2| \rightarrow \infty$ три последних интеграла в (1.8), (1.9) исчезают. Рассмотрим, например, следующих два интеграла:

$$I_1^+ = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Phi^+(z) dz, \quad I_2^+ = \int_{\zeta_2}^{-\bar{\zeta}_2} \Phi^+(z) dz$$

Переходя к интегрированию соответственно по y и x , при помощи неравенства (1.2) и асимптотических формул (1.3), (1.4) легко получаем оценки

$$|I_1^+| < \frac{Me^{-\alpha|x|}}{2\sqrt{\sin\theta \sin\xi}} \int_0^\infty |z|^{p-1} [e^{-(\theta+\xi)y} + e^{-(\theta-\xi)y}] dy$$

$$|I_2^+| < \frac{M}{2\sqrt{\sin\theta \sin\xi}} [e^{-y(\theta-\xi)} + e^{-(\theta+\xi)y}] \int_{-\infty}^\infty |z|^{p-1} e^{-\alpha|x|} dx$$

По предположению $\theta > \xi$, поэтому последние неравенства показывают, что I_1^+ и I_2^+ неограниченно убывают при $|\zeta_1|, |\zeta_2| \rightarrow \infty$. Аналогичным образом можно показать, что исчезают интегралы по участкам $[-\bar{\zeta}_2, -\zeta_1]$, $[-\zeta_1, -\zeta_2]$, $[-\zeta_2, \zeta_2]$, $[\zeta_2, \zeta_1]$.

Далее, рассматривая интегралы по γ_k^+ и γ_k^- при $\rho \rightarrow 0$, на основании (1.5) и нечетности $F(z)$ получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k^+} \Phi^+(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k^-} \Phi^-(z) dz = \frac{1}{2} F(x_k) P_k(\cos\theta) P_k(\cos\xi)$$

После предельного перехода при $|\zeta_1|, |\zeta_2| \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$ приходим к следующим представлениям:

$$J^+ = \frac{K(\theta, \xi)}{2} - \frac{K_0^+(\theta, \xi)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \Phi^+(x) dx$$

$$J^- = \frac{K(\theta, \xi)}{2} - \frac{K_0^-(\theta, \xi)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \Phi^-(x) dx \quad (1.10)$$

Здесь и ниже несобственные интегралы понимаются в смысле их регулярных значений; $K(\theta, \xi)$ определено формулой (1.1)

$$K_0^\pm(\theta, \xi) = \operatorname{res}_{z=z_0} \Phi^\pm(z) + \operatorname{res}_{z=-z_0} \Phi^\pm(z) \quad (1.11)$$

Складывая теперь равенства (1.10) и используя выражения (1.6), (1.7), получаем первую формулу суммирования

$$K(\theta, \xi) = K_0(\theta, \xi) + \sum_{k=1}^\infty \left\{ \frac{z_k U(z_k)}{D'(z_k)} P_{z_k^{-1/2}}(\cos\xi) [Q_{z_k^+}(\cos\theta) + Q_{z_k^-}(\cos\theta)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{z}_k U(\bar{z}_k)}{D'(\bar{z}_k)} P_{\bar{z}_k^{-1/2}}(\cos\xi) [Q_{\bar{z}_k^+}(\cos\theta) + Q_{\bar{z}_k^-}(\cos\theta)] \right\}, K_0(\theta, \xi) = \frac{1}{2} [K_0^+(\theta, \xi) + K_0^-(\theta, \xi)]$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty F(x) P_{x^{-1/2}}(\cos\xi) [Q_{x^+}(\cos\theta) - Q_{x^-}(\cos\theta)] dx = 0$$

так как $Q_{x^+}(\cos\theta) - Q_{x^-}(\cos\theta) = -i\pi P_{x^{-1/2}}(\cos\theta)$, а $F(x)$ — по условию нечетная функция.

2°. Рассмотрим знакопеременный ряд вида

$$K_1(\theta, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k F(x_k) P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi)$$

Для вывода формулы суммирования ряда вычислим интеграл

$$J = -\frac{1}{4i} \oint_C \frac{F(z)}{\cos \pi z} P_{z-1/2}(\cos \theta) P_{z-1/2}(\cos \xi) dz$$

Здесь C — контур, изображенный на фиг. 2, где ζ выбирается так, чтобы контур не содержал в своей окрестности полюсов подынтегральной функции. Поскольку $\cos \pi z$ имеет нули в точках $z = \pm x_k$, а $F(z)$ — нечетная функция, по теореме вычетов получаем

$$J = \sum_{k=1}^n F(x_k) P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi) + K_0^{(1)} + W_N$$

$$K_0^{(1)} = -\frac{\pi}{2} \sum_{z=\pm z_0} \operatorname{res} \frac{F(z)}{\cos \pi z} P_{z-1/2}(\cos \theta) P_{z-1/2}(\cos \xi)$$

$$W_N = -2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N \frac{z_k U(z_k)}{\cos \pi z_k D'(z_k)} P_{z_k-1/2}(\cos \theta) P_{z_k-1/2}(\cos \xi)$$

где $n = [\operatorname{Re} \zeta]$, N — количество полюсов функции, лежащих в первой четверти, ограниченной прямоугольником C .

На основании неравенства (1.2) и асимптотической формулы (1.3) легко показать, что при $\theta + \xi < \pi$, $|\zeta| \rightarrow \infty$ интеграл стремится к нулю, поэтому после предельного

перехода получаем следующее представление для суммы ряда:

$$K_1(\theta, \xi) = K_0^{(1)} + W, \quad W = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N \quad (1.13)$$

§ 2. Кручение сферической оболочки. 1°. Пусть замкнутая сферическая оболочка, внутренний и внешний радиусы которой соответственно R_1 и R_2 , отнесена к сферической системе координат R, θ, φ , где θ — широта, φ — долгота, $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответствуют полюсам поверхности $R = \text{const}$.

Рассмотрим вначале случай, когда оболочка деформируется при следующих условиях:

$$\sigma_R = \tau_{R\theta} = \tau_{R\varphi} = 0 \quad \text{при } R = R_1$$

$$\sigma_R = \tau_{R\theta} = 0, \quad \tau_{R\varphi} = q [\delta(\theta - \xi) - \delta(\theta - \pi + \xi)] \quad \text{при } R = R_2$$

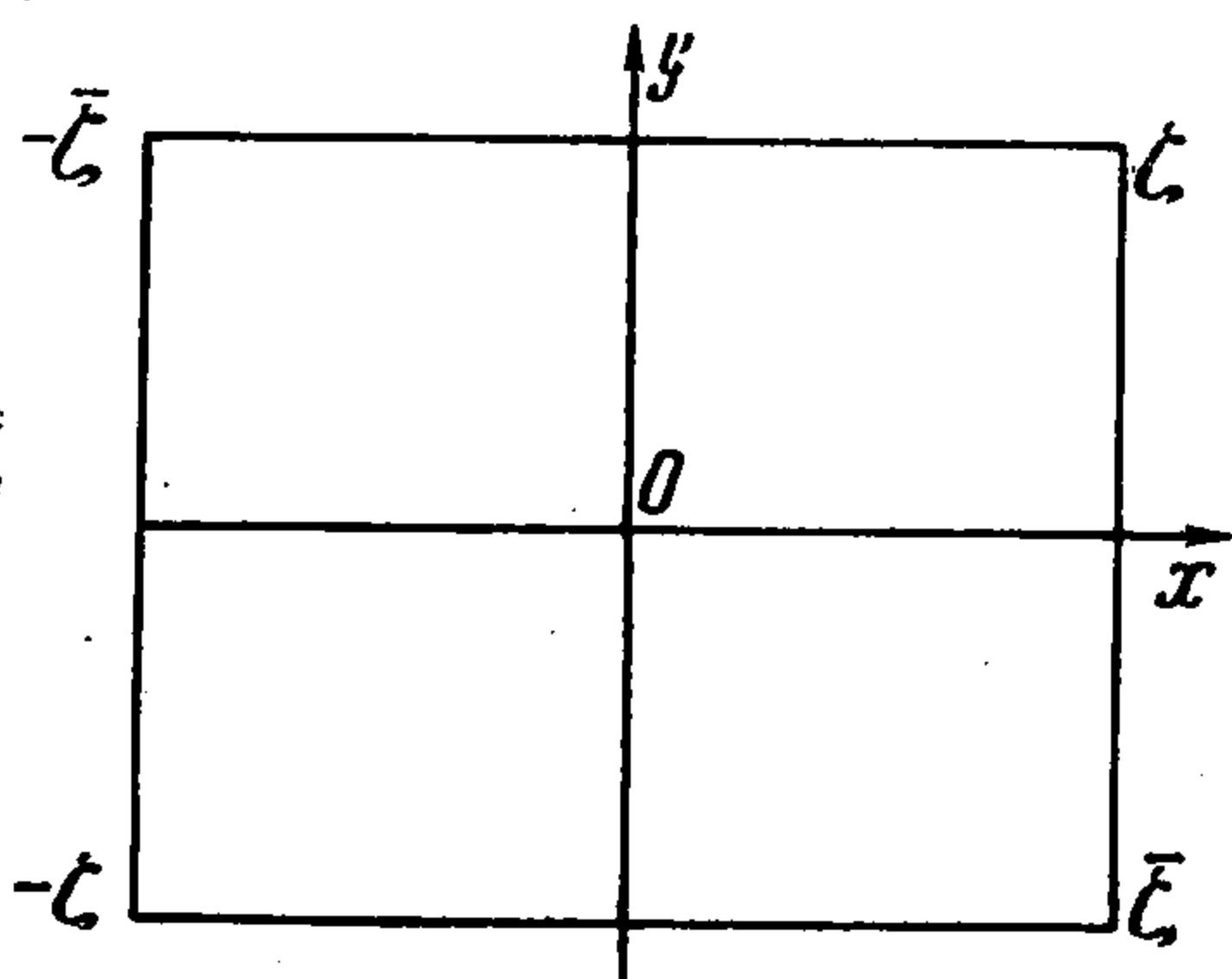
Здесь $\delta(\theta)$ — дельта-функция, q — интенсивность касательных усилий, распределенных вдоль параллелей $\theta = \xi$, $\theta = \pi - \xi$.

Решение этой задачи, полученное методом разделения переменных, имеет вид

$$u_R = u_\theta = 0, \quad \sigma_R = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{R\theta} = 0$$

$$u_\varphi = \frac{q \exp(\lambda + 3/2) \varepsilon}{2G} \sin \xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k} U(x_{2k})}{D(x_{2k})} \frac{dP_{2k}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_{2k}(\cos \xi)}{d\xi} =$$

$$= \frac{q \exp(\lambda + 3/2) \varepsilon}{4G} \sin \xi \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi} [K(\theta, \xi) + K_1(\theta, \xi)] \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Здесь G — модуль сдвига; а $K(\theta, \xi)$, $K_1(\theta, \xi)$ определяются формулами (1.12) и (1.13):

$$U(z, \lambda) = e^{-3/2\lambda\varepsilon} (2z \operatorname{ch} \lambda\varepsilon z + 3 \operatorname{sh} \lambda\varepsilon z) \quad (\lambda = 1 / \varepsilon \ln R / R_1) \quad (2.2)$$

$$D(z) = (z^2 - 1/4)(z^2 - 9/4) \operatorname{sh} \varepsilon z \quad (\varepsilon = \ln R_2 / R_1) \quad (2.3)$$

Из (2.3) видно, что $D(z)$ имеет четыре действительных нуля $z = \pm 1/2$, $z = \pm 3/2$ и счетное множество комплексных $z_k = i(k\pi / \varepsilon)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Напряжения $\tau_{k\varphi}$ и $\tau_{\theta\varphi}$ связаны с перемещением u_φ формулами

$$\tau_{R\varphi} = RG \frac{\partial}{\partial R} \frac{u_\varphi}{R}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{G}{R} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right)$$

Решение (2.1) плохо поддается анализу, когда $\varepsilon \rightarrow 0$ (как видно из (2.3) ε характеризует тонкостенность оболочки). Поэтому преобразуем его при помощи формулы суммирования (1.12) и (1.13). Заметим, что функция, стоящая под знаком суммы в (2.1), в точках $z = \pm 1/2$ полюсов не имеет, так как при этих значениях производная по θ в (2.1) обращается в нуль. Для u_φ , $\tau_{k\varphi}$, $\tau_{\theta\varphi}$ получим следующие выражения:

$$u_\varphi = u_\varphi^{(0)} + u_\varphi^{(1)}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^{(0)} + \tau_{\theta\varphi}^{(1)}, \quad \tau_{R\varphi} = \tau_{R\varphi}^{(1)} \quad (2.4)$$

Здесь

$$u_\varphi^{(0)} = \frac{3qe^{(\lambda+1/2)\varepsilon} \sin \xi}{16G \operatorname{sh}^{3/2} \varepsilon} F_u(\theta, \xi), \quad \tau_{\theta\varphi}^{(0)} = \frac{3qe^{3/2\varepsilon} \sin \xi}{8R_2 \operatorname{sh}^{3/2} \varepsilon} F_\tau(\theta, \xi) \quad (2.5)$$

$$u_\varphi^{(1)} = \frac{qe^{(\lambda+1/2)\varepsilon} \sin \xi}{4G} T_1(\theta, \xi, \lambda), \quad \tau_{R\varphi}^{(1)} = \frac{qe^{3/2\varepsilon} \sin \xi}{4R_2} \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} \quad (2.6)$$

$$\tau_{\theta\varphi}^{(1)} = \frac{qe^{3/2\varepsilon} \sin \xi}{4R_2} \left[\frac{\partial T_1}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta T_1(\theta, \xi, \lambda) \right]$$

$$F_u(\theta, \xi) = 2 \sin \xi (\sin \theta \ln \operatorname{ctg} 1/2\theta + \operatorname{ctg} \theta) \quad (2.7)$$

$$F_\tau(\theta, \xi) = - (2 \sin \xi / \sin^2 \theta) \quad (2.8)$$

Выражения (2.7), (2.8) справедливы при $\theta > \xi$:

$$T_1(\theta, \xi, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k U(z_k)}{(z_k^2 - 1/4)(z_k^2 - 9/4) \varepsilon \operatorname{ch} \varepsilon z_k} P_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \xi) [2Q_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta) + \pi \frac{\sin \pi z_k + 1}{\cos \pi z_k} P_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta)] \quad (2.9)$$

При $\theta < \xi$ в выражении для $u_\varphi^{(0)}$ нужно $F_u(\theta, \xi)$ заменить на $F_u(\xi, \theta)$ в формулах (2.6) — заменить $T_1(\theta, \xi, \lambda)$ на $T_1(\xi, \theta, \lambda)$ и в формуле для $\tau_{\theta\varphi}^{(0)}$ заменить $F_\tau(\theta, \xi)$ на

$$F_\tau^{(1)}(\theta, \xi) = 0 \quad (2.10)$$

Покажем, что при достаточно малом ε выражения $u_\varphi^{(1)}$, $\tau_{\theta\varphi}^{(1)}$, $\tau_{R\varphi}^{(1)}$ локализованы в окрестности приложения нагрузки ($\theta = \xi$, $\theta = \pi - \xi$). Для этого, очевидно, достаточно показать, что функция $T_1(\theta, \xi, \lambda)$ быстро убывает по мере удаления от указанных параллелей.

Обратимся к выражению (2.9). Заметим, что величины $z_k = ik\pi / \varepsilon$ имеют большие значения при малых ε . Поэтому, заменяя в (2.9) $Q_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta)$, $P_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta)$ двумя членами их асимптотических разложений, после некоторых преобразований $T_1(\theta, \xi, \lambda)$ можно представить в виде

$$T_1(\theta, \xi, \lambda) = e^{-3/2\lambda\varepsilon} [T_1^{(0)}(\theta, \xi, \lambda) + \varepsilon T_1^{(1)}(\theta, \xi, \lambda) + O(\varepsilon^2)] \quad (2.11)$$

Здесь

$$T_1^{(0)}(\theta, \xi, \lambda) = \frac{2}{V \sin \theta \sin \xi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \lambda \pi k}{k} N_k^{(0)}(\theta, \xi) \quad (2.12)$$

$$T_1^{(1)}(\theta, \xi, \lambda) = \frac{3}{\pi^2 \sqrt{\sin \theta \sin \xi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left[\sin \lambda \pi k N_k^{(0)} + \frac{1}{4} \cos \lambda \pi k N_k^{(1)} \right] \quad (2.13)$$

$$N_k^{(0)}(\theta, \xi) = \exp \left[-\frac{k\pi}{\varepsilon} (\theta - \xi) \right] - \exp \left[-\frac{k\pi}{\varepsilon} (\pi - \xi - \theta) \right] + \\ + \operatorname{sh} \frac{k\pi}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} - \xi \right) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{sch} \frac{k\pi^2}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{k\pi^2}{\varepsilon} \right) \quad (2.14)$$

$$N_k^{(1)}(\theta, \xi) = 2 \operatorname{sch} \frac{k\pi^2}{\varepsilon} \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} + \xi \right) \operatorname{ch} \frac{k\pi}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{ctg} \theta - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} + \xi \right) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{ctg} \xi \right] \quad (2.15)$$

На основании (2.11) — (2.15) можно сделать вывод, что $u_\varphi^{(1)}$, $\tau_{\theta\varphi}^{(1)}$, $\tau_{R\varphi}^{(1)}$ являются решениями типа пограничного слоя, локализованного в окрестности линий приложения нагрузки. При этом они затухают тем быстрее, чем меньше параметр тонкостенности ε . Следовательно, на достаточном удалении от линий $\theta = \xi$ и $\theta = \pi - \xi$ напряженно-деформированное состояние оболочки определяется выражениями $u_\varphi^{(0)}$ и $\tau_{\theta\varphi}^{(0)}$.

Представим $u_\varphi^{(0)}$ и $\tau_{\theta\varphi}^{(0)}$ в виде

$$u_\varphi^{(0)} = \frac{3q \sin \xi}{4G\varepsilon_0} F_u(\theta, \xi) \left[1 + \left(1 + \frac{2\eta}{h} \right) \varepsilon_0 + \left(\frac{2\eta}{h} + \frac{1}{6} \right) \varepsilon_0^2 \right] \\ \tau_{\theta\varphi}^{(0)} = -\frac{q \sin^2 \xi}{R_0 \varepsilon_0} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{12} \varepsilon_0^2 \right) \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_0 = h/R_0, \quad h = R_2 - R_1, \quad R_0 = 1/2 (R_2 + R_1), \quad \eta = R - R_0 \quad (2.17)$$

Здесь h — толщина оболочки, R_0 — радиус срединной поверхности. Первые члены разложений (2.16), (2.17) представляют собой безмоментное решение классической теории оболочек. Таким образом, всюду вне конических сечений $\theta = \xi$ и $\theta = \pi - \xi$ напряженно-деформированное состояние оболочки с точностью до членов порядка ε_0 совпадает с безмоментным.

Исследуем теперь более детально поведение решения в окрестности линий приложения внешних условий. Будем считать, что сечения $\theta = \xi$ и $\theta = \pi - \xi$ расположены так, что взаимным влиянием погранслоев можно пренебречь, тогда в силу симметрии задачи достаточно ограничиться исследованием напряженно-деформированного состояния в окрестности конического сечения $\theta = \xi$. Выделяя в (2.9) главную часть и суммируя ее, получим для $u_\varphi^{(1)}$, $\tau_{\theta\varphi}^{(1)}$ и $\tau_{R\varphi}^{(1)}$ следующие выражения:

$$u_\varphi^{(1)} = -\frac{qe^{1/2(1-\lambda)\varepsilon}}{4\pi G} \left(\frac{\sin \xi}{\sin \theta} \right)^{1/2} \left\{ \ln 2 \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon} (\theta - \xi) + \cos \lambda \pi \right] - \frac{\pi}{\varepsilon} |\theta - \xi| - \right. \\ \left. - \frac{3\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left[\sin \lambda \pi k + \frac{\cos \lambda \pi k \operatorname{sign}(\theta - \xi) (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \xi)}{4} \right] \exp \left[\frac{-k\pi |\theta - \xi|}{\varepsilon} \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (2.18)$$

$$\tau_{R\varphi}^{(1)} = \frac{qe^{3/2(1-\lambda)\varepsilon}}{4R_2\varepsilon} \left(\frac{\sin \xi}{\sin \theta} \right)^{1/2} \left[\frac{\sin \lambda \pi}{\operatorname{ch} [(\pi/\varepsilon)(\theta - \xi)] + \cos \lambda \pi} + \right. \\ \left. + \frac{3\varepsilon}{4\pi} \operatorname{sign}(\theta - \xi) (\operatorname{ctg} \xi - \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{arctg} \frac{\sin \lambda \pi}{\exp [(\pi/\varepsilon)|\theta - \xi|] + \cos \lambda \pi} + Q(\varepsilon^2) \right] \quad (2.19)$$

$$\tau_{\theta\varphi}^{(1)} = -\frac{qe^{3(1-\lambda)\varepsilon/2}}{4R_2\varepsilon} \left(\frac{\sin \xi}{\sin \theta} \right)^{1/2} \left\langle \frac{\operatorname{sh} [(\pi/\varepsilon)(\theta - \xi)]}{\operatorname{ch} [(\pi/\varepsilon)(\theta - \xi)] + \cos \lambda \pi} - \operatorname{sign}(\theta - \xi) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ \frac{1}{8} \varphi(\theta, \xi) \left[\ln 2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon} (\theta - \xi) + \cos \lambda \pi \right) + \frac{\pi}{\varepsilon} |\theta - \xi| - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 3 \operatorname{arctg} \frac{\sin \lambda \pi}{\exp [(\pi/\varepsilon)|\theta - \xi|] + \cos \lambda \pi} \right\} + O(\varepsilon^2) \right\rangle \quad (2.20)$$

$$\varphi(\theta, \xi) = 3 \operatorname{ctg} \xi - 15 \operatorname{ctg} \theta \quad \text{при } \theta > \xi, \quad \varphi(\theta, \xi) = -13 \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{ctg} \xi \quad \text{при } \theta < \xi$$

Полученные соотношения выявляют характер особенностей, которые имеют перемещение u_φ и напряжения $\tau_{R\varphi}$ и $\tau_{\theta\varphi}$ в окрестности линий приложения нагрузки (из формулы (2.5) видно, что проникающая часть решения $u_\varphi^{(0)}$ и $\tau_{\theta\varphi}^{(0)}$ (особенностей не имеет). Именно, при $\theta = \xi$ и $\lambda = 1$ ($R = R_2$), как следует из (2.18), u_φ имеет логарифмическую особенность, а из (2.19) и (2.20) $\tau_{\theta\varphi}$ и $\tau_{R\varphi}$ — степенную. Следовательно, в окрестности линий нагружения напряженно-деформированное состояние имеет трехмерный характер.

Интересно отметить, что если устремить кривизну оболочки к нулю, а θ и ξ к $1/2\pi$, то формулы (2.18) — (2.20) в пределе дают решение для слоя, у которого вдоль прямой линии, расположенной на торце, действуют равномерно распределенные касательные усилия.

Сравнительный анализ соотношений (2.5) и (2.18) — (2.20) показывает, что в конических сечениях $\theta = \xi$ и $\theta = \pi - \xi$ $u_\varphi^{(0)}$, $\tau_{\theta\varphi}^{(0)}$ имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$, в то время как порядок $u_\varphi^{(1)}$ и $\tau_{\theta\varphi}^{(1)}$ соответственно $O(1)$ и $O(\varepsilon^{-1})$. Это позволяет сделать выводы, что u_φ при $\varepsilon \rightarrow 0$ всюду, кроме линий нагружения, асимптотически стремится к решению безмоментной теории оболочек, а для $\tau_{\theta\varphi}$ в точках указанных сечений дает поправку того же порядка относительно ε , что и $\tau_{\theta\varphi}^{(0)}$. При этом как $\tau_{\theta\varphi}^{(0)}$, так и $\tau_{\theta\varphi}^{(1)}$ при $\theta = \xi$, $\theta = \pi - \xi$ имеют разрывы первого рода, однако $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^{(0)} + \tau_{\theta\varphi}^{(1)}$ непрерывно и имеет вид

$$\tau_{\theta\varphi} = -\frac{q}{4R_2\varepsilon} \left[1 + \delta(1 - \lambda) + O(\varepsilon) \right]$$

как это вытекает из (2.5), (2.8), (2.9) и (2.20). При $\lambda = 1$, $\theta = \xi$, $\theta = \pi - \xi$, как уже отмечалось, $\tau_{\theta\varphi}$ имеет особенность.

Относительно напряжений $\tau_{R\varphi}^{(1)}$ заметим, что при $\theta \neq \xi$, $\theta \neq \pi - \xi$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ оно неограниченно убывает. При $\theta = \xi$:

$$\tau_{R\varphi} = \frac{q}{4R_2\varepsilon} \left[\operatorname{tg} \frac{\lambda\pi}{2} + O(\varepsilon) \right]$$

и, как видно, имеет тот же порядок, что и $\tau_{\theta\varphi}$.

Проведенный анализ показывает, что в окрестности линий нагружения предельный переход к двумерным задачам невозможен, поскольку напряженное состояние имеет здесь существенно трехмерный характер.

2°. Исследуем теперь поведение напряженно-деформированного состояния оболочки, когда внешняя нагрузка имеет более слабые особенности. Будем предполагать, что внутренняя поверхность оболочки свободна от напряжений, а на внешней заданы касательные напряжения

$$\tau_{R\varphi} = q(\theta)$$

Относительно $q(\theta)$ предположим следующее: 1) функция $q(\pi - \theta) = -q(\theta)$ 2) функция $q(\theta)$ непрерывна вместе со своей $n - 1$ производной, $q^{(n)}(\theta)$ имеет разрыв первого рода при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \pi - \theta_0$, производная $q^{(n+1)}(\theta)$ интегрируема на отрезке $[0, \pi]$.

Очевидно, что, в силу условия 1), решение поставленной задачи получается применением принципа суперпозиции к соотношениям (2.4) — (2.10). Таким образом, u_φ можно представить в следующем виде:

$$u_\varphi = u_\varphi^{(0)} + u_\varphi^{(1)}$$

$$u_\varphi^{(0)} = \frac{3e^{(\lambda+1/2)\varepsilon}}{16G \operatorname{sh} 3/2\varepsilon} \left[\int_0^\theta F_u(\theta, \xi) q(\xi) \sin \xi d\xi + \int_\theta^{1/2\pi} F_u(\xi, \theta) q(\xi) \sin \xi d\xi \right]$$

$$u_\varphi^{(1)} = \frac{e^{(\lambda+1/2)\varepsilon}}{4G} \left[\int_0^\theta T_1(\theta, \xi, \lambda) q(\xi) \sin \xi d\xi + \int_\theta^{1/2\pi} T_1(\xi, \theta, \lambda) q(\xi) \sin \xi d\xi \right]$$
(2.21)

В результате некоторых преобразований, связанных с n -кратным интегрированием по частям правой части (2.21), при $\theta > \theta_0$ $u_\varphi^{(1)}$ можно представить в виде

$$u_\varphi^{(1)} = \frac{e^{(\lambda+1/2)\varepsilon}}{4G} \left\{ -2 \sum_{j=0}^p (-1)^j C_j q_{2j}(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k U(z_k \lambda) [B_{nk}^{(0)} + B_{nk}^{(1)}]}{(z_k^2 - 9/4)(z_k^2 - 1/4)^{p+1} \varepsilon \operatorname{ch} \varepsilon z_k} \right\} \quad (2.22)$$

Здесь

$$p = \left[\frac{n}{2} \right], \quad q_{2j} = A^j q, \quad Aq = \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{d}{d\theta} (q \sin \theta) \right] \right\}$$

$$C_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k U(z_k, \lambda)}{(z_k^2 - 9/4)(z_k^2 - 1/4)^{j+1} \varepsilon \operatorname{ch} \varepsilon z_k} = -\operatorname{res}_{z=1/2} f_j(z) - \operatorname{res}_{z=3/2} f_j(z)$$

$$f_j(z) = \frac{z U(z, \lambda)}{(z^2 - 9/4)(z^2 - 1/4)^{j+1} \operatorname{sh} \varepsilon z}$$

$$B_k^{(0)} = (-1)^s \sin \theta_0 P_{-1/2+z_k}(\cos \theta_0) S_k^{(1)}(\theta) [q^{(n)}(\theta_0 - 0) - q^{(n)}(\theta_0 + 0)] \quad (n = 2s) \quad (2.23)$$

$$B_k^{(1)} = (-1)^s \left[S_k^{(1)}(\theta) \int_0^\theta P_{-1/2+z_k}(\cos \xi) \frac{d}{d\xi} (q_n \sin \xi) d\xi + P_{-1/2+z_k}(\cos \theta) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{1/2\pi} S_k^{(1)}(\xi) \frac{d}{d\xi} (q_n \sin \xi) d\xi \right]$$

$$B_k^{(0)} = \frac{(-1)^{s+1} \sin \theta_0}{z_k^2 - 1/4} \bar{P}_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta_0) S_k^{(1)}(\theta) [q^{(n)}(\theta_0 - 0) - q^{(n)}(\theta_0 + 0)] \quad (n = 2s + 1) \quad (2.24)$$

$$B_k^{(1)} = \frac{(-1)^s}{z_k^2 - 1/4} \left[S_k^{(1)}(\theta) \int_0^\theta P_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \xi) q_{n+1}(\xi) \sin \xi d\xi + \right. \\ \left. + P_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta) \int_0^{1/2\pi} S_k^{(1)}(\xi) q_{n+1}(\xi) \sin \xi d\xi \right]$$

$$S_k^{(1)}(\theta) = 2Q_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta) + \pi \frac{\sin \pi z_k + 1}{\cos \pi z_k} P_{-1/2+z_k}^{(1)}(\cos \theta)$$

Из соотношений (2.22) — (2.24) вытекает, что в окрестности разрывов $q^{(n)}(\theta)$ возникают локальные эффекты типа погранслоя. Однако влияние их на все решение тем слабее, чем глаже $q(\theta)$ и чем меньше ε . Действительно, анализ коэффициентов, содержащихся во второй сумме (2.22), показывает, что они имеют порядок $O(\varepsilon^{2p+1})$. Коэффициенты C_j имеют порядок $O(\varepsilon^{2j+1})$. Первые два коэффициента имеют вид:

$$C_0 = -1/2 e^{-3/2 \lambda \varepsilon} [(\lambda^2 - 1/8) \varepsilon + 1/2 \lambda (\lambda^2 + 1) \varepsilon^2 + 5/12 (1/2 \lambda^4 - \lambda^2 + 1/8) \varepsilon^3]$$

$$C_1 = 1/768 e^{-3/2 \lambda \varepsilon} (55/2 \lambda^4 + 20 \lambda^2 + 53/5) \varepsilon^3$$

Таким образом, если даже $q(\theta)$ имеет разрыв первого рода, то выражение $u_\varphi^{(1)}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$, в то время как $u_\varphi^{(0)}$ имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$. Ряд в (2.22) сходится равномерно для любых λ , поэтому поведение u_φ при малых ε во всей области определяется первым членом разложения $u_\varphi^{(0)}$, который является решением безмоментной теории оболочек.

Более сложным оказывается характер поведения в окрестности разрыва $q(\theta)$ напряжения $\tau_{\theta\varphi}$. Для иллюстрации приведем асимптотические формулы, описывающие поведение $\tau_{\theta\varphi}$ в окрестности конического сечения $\theta = \theta_0$:

$$\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^{(0)} + \tau_{\theta\varphi}^{(1)}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\varphi}^{(0)} &= \frac{3e^{3/2\varepsilon}}{8R_2 \operatorname{sh}^{3/2}\varepsilon} \left[\int_0^\theta F_\tau(\theta, \xi) q(\xi) \sin \xi d\xi + \int_\theta^{1/2\pi} F_\tau^{(1)}(\theta, \xi) q(\xi) \sin \xi d\xi \right] \\ \tau_{\theta\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{8\pi R_2} \left\{ \ln 2 \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon} (\theta - \theta_0) + \cos \lambda\pi \right] - \frac{\pi}{\varepsilon} |\theta - \theta_0| \right\} [q(\theta_0 - 0) - \\ &\quad - q(\theta_0 + 0)] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для того чтобы отброшенные члены имели указанный порядок, достаточно предположить, что $q'(\theta)$ в точке $\theta = \theta_0$ имеет конечные пределы слева и справа.

Из соотношений (2.25) видно, что $\tau_{\theta\varphi}$ содержит в себе решение типа погранслоя, локализованного в окрестности сечения $\theta = \theta_0$, относительно ε порядок его $O(1)$, на линии разрыва имеет логарифмическую особенность. Следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\tau_{\theta\varphi}$ всюду, кроме линий разрыва, асимптотически стремится к значению, определяемому безмоментной теорией оболочек.

Для того чтобы решение трехмерной задачи всюду стремилось к безмоментному состоянию, достаточно непрерывности внешней нагрузки $q(\theta)$.

Поступила 10 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
2. Лурье А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ, 1943, т. 7, вып. 6.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
4. Виленская Т. В., Борович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
5. Устинов Ю. А. Переход от трехмерной задачи теории упругости к двумерной для замкнутой сферической оболочки при негладкой внешней нагрузке. Тр. VI Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. М., Изд-во «Наука», 1965.
6. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. т. 1. М., Изд-во «Наука», 1965.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

А. Н. Руховец, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

Методом парных рядов дано решение некоторых задач о кручении круговым штампом полупространства, содержащего сферическое включение.

Рассмотрен случай жесткого сферического ядра, а также случай сферической полости. В обоих вариантах задача поначалу сведена к парным рядам по присоединенным функциям Лежандра, а затем — к интегральному уравнению Фредгольма. Эффективное решение задачи получено путем разложения по малому параметру, связанному с отношением радиуса полости к расстоянию от ее центра до границы полупространства.

Найдены связи между углом поворота штампа и приложенным к нему скручивающим моментом.