О ПРИМЕНЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

В. И. Бондаренко, Ю. М. Филимонов

(Нижний Тагил)

Описывается решение задач об оптимальном управлении линейными системами, приводимых к L-проблеме моментов, методом линейного программирования.

Применение метода линейного программирования позволяет при автоматическом поиске экстремумов сократить время поиска. Общая схема вычислений проиллюстрирована решением модельных задач.

1. Пусть управляемая система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dz/dt = Az + bu \tag{1.1}$$

Здесь через z обозначен n-мерный вектор фазовых координат управляемого объекта, через u — скалярная функция, описывающая управляющее воздействие.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача A. Найти функцию $u^0(t)$ (оптимальное управление), удовлетворяющую ограничению $|u^0(t)| \leqslant 1$ и переводящую систему (1.1) из заданного начального положения z_0 в начало координат за минимально возможное время T^0.

Задача B. Найти оптимальное управление $u^\circ(t)$, которое за данное время T переводит систему (1.1) из состояния z_0 в состояние $z(T)$ при условии минимума величины

$$J(u) = \max\left\{\max_\tau |u(\tau)|, \theta\int_0^T |u(\tau)|\,d\tau\right\} = \min \qquad (\theta = \mathrm{const}) \tag{1.2}$$

Задача C. Найти оптимальное управление $u^0(\tau)$, которое переводит систему (1.1) из начального положения z_0 в начало координат за наименьшее время T^0 при условии, что функция управления стеснена условием

$$\int_0^T |u(\tau)|\,d\tau = 1 \tag{1.3}$$

Решения сформулированных задач, рассматриваемых с единой точки зрения L-проблемы моментов, получены в работах [1,2] и имеют вид:

Оптимальное управление для задачи А

$$u^\circ(\tau) = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^n l_i^\circ h_i(\tau)\right) \tag{1.4}$$

где числа l_i° $(i = 1,\ldots, n)$ есть решение задачи

$$\min_l \int_0^T \left|\sum_{i=1}^n l_i h_i(\tau)\right| d\tau = 1, \qquad \sum_{i=1}^n l_i c_i = 1 \tag{1.5}$$

Оптимальное управление для задачи В

$$\begin{aligned} u^\circ(\tau) &= \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sign}\sum_{i=1}^n l_i^\circ h_i(\tau) \quad &\text{при} \quad \tau \in \Delta^\circ \\ u^\circ(\tau) &= 0 &\text{при} \quad \tau \overline{\in} \Delta^\circ \end{aligned} \tag{1.6}$$

где числа l_i^0 и системы Δ^0 отрезков $[\tau_\lambda, \tau_{\lambda+1}]$ на $[0, T]$ определяются решением задачи

$$\begin{gathered} \min_l \max_\Delta \int_\Delta \left|\sum_{i=1}^n l_i h_i(\tau)\right| d\tau = \alpha, \qquad \sum_{i=1}^n l_i c_i = 1 \\ \mathrm{mes}_\Delta = \min[\theta^{-1}, T] \end{gathered} \tag{1.7}$$

Оптимальное управление для задачи С

$$u^\circ(\tau)=\sum_{j=1}^{r}\mu_j\delta(\tau-\tau_j),\qquad \sum_{j=1}^{r}|\mu_j|=1 \tag{1.8}$$

где символ $\delta(\tau)$ обозначает импульсную δ-функцию, τ_j — моменты времени, в которые функция $|l_1^0h_1(\tau)+\ldots+l_n^0h_n(\tau)|$ достигает наибольшего значения на отрезке $[0, T^0]$, а числа l_i^0 есть решение задачи

$$\min_l\left(\max_\tau\left|\sum_{i=1}^{n}l_ih_i(\tau)\right|\quad \text{при}\quad 0\leqslant\tau\leqslant T^\circ\right)=1,\qquad \sum_{i=1}^{n}l_ic_i=1 \tag{1.9}$$

В формулах (1.4) — (1.9)

$$h_i(\tau)=\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(-\tau)b_j,\qquad c_i=-Z_{i0}$$

где $f_{ij}(t)$ — элементы фундаментальной матрицы $F(t)$ однородной системы (1.1).

Для конкретного вычисления оптимальных управлений нужно решать задачи (1.5), (1.7) и (1.2). Эти задачи решаются численными методами. При этом для отыскания $\min_l$ в задачах (1.5), (1.7), как правило, применяется метод наискорейшего спуска [3, 4]. Процедура наискорейшего спуска применяется в задаче А для фиксированного значения T к функции

$$\rho_A(l_1,\ldots,l_{n-1})=\int_0^T\left|g_n(\tau)+\sum_{i=1}^{n-1}l_ig_i(\tau)\right|d\tau \tag{1.10}$$

$$g_i(\tau)=h_i(\tau)+\frac{c_i}{c_n}h_n(\tau),\qquad g_n(\tau)=\frac{1}{c_n}h_n(\tau),\qquad (i=1,\ldots,n-1)\qquad (c_n\neq 0)$$

В задаче В процедура наискорейшего спуска в предположении, что система $\Delta(l)$ отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, обеспечивающая max в (1.7), уже выбрана, применяется к функции

$$\rho_B(l_1,\ldots,l_{n-1})=\int_{\Delta(l)}\left|g_n(\tau)+\sum_{i=1}^{n-1}l_ig_i(\tau)\right|d\tau \tag{1.11}$$

При автоматическом поиске экстремумов функций (1.10) и (1.11) методом наискорейшего спуска или каким-либо другим методом локального поиска (например, градиентным, релаксационным) возникают осложнения, связанные с особенностями строения этих функций. Очень часто встречаются случаи, когда структура функций ρ_A и ρ_B такова, что изменение некоторых переменных приводит к относительно небольшому изменению значений функций (например, поверхности типа «оврагов» с крутыми склонами и очень пологим дном). При поиске экстремумов таких функций происходит быстрое дробление рабочего шага, что ведет к существенному замедлению поиска или машина останавливается на какой-нибудь второстепенный «мелкой впадине».

Применение в этих случаях метода нелокального поиска, предложенного И. М. Гельфандом [5] (метод оврагов), ускоряет поиск. Однако общее время поиска все же остается большим.

Время поиска экстремумов функций (1.10) и (1.11) резко сокращается, если задачи минимизации функций ρ_A и ρ_B свести к некоторым задачам линейного программирования.

Отметим, что характер предлагаемой схемы вычислений в известном смысле подобен тому, что получено в методах выпуклого программирования, разрабатываемых Б. Н. Пшеничным [6,7].

2. Разобьем отрезок $[0, T]$ на m равных частей точками $\tau_j = j\Delta\tau$ $(j = 0, \ldots, m)$. При достаточно большом m можно (1.10) записать в виде

$$\rho_A \approx \rho_A{}^* = \Delta\tau \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n-1} l_i g_i(\tau_j) + g_n(\tau_i) \right| \tag{2.1}$$

Рассмотрим систему линейных функций

$$y_j(l) \equiv \sum_{i=1}^{n-1} l_i g_i(\tau_j) + g_n(\tau_j) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

Тогда задача минимизации $\rho_A{}^*$ эквивалентна следующей задаче минимизации выпуклой кусочно-линейной функции:

$$v(l) = \sum_{j=1}^{m} | y_j(l_1, \ldots, l_{n-1}) | \tag{2.3}$$

Задача минимизации (2.3) может быть сведена к задаче линейного программирования [7,8].

Для этого введем дополнительные переменные $x_1, \ldots, x_m$, положив

$$| y_j(l) | \leqslant x_j \qquad \text{или} \qquad x_j + y_j(l) \geqslant 0, \qquad x_j - y_j(l) \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Теперь задача минимизации (2.3) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

Минимизировать функцию

$$L = x_1 + \ldots + x_m \tag{2.5}$$

при ограничениях (2.4).

Действительно, пусть $L'' = \min L$ при ограничениях (2.4) и достигается в точке (l'', x''), а $v' = \min v$ и достигается в точке l'. В точке (l'', x''), очевидно, выполняются равенства $x_j'' = | y_j(l'') |$, так как в силу (2.4) $x_j'' \geqslant | y_j(l'') |$ и в случае отсутствия знака равенства при некоторых j можно было бы при отыскании $\min L$ уменьшить соответствующее x_j. Поэтому

$$L'' = \sum_{j=1}^{m} x_j'' = \sum_{j=1}^{m} | y_j(l'') | \geqslant v' \tag{2.6}$$

Пусть теперь $x_j' = | y_j(l') |$. Тогда точка (l', x') удовлетворяет ограничениям (2.4) и, следовательно,

$$L'' \leqslant \sum_{j=1}^{m} x_j' = \sum_{j=1}^{m} | y_j(l') | = v' \tag{2.7}$$

По (2.6) и (2.7) заключаем, что $L'' = v'$ и l'' из решения (l'', x'') задачи (2.4), (2.5) является также решением задачи (2.3).

Задачу минимизации функции (2.5) при ограничениях (2.4), как типичную задачу линейного программирования, можно решать симплекс-методом.

Заметим, что построение задачи линейного программирования для нахождения минимума функции ρ_B выполняется аналогично предыдущему.

Рассмотрим теперь задачу отыскания экстремума функции

$$\rho_c(l_1, \ldots, l_{n-1}) = \min_l \left(\max_\tau \left| g_n(\tau) + \sum_{i=1}^{n-1} l_i g_i(\tau) \right| \right) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant T) \tag{2.8}$$

К этой задаче сводится нахождение минимума функции, стоящей в левой части равенства (1.9) при фиксированном T и являющейся одним из этапов решения задачи C.

Будем опять считать, что отрезок $[0, T]$ разбит на m равных частей точками $\tau_j = j\Delta\tau$ $(j = 0, \ldots, m)$.

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi(l, \tau)$ с составляющими

$$\varphi_j(l, \tau_j) = \left| g_n(\tau_j) + \sum_{i=1}^{n-1} l_i g_i(\tau_j) \right| \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.9}$$

и множество M векторов S:

$$s_j = \{\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, \ldots, 0\} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

При достаточно большом m задачу (2.8) можно приближенно заменить задачей

$$\rho_c(l) \approx \rho_c^* = \min_l (\max_s (\varphi(l, \tau), s)]) \quad (s \in M) \tag{2.10}$$

Здесь символом (φ, s) обозначено скалярное произведение векторов φ и s.

Рассмотрим систему линейных функций

$$y_j(l) = g_n(\tau_j) + \sum_{i=1}^{n-1} l_i g_i(\tau_j) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.11}$$

Задача минимизации кусочно-линейной выпуклой функции

$$v(l) = \max_s (\varphi(l, \tau), s) \qquad (s \in M) \tag{2.12}$$

является чебышевской задачей приближения системы (2.11). Эта задача также может быть сведена к задаче линейного программирования [8].

Для этого введем новую переменную x_0, положив

$$\varphi_j(l, \tau_j) \leqslant x_0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.13}$$

Тогда эквивалентная задача линейного программирования будет сформулирована так.

Минимизировать функцию

$$L = x_0 \tag{2.14}$$

при ограничениях

$$x_0 + g_n(\tau_j) + \sum_{i=1}^{n-1} l_i g_i(\tau_j) \geqslant 0, \qquad x_0 - g_n(\tau_j) - \sum_{i=1}^{n-1} l_i g_i(\tau_j) \geqslant 0 \tag{2.15}$$

Покажем, что решение задачи (2.14), (2.15) одновременно будет и решением задачи (2.10). Пусть $L' = \min x_0$ при ограничениях (2.15) и достигается в точке (l', x).

Тогда, очевидно, что

$$L' = x_0' = \max_s (\varphi(l', \tau), s) \geqslant \min_l [\max_s (\varphi(l, \tau), s] = \rho_c^* \qquad (s \in M)$$

С другой стороны, если l'' — некоторая чебышевская точка системы (2.11), то имеем $\varphi_j(l'', \tau_j) \leqslant \rho_c^*$ $(j = 1, \ldots, m)$ и значит точка $(l'', x_0 = \rho_c^*)$ удовлетворяет ограничениям (2.15). Но L' как наименьшее значение x_0 при ограничениях (2.15) не может превышать ρ_c^*, т. е. $L' \leqslant \rho_c^*$.

Из двух неравенств заключаем, что $\rho_c^* = L'$. Поэтому

$$\rho_c^* = \max_s (\varphi(l', \tau), s) = \min_l [\max_s (\varphi(l, \tau), s)] \qquad (s \in M)$$

т. е. точка l' является решением задачи (2.10) и $\rho_c^* = x_0'$.

В заключение заметим, что задачу (2.14), (2.15) можно решать симплекс-методом.

3. *Пример* 1. Пусть требуется решить задачу об ускоренном приведении гироскопического компаса в меридиан [9]. Движение гироскопа описывается уравнениями

$$z_1^{\cdot} = q_{12}z_2 + q_{13}z_3 + u(\tau), \quad z_2^{\cdot} = q_{21}z_1, \quad z_3^{\cdot} = q_{32}z_2 + q_{33}z_3 \tag{3.1}$$

Здесь

$$q_{12} = 3.74 \cdot 10^{-2}, \qquad q_{13} = 2.32 \cdot 10^{-2}, \qquad q_{21} = -4.11 \cdot 10^{-5},$$
$$q_{32} = -1.5 \cdot 10^{-3}, \quad q_{33} = -1.5 \cdot 10^{-3}$$

Задача о приведении системы (3.1) за заданное время T в начало координат при условии минимальности нормы $\|u\|$ управляющей функции ($\|u\| = \max_\tau |u(\tau)|$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$) приводится к проблеме [1]: найти

$$\min_l \int_0^T \left| \sum_{i=1}^3 l_i h_i(\tau) \right| d\tau = \rho(\tau) = \frac{1}{\|u\|} \quad (l_1c_1 + l_2c_2 + l_3c_3 = 1) \tag{3.2}$$

Здесь

$$T = 1800 \text{ сек}, \quad c_1 = 2.87 \cdot 10^{-2}, \quad c_2 = 1,39 \cdot 10^{-2}, \quad c_3 = -1.01 \cdot 10^{-2}$$

$$h_1(\tau) = a_{11}e^{x(1-\tau)} + e^{\varepsilon(T-\tau)}(b_{11}\cos\omega(T-\tau) - c_{11}\sin\omega(T-\tau))$$
$$h_2(\tau) = a_{21}e^{x(T-\tau)} + e^{\varepsilon(T-\tau)}(b_{31}\cos\omega(T-\tau) - c_{21}\sin\omega(T-\tau))$$
$$h_3(\tau) = a_{31}e^{x(T-\tau)} + e^{\varepsilon(T-\tau)}(b_{21}\cos\omega(T-\tau) - c_{31}\sin\omega(T-\tau))$$
$$x = -0.8824 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon = -0.3088 \cdot 10^{-3}, \quad \omega = 0.9481 \cdot 10^{-3}$$
$$a_{11} = -4.438 \cdot 10^{-1}, \quad a_{21} = -0.0207, \quad a_{31} = 0.0503$$
$$b_{11} = 1.444, \quad b_{21} = 0.0207, \quad b_{31} = -0.0503$$
$$c_{11} = -0.0572, \quad c_{21} = 0.0559, \quad c_{31} = -0.0304$$

После исключения l_3 (3.2) перепишется в виде

$$= \min_{l_1, l_2} \int_0^T | l_1g_1(\tau) + l_2g_2(\tau) + g_3(\tau) | \, d\tau \tag{3.3}$$

$$g_1(\tau) = h_1(\tau) - \frac{c_1}{c_3}h_3(\tau) \tag{3.4}$$

$$g_2(\tau) = h_2(\tau) - \frac{c_2}{c_3}h_3(\tau), \quad g_3(\tau) = \frac{1}{c_3}h_3(\tau)$$

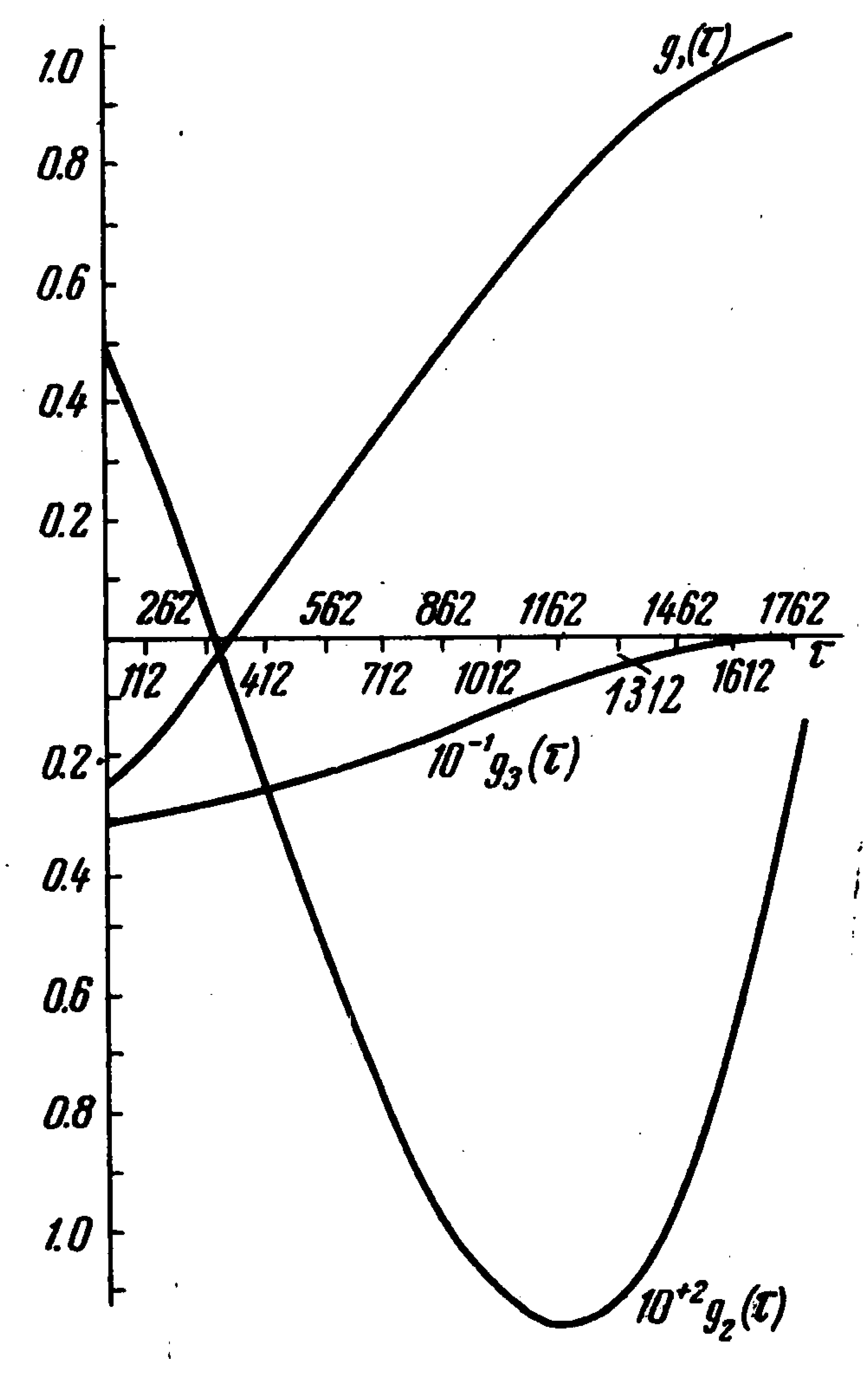
Графики функций g_1, g_2, g_3 приведены на фиг. 1. Задача линейного программирования для приближенного решения (3.3) формулируются следующим образом

$$L = x_1 + \ldots + x_m \tag{3.5}$$

при ограничениях

$$x_j + l_1g_1(\tau_j) + l_2g_2(\tau_j) + g_3(\tau_j) \geqslant 0$$
$$x_j - l_1g_1(\tau_j) - l_2g_2(\tau_j) - g_3(\tau_j) \geqslant 0 \tag{3.6}$$
$$(j = 1, \ldots, m)$$

Для повышения точности решения сформулированной оптимальной задачи нужно брать m достаточно большим. При этом задача линейного программирования (3.5) (3.6) получается большой размерности. Так, например, при $m = 50$ исходная матрица при решении задачи симплекс-методом будет иметь размерность (98×196).



Фиг. 1

Для понижения размерности задачи линейного программирования при сохранении точности решения исходной задачи можно интеграл (3.3) вычислять в виде суммы площадей трапеций. В этом случае отрезок $T = 1800$ *сек* разбит на 14 неравных частей. Среднее значение ординат

$$g_1(\tau_j^*),\quad g_2(\tau_j^*),\quad g_3(\tau_j^*)$$

функций (3.4) приведены в таблице слева.

j	$\Delta\tau_j$	$g_1(\tau_j^*)$	$g_2(\tau_j^*)\cdot 10^{-2}$	$g_3(\tau_j^*)$
1	187.5	—0.1868	0.385	—3.001
2	300	0.0089	—0.102	—2.651
3	300	0.2723	—0.6447	—2.077
4	150	0.4745	—0.975	—1.5765
5	150	0.603	—1.11	—1.223
6	75	0.695	—1.162	—0.962
7	75	0.751	—1.163	—0.795
8	75	0.804	—1.138	—0.636
9	75	0.852	—1.1084	—0.489
10	75	0.8935	—0.997	—0.354
11	75	0.9295	—0.876	—0.237
12	75	0.959	—0.718	—0.140
13	75	0.981	—0.52	—0.0667
14	112.5	0.9948	—0.205	—0.0181

Задача (3.5), (3.6) для значений $g_1(\tau_j)$, $g_2(\tau_j)$, $g_3(\tau_j)$ из таблицы решена симплекс-методом. При этом получено

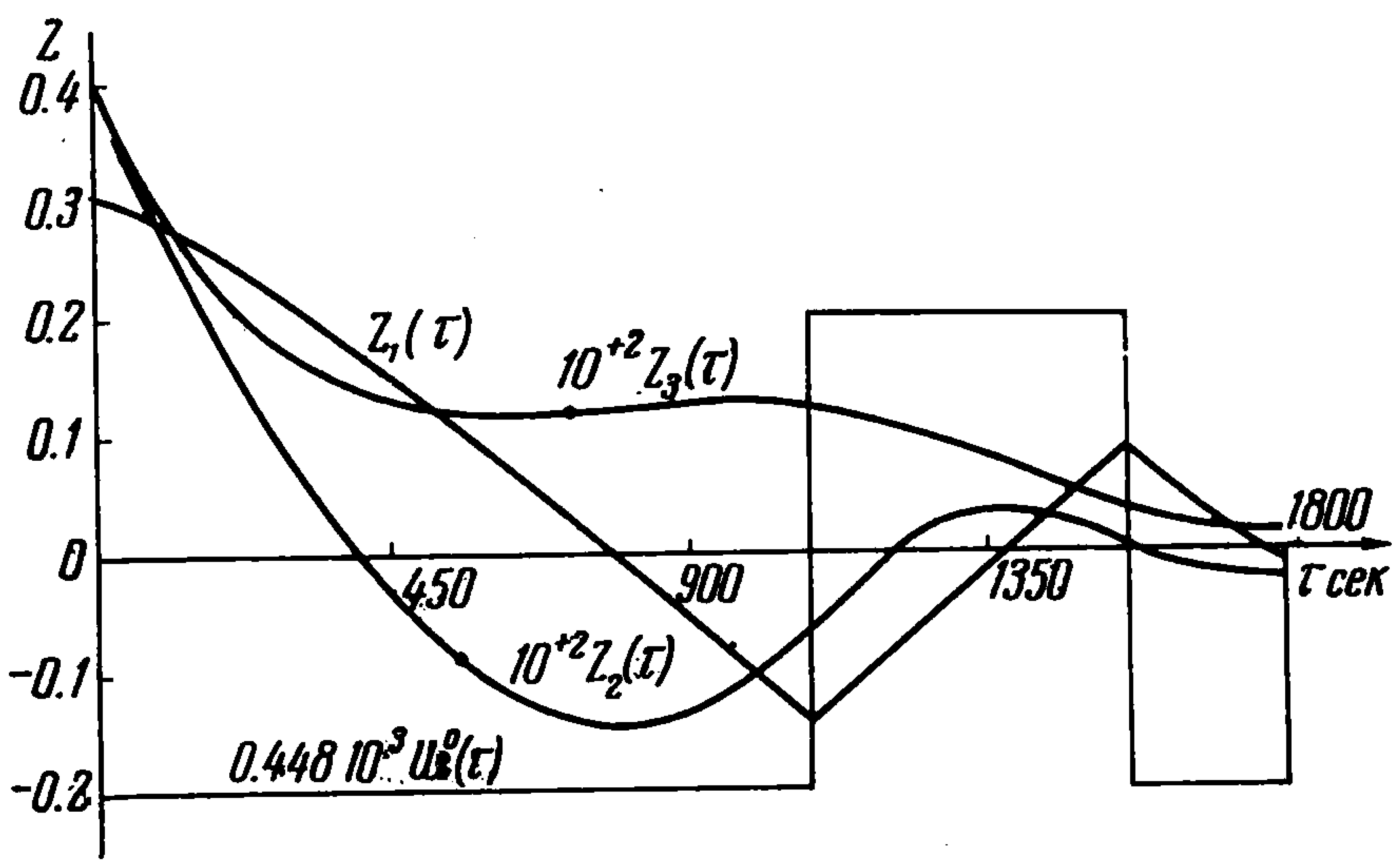
$$l_1^0 = -1.143, \qquad l_2^0 = -162.5$$

Значение величины ρ^0 оказалось при этом равным $\rho^0 = 2228$.

Следовательно, искомое оптимальное управление в соответствии с (1.4) имеет вид

$$u^0(\tau) = 0.448\cdot 10^{-3}\,\mathrm{sign}\,(-1.143\, g_1(\tau) - 162.5\, g_2(\tau) + g_3(\tau)) \tag{3.7}$$

Процесс движения системы (3.1) под действием управления (3.7) представлен графиками функций $Z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, $z_3(\tau)$ (фиг. 2).



Фиг. 2

Пример 2. Рассмотрим задачу успокоения линейного осциллятора

$$z_1^{\cdot} = z_2, \qquad z_2^{\cdot} = -z_1 + u(\tau); \qquad z_1(0) = -1, \qquad z_2(0) = 0 \tag{3.8}$$

за время $T = 1.18$ при условии минимума импульса силы

$$J(u) = \int_0^T |u(\tau)|\, d\tau \tag{3.9}$$

В соответствии с (1.9) для решения задачи нужно найти

$$\rho^\circ = \min_{l_2} (\max_\tau |h_1(\tau) + l_2 h_2(\tau)|, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.18) \tag{3.10}$$

где

$$h_1(\tau) = -\sin\tau, \qquad h_2(\tau) = \cos\tau$$

Задачу (3.10) решим путем сведения ее к задаче линейного программирования. Для этого отрезок $[0, T]$ разобъем на девять частей точками $\tau_j = j0.131$ ($j = 0, \ldots, 9$). Тогда эквивалентная задача линейного программирования будет сформулирована так. Найти минимум формы

$$L = x_0 \tag{3.11}$$

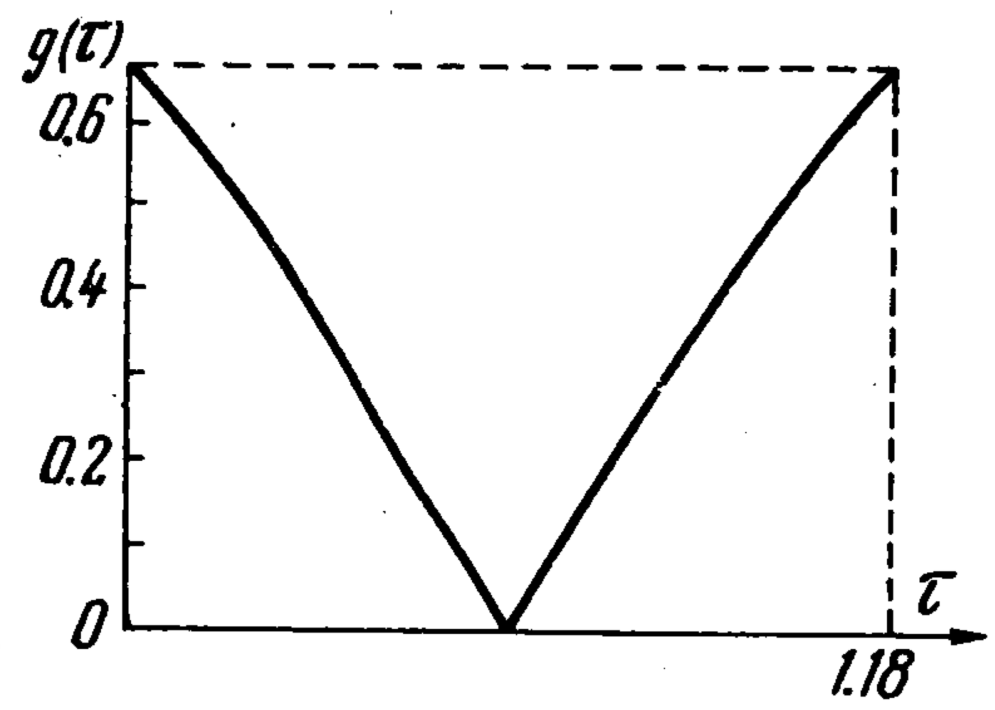
при ограничениях

$$x_0 + h_1(\tau_j) + l_2 h_2(\tau_j) \geqslant 0, \quad x_0 - h_1(\tau_j) - l_2 h_2(\tau_j) \geqslant 0 \quad (j = 0, \ldots, 9) \qquad (3.12)$$

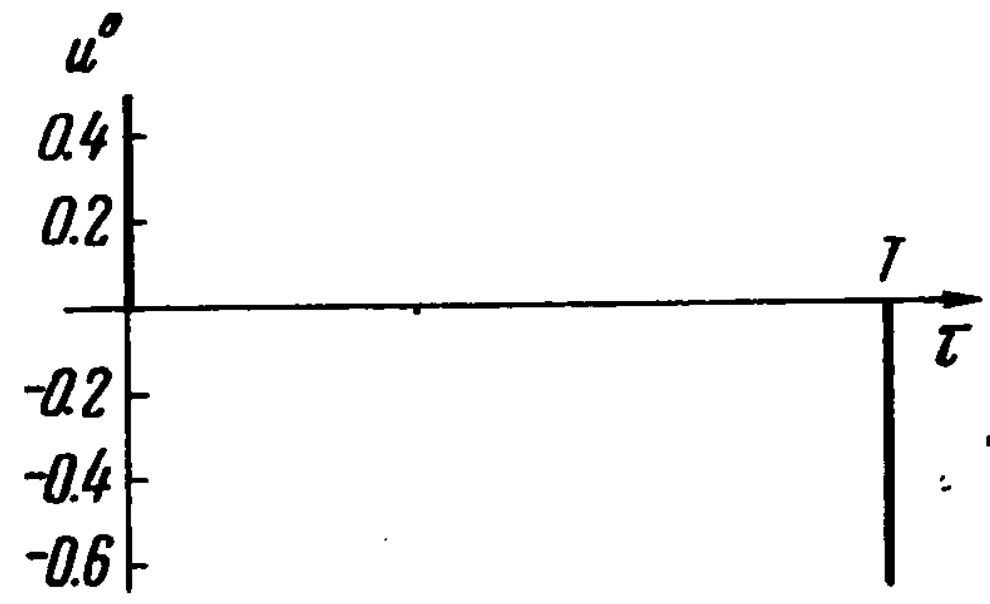
Задача (3.11), (3.12) решена симплекс-методом. Оптимальное значение параметра l_2 равно $l_2^0 = 0{,}668$. График функции

$$g(\tau) = |-\sin\tau + 0.668\cos\tau)| \qquad (3.13)$$

приведен на фиг. 3. Из этого графика видно, что функция $g(\tau)$ достигает на отрезке



Фиг. 3



Фиг. 4

[0,1.18] наибольших значений, равных $\rho^0 = 0.668$ в точках $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1{,}18$. Поэтому в соответствии с (1.8) оптимальное управление имеет вид

$$u^0(\tau) = \mu_1\delta(\tau - 0) + \mu_2\delta(\tau - 1.18) \qquad (3.14)$$

Для определения величин μ_1 и μ_2, входящих в формулу (3.14), воспользуемся тем условием, что при $\tau = 1.18$ изображающая точка должна попасть в начало координат. Это условие приводит к следующим уравнениям:

$$1 = -\int_0^{1.18} \sin\tau\,[\mu_1\delta(\tau - 0) + \mu_2\delta(\tau - 1.18)]\,d\tau$$

$$0 = \int_0^{1.18} \cos\tau\,[\mu_1\delta(\tau - 0) + \mu_2\delta(\tau - 1.18)]\,d\tau$$

Из этих уравнений, выполняя интегрирование, находим

$$\mu_1 = 0.415, \quad \mu_2 = -1.083 \qquad (3.15)$$

График оптимального управления с учетом (3.15) приведен на фиг. 4.

Поступила 3 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. К р а с о в с к и й Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, стр. 625.
2. К р а с о в с к и й Н. Н. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Б у т к о в с к и й А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Изд-во «Наука», 1965, стр. 305.
4. Б о н д а р е н к о В. И., К р а с о в с к и й Н. Н., Ф и л и м о н о в Ю. М. К задаче об успокоении линейной системы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5, стр. 828.
5. Г е л ь ф а н д И. М., Ц е т л и н М. Л. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2, стр. 295.
6. П ш е н и ч н ы й Б. Н. Двойственный метод в экстремальных задачах. Кибернетика, 1965, № 3, 4К.
7. Б и р з а к Б., П ш е н и ч н ы й Б. Н. О некоторых задачах минимизации негладких функций. Кибернетика, 1966, № 6.
8. З у х о в иц к и й С. И., А в д е е в а Л. И. Линейное и выпуклое программирование. Изд-во «Наука», 1964, стр. 270.
9. Р о й т е н б е р г Я. Н. Некоторые задачи управления движением. Физматгиз, 1963, стр. 16.