Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Рассматриваются системы оптимального управления, содержащие малый параметр, которые можно назвать слабо управляемыми. Приводится схема приближенного решения задач этого класса. В качестве примера дается решение вариационной задачи о достижении максимальной дальности планирования аппарата с аэродинамическим управлением в атмосфере. Полученные результаты хорошо согласуются с точным численным решением.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$dx \mathbin{/} dt = f(x, t, u), \qquad x(t_0) = a \tag{1.1}$$

Здесь t — время, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор фазовых координат, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — m-мерный вектор управляющих функций, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — заданная n-мерная вектор-функция, t_0 — начальный момент времени, a — вектор начального фазового состояния. Условия в конце процесса и минимизируемый функционал J заданы в виде

$$h(x(T), T) = 0, \qquad q(x(T), T) = 0, \qquad J = F(x(T), T) \tag{1.2}$$

Здесь $h(x, t)$ и $F(x, t)$ — заданные скалярные функции, $q(x, t) = (q_1, \ldots, q_r)$ — заданная r-мерная вектор-функция, причем $0 \leqslant r < n-1$. Первое равенство (1.2) служит условием, определяющим момент T окончания процесса. Предполагается, что функция h такова, что при допустимых траекториях $x(t)$ она монотонно зависит от t (в некотором интервале времени) и условие $h = 0$ определяет для каждой допустимой траектории единственный момент времени T. Второе (векторное) равенство (1.2) представляет собой дополнительные краевые условия в момент T (если $r = 0$, то эти условия отсутствуют). Все эти условия предполагаются независимыми и непротиворечивыми.

Задача состоит в определении оптимального управления $u(t)$ и соответствующей оптимальной траектории $x(t)$, которые при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяют уравнениям и условиям (1.1), (1.2), ограничениям на управление $u(t) \in U$ и доставляют минимум функционалу J. Здесь U — заданное замкнутое множество m-мерного пространства.

Введем дополнительные фазовые координаты x_0 и x_{n+1}, которые подчиним уравнениям и начальным условиям

$$dx_0/dt = f_0, \quad dx_{n+1}/dt = 1, \quad x_0(t_0) = 0, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0$$

$$f_0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}, f\right) \tag{1.3}$$

Здесь и далее $\partial / \partial x$ — оператор градиента по фазовым координатам x, d / dt — полная производная вдоль траекторий системы (1.1), скобки означают скалярное произведение векторов. Очевидно, что $x_{n+1} \equiv t$, и поэтому аргумент t у функций f, f_0, h, q, F можно заменить на x_{n+1}, так что система будет автономной. Функционал (1.2) примет вид $J = x_0(T)$.

К поставленной задаче применим принцип максимума [1]. Введем вектор сопряженных переменных $\psi(t) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, а также сопряженные переменные $\psi_{n+1}(t)$ и $\psi_0(t)$, причем положим, как обычно, $\psi_0 \equiv -1$. Функция Гамильтона H' и сопряженные уравнения для систем (1.1), (1.3) примут вид

$$H' = (\psi, f) + \psi_{n+1} - f_0 = (\psi - \partial F / \partial x, f) + \psi_{n+1} - \partial F / \partial t \tag{1.4}$$

$$\frac{d\psi_k}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial x_k} = -\left(\psi - \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_k} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x}, f\right)\right] \quad (k = 1, \ldots, n)$$

С учетом краевых условий (1.2) (момент окончания процесса не фиксирован) условия трансверсальности запишутся в виде

$$\psi = \lambda \frac{\partial h}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial x}, \qquad \psi_{n+1} = \lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial t}, \qquad H' = 0 \tag{1.5}$$

Здесь λ, λ_i — постоянные параметры. Подставим условия (1.5) в равенство (1.4) для H', которое затем разрешим относительно λ;

$$\lambda = \left(\frac{dF}{dt} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{dq_i}{dt}\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)^{-1} \quad \text{при } t = T \tag{1.6}$$

Полные производные здесь имеют тот же смысл, что и в равенстве (1.3). Введем обозначения

$$p = \psi - \partial F / \partial x, \quad H = (p, f) = H' - \psi_{n+1} + \partial F / \partial t, \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \tag{1.7}$$

Выражение в квадратных скобках в (1.4) равно $d(\partial F / \partial x_k) / dt$. Уравнения (1.4) и условия (1.5) можно с учетом (1.7) записать в виде

$$\frac{dp_k}{dt} = -\left(p, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad H = (p, f)$$

$$p = \lambda \frac{\partial h}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{при } t = T \tag{1.8}$$

Согласно принципу максимума, задача оптимального управления свелась к краевой задаче для двух n-мерных вектор-функций $x(t)$ и $p(t)$. Управление $u(t)$ определяется из условия супремума функции H' по u, что эквивалентно супремуму функции H из (1.8), т. е.

$$H(p(t), x(t), t, u(t)) = \sup_{u \in U} H(p(t), x(t), t, u) \tag{1.9}$$

Система уравнений краевой задачи задается равенствами (1.1), (1.8), а краевые условия — равенствами (1.1), (1.2), (1.8). Управление u исключается при помощи равенства (1.9).

Параметр λ определяется равенством (1.6), а момент времени T и параметры λ_i неизвестны и определяются в процессе решения задачи.

Пусть функции f, h, q, F и вектор a разлагаются в ряды по малому параметру ε: (1.10)

$$f = f^0(x, t) + \varepsilon f^1(x, t, u) + \ldots, \qquad h = h^0(x, t) + \varepsilon h^1(x, t) + \ldots$$
$$q = q^0(x, t) + \varepsilon q^1(x, t) + \ldots, \qquad F = F^0(x, t) + \varepsilon F^1(x, t) + \ldots$$
$$a = a^0 + \varepsilon a^1 + \ldots \qquad (\varepsilon \ll 1)$$

Верхние индексы всюду указывают номер членов в разложениях, а нижние индексы — номер компонент векторов. Так как функция f при $\varepsilon = 0$ не зависит от u, то система (1.1) при $\varepsilon = 0$ будет неуправляемой. Ее общее решение будем считать известным. Систему (1.1) при $0 < \varepsilon \ll 1$ естественно назвать слабо управляемой. Ниже строится приближенное решение поставленной задачи оптимального управления для слабо управляемой системы.

Если функция f^0 зависит от u, то при $\varepsilon = 0$ система не вырождается в неуправляемую, и для нее, вообще говоря, существует оптимальное управление нулевого приближения. Разложение по малому параметру позволит лишь уточнить это управление. Рассматриваемый в работе случай (при $\varepsilon = 0$ система неуправляема) интересен тем, что в нулевом приближении управление вообще невозможно определить в принципе. Возможен также и промежуточный случай: функция f^0 зависит лишь от некоторых компонент вектора управляющих функций.

Отметим еще, что если множество U зависит от x, t, ε, то в ряде случаев простым преобразованием в пространстве управлений его можно перевести в постоянное множество. Например, множество U, заданное неравенством $|u| \leqslant C(x, t, \varepsilon)$, где C — известная функция, переводится в множество $|u'| \leqslant 1$ при помощи преобразования $u = Cu'$. Ниже множество U предполагается постоянным.

Вопросы построения строгих оценок погрешности приближенного решения, а также вопросы существования и единственности решения в работе не рассматриваются.

2. Приближенное решение. Решение поставленной задачи и функционал J при $\varepsilon \ll 1$ ищем в виде (2.1)

$$x = x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \ldots, \quad p = p^0(t) + \varepsilon p^1(t) + \ldots, \quad T = T^0 + \varepsilon T^1 + \ldots$$
$$\lambda = \lambda^0 + \varepsilon\lambda^1 + \ldots, \quad \lambda_i = \lambda_i^0 + \varepsilon\lambda_i^1 + \ldots, \quad J = J^0 + \varepsilon J^1 + \ldots \quad (i=1,\ldots r).$$

Подставим равенства (2.1) и (1.10) в уравнения (1.1), (1.2), (1.8), (1.6), разложим полученные соотношения в ряды по ε и приравняем коэффициенты при ε^0 и ε^1. В нулевом приближении получим (2.2)

$$dx^0/dt = f^0(x^0, t), \quad x^0(t_0) = a^0, \quad h^0(x^0(T^0), T^0) = 0, \quad q^0(x^0(T^0), T^0) = 0$$
$$J^0 = F^0(x^0(T^0), T^0)$$
$$\frac{dp_k^0}{dt} = -\left(p^0, \frac{\partial f^0(x^0(t), t)}{\partial x_k}\right), \qquad p^0 = \lambda^0 \frac{\partial h^0}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial x} - \frac{\partial F^0}{\partial x}$$
$$\lambda^0 = \left\{\frac{\partial F^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}, f^0\right) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \left[\frac{\partial q_i^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, f^0\right)\right]\right\}\left[\frac{\partial h^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, f^0\right)\right]^{-1}$$
$$\text{при } t = T^0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Для равенств (1.1), (1.2) выпишем еще уравнения первого приближения (при их составлении учитываются уже полученные соотношения (2.2))

$$\frac{dx_k^1}{dt} = \left(\frac{\partial f_k^0(x^0(t),t)}{\partial x}, x^1\right) + f^1(x^0(t), t, u(t)), \qquad x^1(t_0) = a^1 \tag{2.3}$$

$$\left[\frac{\partial h^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, f^0\right)\right]T^1 + \left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + h^1 = 0$$

$$\left[\frac{\partial q_i^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, f^0\right)\right]T^1 + \left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + q_i^1 = 0$$

$$J^1 = \left[\frac{\partial F^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}, f^0\right)\right]T^1 + \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + F^1$$

$$(i = 1, \ldots, r)$$

В последних трех равенствах (2.3) все функции от x, t берутся при значениях $x = x^0(T^0)$, $t = T^0$.

Перейдем к анализу уравнений (2.2), (2.3). Общее решение системы нулевого приближения $dx / dt = f^0(x, t)$ из (2.2) предполагаем известным и заданным в виде

$$x = \varphi(t, c), \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \qquad c = (c_1, \ldots, c_n) \tag{2.4}$$

Здесь φ — вектор-функция, c — вектор произвольных постоянных. Разрешая равенства (2.4) относительно постоянных c, получим

$$g(x, t) = c, \qquad (g = g_1, \ldots, g_n) \tag{2.5}$$

Функции g_k являются независимыми первыми интегралами системы нулевого приближения.

Для траектории в нулевом приближении имеем задачу Коши (2.2), решение которой выражается через функции φ, g, введенные равенствами (2.4), (2.5)

$$x^0(t) = \varphi(t, c), \qquad c = g(a^0, t) \tag{2.6}$$

Момент T^0 окончания процесса и функционал J^0 в этом приближении определяются третьим и пятым равенствами (2.2). Будем считать, что четвертое равенство (2.2), т. е. краевые условия $q = 0$, в этом приближении выполняются автоматически. Это равенство можно рассматривать как дополнительное условие, наложенное на функцию $q^0(x, t)$.

Введем матрицы размера $n \times n$

$$\Phi(t, c) = \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} \right\|, \qquad G(t, c) = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\| \quad \text{при } x = \varphi(t, c) \tag{2.7}$$

Равенства (2.4), (2.5) задают преобразования, переводящие вектор c в x и обратно. Матрицы (2.7), как матрицы Якоби для этих взаимно обратных преобразований, связаны соотношением $\Phi = G^{-1}$. Ранг обеих матриц равен n.

Функция x^1 удовлетворяет линейной неоднородной системе (2.3). Соответствующая однородная система является системой в вариациях для системы нулевого приближения (2.2), которой удовлетворяет x^0. Как известно из теории дифференциальных уравнений, матрица Φ из (2.7) представляет собой фундаментальную матрицу для системы в вариациях. Пользуясь этим, запишем при помощи метода вариации произвольных постоянных [2] общее решение неоднородной системы (2.3)

$$x^1 = \Phi(t, c)\, b + \Phi(t, c) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau, c)\, f^1(x^0(\tau), \tau, u(\tau))\, d\tau$$

Определяя вектор b произвольных постоянных при помощи начального условия (2.3) и пользуясь равенством $\Phi^{-1} = G$, получим

$$x^1(t) = \Phi(t, c)\, G(t_0, c)\, a^1 + \Phi(t, c) \int_{t_0}^{t} G(\tau, c)\, f^1(x^0(\tau), \tau, u(\tau))\, d\tau \quad (2.8)$$

Выразим еще T^1 из третьего равенства (2.3) и затем подставим его в четвертое равенство (2.3)

$$\left[\left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + q_i^1\right]\left[\frac{\partial h^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, f^0\right)\right] = \left[\left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + h^1\right] \times$$
$$\times \left[\frac{\partial q_i^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, f^0\right)\right] \quad (i = 1, \ldots, r) \quad (2.9)$$

Вектор p^0, как видно из (2.2), удовлетворяет линейной однородной системе, которая является сопряженной по отношению к упоминавшейся выше системе в вариациях. Но тогда, как известно [2], фундаментальная матрица для нее равна $(\Phi^{-1})' = G'$, где штрих означает транспонированную матрицу. Следовательно, общее решение системы (2.2) для p^0 имеет вид (в векторной и скалярной записи)

$$p^0 = G'(t, c)\, s, \quad p_k^0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k} s_i, \quad s = (s_1, \ldots, s_n) \quad (k = 1, \ldots, n) \quad (2.10)$$

Здесь s — вектор произвольных постоянных. Подставляя решение (2.10) в условие (2.2) для p^0 и учитывая равенство $(G')^{-1} = \Phi'$, получим

$$s = \Phi'(T^0, c)\left[\lambda^0 \frac{\partial h^0}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial x} - \frac{\partial F^0}{\partial x}\right] \quad \text{при } t = T^0 \quad (2.11)$$

Перейдем к определению управления в первом приближении (в нулевом приближении система неуправляема). Подставим в функцию H из (1.8) разложения (1.10) и (2.1) и разложим эту функцию в ряд по ε:

$$H = (p, f) = (p^0, f^0(x^0, t)) + \varepsilon\left[\left(p^0, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^0}{\partial x_i} x_i^1\right) + \left(p^1, f^0(x^0, t)\right) + \right.$$
$$\left. + (p^0, f^1(x^0, t, u))\right] + \ldots$$

Точками обозначены члены порядков выше первого. Из выписанных слагаемых лишь последнее зависит от u. Поэтому определение максимума

H по u сводится в первом приближении к максимизации этого последнего слагаемого, т. е.

$$(p^0(t), f^1(x^0(t), t, u(t))) = \sup (p^0(t), f^1(x^0(t), t, u)) \quad (u \in U) \qquad (2.12)$$

Управление $u(t)$, определяемое соотношением (2.12), может быть и не близко к оптимальному в смысле метрики в пространстве C (т. е. по максимуму модуля разности). Однако оно будет приближенно оптимальным в смысле минимизируемого функционала. В самом деле, из известных формул для первой вариации функционала [3] следует, что функционалы для двух различных управлений отличаются на величину того же порядка, что и функции H для этих управлений. Но при соблюдении условия (2.12) функция H для управления $u(t)$ будет отличаться от максимума функции H, достигаемого при выборе оптимального управления, на величину порядка отброшенных членов, т. е. порядка ε^2. Такой же порядок малости будет иметь и отличие по функционалу между приближенным и точным оптимальными управлениями. Отличие между этими управлениями по норме в пространстве L_2, т. е. среднеквадратическая ошибка, будет, как правило, составлять величину порядка ε.

Отметим, что, согласно (2.12), управление $u(t)$ зависит только от решений нулевого приближения $x^0(t)$ и $p^0(t)$. Подставляя решение (2.10), условие (2.12) можно переписать в виде

$$(G's, f^1) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} s_i f_j^1 (x^0(t), t, u) \to \sup \quad \text{по } u \in U \qquad (2.13)$$

Полученные соотношения позволяют получить приближенное решение поставленной задачи оптимального управления. При этом траектория $x(t)$, а также момент T и функционал J определяются в первом приближении (с учетом двух членов разложений (2.1), т. е. с погрешностью $\sim\varepsilon^2$), а сопряженные переменные $p(t)$ и постоянные λ, λ_i — в нулевом приближении. Последующие члены разложений (2.1) не представляют большого интереса ввиду их малости.

Определение приближенного решения сводится к следующим этапам.

1. Находим общее решение системы нулевого приближения, т. е. функции φ, g из (2.4), (2.5), а также матрицы Φ, G из (2.7).

2. В нулевом приближении траектория $x^0(t)$ определяется равенствами (2.6), момент T^0 и функционал J^0 — третьим и пятым равенствами (2.2). Четвертое равенство (2.2) считаем выполненным по условию.

3. Функция $p^0(t)$ определяется равенствами (2.10), а вектор s — равенством (2.11), в которое следует подставить λ^0 из (2.2). Правую часть равенств (2.11), (2.2) следует брать при $x = x^0(T^0)$, $t = T^0$. Таким образом, равенства (2.10), (2.11), (2.2) определяют функцию $p^0(t)$ с точностью до r произвольных постоянных λ_i^0, которые будут найдены ниже.

4. Подставив $x^0(t)$ и $p^0(t)$ в условие (2.12) или (2.13) и вычислив супремум по u, найдем управление $u(t)$ также с точностью до r неизвестных постоянных λ_i^0.

5. Подставим $x^0(t)$ и $u(t)$ в равенство (2.8) и найдем $x^1(t)$ и, в частности, $x^1(T^0)$ с точностью до тех же постоянных.

6. Подставим $t = T^0$, $x = x^0(T^0)$ и найденное значение $x^1(T^0)$ в соотношения (2.9). Получим r алгебраических (вообще говоря, нелинейных) уравнений для определения постоянных λ_i^0, которые входят в $x^1(T^0)$. Разрешая эти уравнения (предполагаем, что решение существует), найдем постоянные λ_i^0. Теперь функции $p^0(t)$, $u(t)$, $x^1(t)$ и постоянная λ^0, найденные в этапах 3—5, полностью определены.

7. Поправку T^1 к моменту окончания процесса и J^1 к функционалу найдем последовательно из третьего и пятого равенств (2.3), в которые нужно подставить уже известные значения $x = x^0(T^0)$, $t = T^0$ и $x^1(T^0)$.

Рассмотрим решение поставленной задачи еще в том случае, когда краевые условия $q = 0$ в конце процесса отсутствуют (кроме условия $h = 0$, служащего для определения момента окончания процесса). В этом случае размерность r вектора q из (1.2) равна нулю, и поэтому в равенствах пп. 1, 2 следует опустить члены, содержащие функции q_i, q_i^0 и постоянные λ_i, λ_i^0. Соотношения (2.9) также нужно опустить. Приближенное решение задачи в этом случае упрощается, так как опускается самая сложная его часть — решение системы алгебраических уравнений (этап 6). При выполнении этапов 3—5 функции $p^0(t)$, $u(t)$, $x^1(t)$ теперь определяются однозначно. В остальном схема решения остается той же.

Рассмотрим еще задачу о минимизации интегрального функционала

$$J = \int_{t_0}^{T} f_*(x, u)\,dt, \qquad f_*(x, u) = f_*^0(x, u) + \varepsilon f_*^1(x, u) + \ldots$$

где f_* — заданная функция. Уравнения и краевые условия по-прежнему задаем в виде (1.1), (1.2), причем имеют место разложения (1.10). Если f_*^0 не зависит от u, то введем новую фазовую координату и функционал соотношениями

$$dx_* / dt = f_* = f_*^0(x) + \varepsilon f_*^1(x, u) + \ldots, \; x_*(t_0) = 0, \quad J_* = J = x_*(T)$$

Если же f_*^0 зависит явно от u, то полагаем

$$dx_* / dt = \varepsilon f_* = \varepsilon f_*^0(x, u) + \ldots, \; x_*(t_0) = 0, \quad J_* = \varepsilon J = x_*(T)$$

Увеличим на единицу размерность вектора x за счет добавления к нему новой компоненты x_*. Тогда исходная задача, эквивалентная задаче минимизации функционала J_*, полностью сведется к рассмотренному выше (в пп. 1—2) случаю. По методике п. 2 можно определить минимум функционала J_* с погрешностью порядка ε^2. Для исходного функционала J погрешность решения составит величину порядка ε^2 в случае, когда f_*^0 не зависит от u, и величину порядка ε, когда f_*^0 явно зависит от u.

Изложенный подход можно применять для построения приближенных аналитических решений задач оптимального управления в случае слабо управляемых систем. Кроме того, таким способом можно получать исходное (начальное) приближение для последующего решения задачи на ЭВМ различными численными методами, например, методом, предложенным в работе [4]. При этом значение параметра ε может фактически быть не очень малым.

Следует отметить, что задачи управления механическими объектами часто относятся к рассмотренному выше типу слабо управляемых систем. Параметр ε здесь характеризует отношение управляемых сил (например, силы тяги аппарата) к неуправляемым силам (например, к силе веса).

Отметим, еще, что изложенный подход (разложение по малому параметру) применим также к задачам дифференциальных игр, если система является слабо управляемой по отношению к одному или обоим игрокам.

3. Локальная оптимальность. Так как первые интегралы (2.5) системы нулевого приближения предполагаются известными, то их можно взять в качестве новых искомых функций в системе (1.1). Другими словами, равенства (2.4), (2.5) можно рассматривать как прямое и обратное преобразования от вектора переменных x к вектору новых переменных c, причем вектор c будет постоянным лишь в нулевом приближении. Такое преобразование часто применяется в небесной механике, где переменные типа c называются оскулирующими элементами.

Рассмотрим решение п. 2, считая, что в качестве фазовых координат выбраны первые интегралы системы нулевого приближения (т. е. оскулирующие переменные c из (2.5)) и что эти переменные затем по-прежнему обозначены через x, ход решения п. 2 останется неизменным, но появятся некоторые упрощения, связанные с выбором фазовых координат.

Так как новые фазовые координаты тождественно постоянны в нулевом приближении, то в соотношениях п. 2 следует положить $f^0 \equiv 0$. При этом, как легко видеть, функции φ, g из (2.4), (2.5) и матрицы (2.7) равны

$$f^0 \equiv 0, \ \varphi(t, c) = c, \qquad g(x, t) = x, \ \Phi(t, c) = G(t, c) = E \tag{3.1}$$

где E — единичная матрица. Соотношения (2.6), (2.8), (2.10), (2.13) примут вид

$$x^0(t) = a^0, \ x^1(t) = a^1 + \int_{t_0}^{t_1} f^1(a^0, \tau, u(\tau))\, d\tau$$

$$p^0(t) = s, \qquad (s, f^1(a^0, t, u)) \to \sup \quad \text{по } u \in U \tag{3.2}$$

Остальные равенства п. 2 также можно упростить, подставляя в них соотношения (3.1), (3.2).

Сделаем еще два предположения. Во-первых, будем считать, что краевые условия $q = 0$ в конце процесса отсутствуют. Это, как указано в конце п. 2, дает возможность опустить в равенствах п. 2 все члены, содержащие λ_i^0 и q_i^0, и упростить ход решения. Во-вторых, считаем, что выполнено одно из двух условий: либо функция F^0 не зависит явно от t, либо h^0 не зависит явно от x, т. е. справедливо равенство

$$(\partial F^0 / \partial t)(\partial h^0 / \partial x) = 0 \tag{3.3}$$

Условие (3.3) выполнено, например, если $h(x, t) = t - T_*$, где T_* — заданное число. Тогда момент T окончания процесса, определяемый первым условием (1.2), фиксирован и равен T_*, причем $T^0 = T_*$, $T^1 = 0$.

Учитывая сделанные предположения и равенства (3.1) — (3.3), найдем λ^0 из соотношения (2.2) и затем s из (2.11)

$$\lambda^0 = (\partial F^0/\partial t)(\partial h^0/\partial t)^{-1}, \ s = -\partial F^0 / \partial x \quad \text{при } x = a^0, \ t = T^0 \tag{3.4}$$

Подставим равенство (3.4) в последнее условие (3.2) (3.5)

$$(s, f^1(a^0, t, u)) = -(\partial F^0 / \partial x, f^1(a^0, t, u)) = \varepsilon^{-1}(\partial F^0 / \partial t - dF^0 / dt)$$

Здесь полная производная вычисляется в силу уравнения (1.1) с учетом членов первого порядка малости, т. е. при $f = \varepsilon f^1$. Не нарушая точности решения (с погрешностью в малых высшего порядка), эту производную можно заменить производной в силу точных уравнений (1.1).

Приближенное оптимальное управление, согласно последнему условию (3.2), доставляет максимум левому из выражений (3.5). Так как производная $\partial F^0 / \partial t$ не зависит явно от u, то согласно равенствам (3.5), управление может определяться из условия минимальности полной производной dF^0 / dt.

Управление, которое в каждый момент времени минимизирует скорость dF^0 / dt изменения минимизируемого функционала F^0, часто называется локально оптимальным. Таким образом, выше показано, что в слабо управляемой системе локально оптимальное управление, при сформулированных выше предположениях, является приближенно оптимальным управлением. Другими словами, значения функционала для точного оптимального и локально оптимального управлений отличаются на величину порядка ε^2.

Локально оптимальные управления находятся обычно весьма просто. Для этого достаточно записать полную производную dF^0 / dt как функцию оскулирующих переменных, управления и времени, и найти ее минимум по $u \in U$. Управление при этом получается в виде функции от оскулирующих фазовых координат и, возможно, времени, т. е. в форме синтеза. После этого траектория может определяться либо аналитически (как в пп. 2, 3), либо путем численного решения задачи Коши. Благодаря своей простоте локально оптимальные управления неоднократно использовались в задачах управляемых перелетов космических аппаратов с малой тягой (обзор и библиографию работ см. в книге [5]). При этом роль нулевого приближения играет кеплерово движение, а роль первых интегралов уравнений нулевого приближения — обычные оскулирующие элементы. В частности, локально оптимальные управления применялись и в качестве начального приближения при численных расчетах оптимальных траекторий. Полученные выше результаты указывают, при каких условиях и в каком смысле локально оптимальные управления действительно близки к оптимальным управлениям.

4. **Задача о полете на максимальную дальность.** В качестве примера приложения общего подхода п. 2 рассмотрим следующую модельную задачу, которая решалась численно в работе [4]. Летательный аппарат (материальная точка) совершает плоское движение в атмосфере. Обозначим через v_0 его начальную скорость, через g — постоянное ускорение силы тяжести, через m — массу аппарата и выберем величины $l = v_0^2 g^{-1}$, $v_0 g^{-1}$ и m в качестве единиц длины, времени и массы, соответственно. Связь между размерными и безразмерными переменными примет вид

$$t^* = v_0 g^{-1} t, \quad x_i^* = l x_i, \quad x_j^* = v_0 x_j, \quad v^* = v_0 v \quad (i = 1, 2;\ j = 3, 4) \tag{4.1}$$

Здесь t — время, x_1 — горизонтальная координата (дальность), x_2 — вертикальная координата (высота), x_3, x_4 — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, v — модуль скорости, а звездочками обозначены соответствующие размерные величины. Помимо веса, на аппарат действуют аэродинамические силы: сила сопротивления R и подъемная сила Y, равные

$$R = {}^1/_2\ \rho^*(v^*)^2 S^* C_x, \qquad Y = {}^1/_2 \rho^*(v^*)^2 S^* C_y \tag{4.2}$$

Сила R направлена против скорости аппарата, а Y — перпендикулярно ей. Здесь ρ^* — плотность атмосферы, S^* — характерная площадь тела, C_x, C_y — аэродинамические коэффициенты, зависящие от угла атаки α. Пусть управление может осуществляться углом α, а также площадью S^*, которая может принимать два значения: S_1^* и S_2^*, причем $S_1^* < S_2^*$. Последняя возможность качественно моделирует изменение геометрии крыла или выдвижение закрылков.

Перепишем равенства (4.2), вводя безразмерные переменные

$$R = \varepsilon m g \rho v^2 S C_x, \qquad Y = \varepsilon m g \rho v^2 S C_y$$

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \qquad S = \frac{S^*}{S_1^*}, \qquad \varepsilon = \frac{\rho_0^* v_0^2 S_1^*}{2mg} \tag{4.3}$$

Здесь ρ_0^* — плотность атмосферы на начальной высоте, ρ — безразмерная плотность, S — безразмерная величина, принимающая значения $S_1 = 1$ и $S_2 = S_2^* / S_1^* > 1$, а безразмерный параметр ε характеризует отношение аэродинамических сил к весу. Запишем уравнения движения аппарата в безразмерных переменных (4.1), проектируя силы (4.3) и на оси x_1, x_2

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_4, \qquad \frac{dx_3}{dt} = -\varepsilon\rho v S\,(C_x x_3 + C_y x_4)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -1 + \varepsilon \rho v S\,(C_y x_3 - C_x x_4) \tag{4.4}$$

Начальные условия зададим в виде

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \cos\theta_0, \quad x_4 = \sin\theta_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (0 < \theta_0 < \pi / 2) \tag{4.5}$$

Здесь θ_0 — заданный начальный угол наклона траектории (начальная скорость в безразмерных переменных равна единице). Поставим вариационную задачу: достичь максимальной дальности полета x_1 в момент, когда высота x_2 вновь обратится в нуль. Управляющими функциями являются угол атаки $\alpha(t)$, от которого зависят C_x и C_y (эти зависимости конкретизируются ниже), и величина $S(t)$, принимающая дискретные значения S_1 и S_2. Сформулированная задача укладывается в общую постановку п. 1, если параметр ε является малым, что и предполагается в дальнейшем. В обозначениях п. 1 имеем

$$h^0 = x_2, \qquad h^1 = 0, \qquad F^0 = -x_1, \qquad F^1 = 0$$

а краевые условия $q = 0$ из (1.2) здесь отсутствуют. Функции f_k^0 и f_k^1 равны коэффициентам при ε^0 и ε в правых частях системы (4.4). При решении следуем общей схеме, изложенной в п. 2.

1. Положим $\varepsilon = 0$ в уравнениях (4.4) и найдем общее решение системы нулевого приближения, описывающее движение без сопротивления

$$x_1 = c_3 t + c_1, \qquad x_2 = c_4 t + c_2 - t^2 / 2, \qquad x_3 = c_3, \qquad x_4 = c_4 - t \tag{4.6}$$

Правые части этих равенств есть функции φ_k из (2.4). Разрешая равенства (4.6) относительно постоянных c_i, получим первые интегралы (2.5) системы нулевого приближения

$$g_1 = x_1 - x_3 t, \quad g_2 = x_2 - x_4 t - t^2/2, \quad g_3 = x_3, \quad g_4 = x_4 + t \tag{4.7}$$

При помощи равенств (4.6), (4.7) составим матрицы (2.7)

$$\Phi = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad G = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

2. Фазовые координаты в нулевом приближении (2.6) найдем, определяя в (4.6) произвольные постоянные при помощи начальных условий (4.5). Получим

$$x_1^0 = t\cos\theta_0,\quad x_2^0 = t\sin\theta_0 - t^2/2,\quad x_3^0 = \cos\theta_0,\quad x_4^0 = \sin\theta_0 - t \tag{4.8}$$

Подставим решение (4.8) в условие окончания процесса $x_2 = 0$ и найдем время T^0, а затем определим минимизируемый функционал J^0, равный здесь дальности со знаком минус

$$T^0 = 2\sin\theta_0,\qquad J^0 = -x_1(T^0) = -\sin 2\theta_0$$

3. Подставляя полученное решение в общие соотношения (2.2), (2.10), (2.11), найдем из них последовательно λ^0, p^0 и s:

$$\lambda^0 = -x_3^0(T^0)/x_4^0(T^0) = \operatorname{ctg}\theta_0,\qquad s_1 = 1,\qquad s_2 = \operatorname{ctg}\theta_0,\ s_3 = T^0 = 2\sin\theta_0$$

$$s_4 = T^0\operatorname{ctg}\theta_0 = 2\cos\theta_0,\qquad p_1^0 = 1,\qquad p_2^0 = \operatorname{ctg}\theta_0,\qquad p_3^0 = T^0 - t$$

$$p_4^0 = \operatorname{ctg}\theta_0\,(T^0 - t)$$

4. Теперь из соотношения (2.12) получим, что управляющие функции определяются из условия максимальности по α, S следующего выражения:

$$\varepsilon\rho vS\,(T^0 - t)\ [\operatorname{ctg}\theta_0\,(C_y x_3^0 - C_x x_4^0) - (C_x x_3^0 + C_y x_4^0)]$$

Подставляя решение (4.8) и учитывая, что $t \leqslant T^0 = 2\sin\theta_0$, полученному условию можно придать вид

$$S\left[C_x - C_y\left(\frac{\cos 2\theta_0 + t\sin\theta_0}{\sin 2\theta_0 - t\cos\theta_0}\right)\right] \to \min\quad \text{по } \alpha,\ S \tag{4.9}$$

Если на угол атаки α не наложено ограничений, то для выполнения условия (4.9) необходимо потребовать, чтобы первая производная по α выражения (4.9) равнялась нулю. Отсюда получим (штрих означает производную по α)

$$\frac{C_y'(\alpha)}{C_x'(\alpha)} = \frac{\sin 2\theta_0 - t\cos\theta_0}{\cos 2\theta_0 + t\sin\theta_0} \tag{4.10}$$

Вторая производная (4.9) по α должна быть при этом неотрицательна. При помощи равенства (4.10) это условие запишем в виде

$$C_x'' - (C_x'/C_y')\,C_y'' = C_y'\,(C_x'/C_y')' \geqslant 0 \tag{4.11}$$

Таким образом, управление $\alpha(t)$ определяется из условия (4.9), для чего необходимо удовлетворить условиям (4.10), (4.11). Если условия (4.10), (4.11) определяют α единственным образом, то это α и будет искомым. Когда α найдено, управление S выбирается в зависимости от знака коэффициента при S в (4.9). С учетом равенства (4.10) условию для выбора S можно придать вид

$$S = S_1 \text{ при } A > 0,\quad S = S_2 > S_1 \text{ при } A < 0\qquad A = C_x - C_y\,(C_x'/C_y') \tag{4.12}$$

Дадим геометрическую интерпретацию условия (4.10). Пусть $\theta(t)$ — угол наклона траектории нулевого приближения к горизонтальной оси. Согласно (4.8), имеем

$$\operatorname{tg}\theta = x_4^0/x_3^0 = (\sin\theta_0 - t)/\cos\theta_0 \tag{4.13}$$

Нетрудно проверить, что равенство (4.10) с учетом (4.13) можно записать в виде

$$C_y'/C_x' = \operatorname{tg}(\theta + \theta_0) \tag{4.14}$$

Функции $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$ определяют параметрически уравнение поляры аппарата — кривой в плоскости C_x, C_y. Равенство (4.14) показывает, что при оптимальном выборе угла атаки $\alpha(t)$ касательная к поляре аппарата в любой момент времени составляет с осью C_x угол $\theta + \theta_0$.

Для конкретизации вычислений зададим аэродинамические характеристики

$$C_x = 1 - \cos 2\alpha_0\cos 2\alpha,\qquad C_y = K\sin 2\alpha_0\sin 2\alpha \tag{4.15}$$

Здесь α_0, K — постоянные, причем, как нетрудно проверить, K равно максимальному качеству аппарата $\max (C_y / C_x)$, а α_0 — угол атаки, при котором оно достигается. Зависимости (4.15) принимались в работе [4]. Они обладают следующими свойствами, типичными для летательных аппаратов: 1) функции C_x, C_y периодичны по α; 2) $C_x(\alpha)$ — четная, а $C_y(\alpha)$ — нечетная функция от α, что характерно при симметрии аппарата; 3) при малых α функции (4.15) имеют обычный вид $C_x = C_1 + C_2\alpha^2$, $C_y = C_3\alpha$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные. Поляра аппарата, имеющего характеристики (4.15), представляет собой эллипс.

Подставляя соотношения (4.15) в условия (4.10) — (4.12), получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = K \operatorname{tg} 2\alpha_0 \frac{\cos 2\theta_0 + t \sin\theta_0}{\sin 2\theta_0 - t\cos\theta_0}, \qquad \frac{\cos 2\alpha_0}{\cos 2\alpha} \geqslant 0, \qquad A = 1 \frac{\cos 2\alpha_0}{\cos 2\alpha} \tag{4.16}$$

Пусть для определенности $\alpha_0 < \pi / 4$, $\theta_0 < \pi / 4$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Учитывая еще неравенство $t \leqslant T^0 = 2\sin\theta_0$, из первого равенства (4.16) найдем $\operatorname{tg} 2\alpha \geqslant 0$. Принимая во внимание второе соотношение (4.16), убедимся в том, что $0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi / 2$. Тогда угол α определяется однозначно, и условия (4.16), (4.12) примут вид

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(K \operatorname{tg} 2\alpha_0 \frac{\cos 2\theta_0 + t\sin\theta_0}{\sin 2\theta_0 - t\cos\theta_0}\right) \tag{4.17}$$

$$(S = S_1 \text{ при } \alpha < \alpha_0, \ S = S_2 \text{ при } \alpha > \alpha_0)$$

Таким образом, управляющие функции полностью определены. Угол $\alpha(t)$, согласно (4.17), монотонно возрастает от $\alpha(0)$ до $\pi / 4$. Кусочно-постоянная функция $S(t)$ имеет, очевидно, не более одного переключения. В конце процесса, так как $\alpha_0 < \pi / 4$, она принимает свое наибольшее значение S_2. Если $\alpha(0) \geqslant \alpha_0$, то точка переключения вообще отсутствует и $S = S_2$ всюду, а если $\alpha(0) < \alpha_0$, то на начальном участке траектории $S = S_1$. Чем больше качество K, тем раньше наступает переключение и тем бо́льшие значения принимает угол α в один и тот же момент времени.

Приведенные результаты хорошо согласуются с результатами работы [4]. В работе [4] получено точное численное решение поставленной задачи для случая постоянной плотности атмосферы и в широком диапазоне (от 0.1 до 3) изменения параметров ε, K. Сравнение оптимального закона управления $\alpha(t)$ из работы [4] при $\alpha_0 = \theta_0 = 10°$ с законом (4.17) показывает, что при $\varepsilon = 0.1$ эти законы практически совпадают, и даже при $\varepsilon = 0.5$ отличие между ними составляет примерно 10% во всем диапазоне изменения K. Момент переключения, определяемый условием (4.17), также хорошо согласуется с результатами расчетов (примерно с той же точностью).

Приближенное аналитическое решение (4.17) получено при произвольной зависимости плотности атмосферы от высоты. Задавая эту зависимость, при помощи квадратуры (2.8) нетрудно найти и поправку к траектории, обусловленную действием аэродинамических сил. Отметим, что траектория и функционал при этом будут определены с погрешностью порядка ε^2, т. е. на порядок ε точнее, чем управление.

Поступила 10 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, ч. I, II, III. Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 10—12.
4. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6.
5. Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. М., «Наука», 1966.