ОБ ИМПУЛЬСНЫХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯХ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Оптимальные задачи для линейных систем рассматривались многими авторами в связи с проблемой моментов [1]. В работе [2] решение приведено к разысканию минимакса некоторых известных функций специального вида, в работе [3] — к разысканию максимума линейного функционала на множестве, которое само определяется из условия максимума. Известны и другие модификации задачи [4,5].

В предлагаемой статье, в дополнение к тем результатам работы [1], которые относятся к задаче об импульсных быстродействиях, показано следующее: в силу условий, содержащихся в приведенном там решении, разыскание минимакса может быть заменено задачей на максимум (пп. 2,3).

Приводится элементарное доказательство важного утверждения о числе управляющихся импульсов (п. 3), имеющегося в работе [4]. Дается способ аппроксимации решений линейных дифференциальных уравнений полиномами, имеющий целью облегчить вычислительную сторону задачи (п. 4).

1. Постановка задачи. Рассмотрим полностью управляемую систему [6], описываемую уравнением

$$dy / dt = Ay + bu$$

в котором A — n-мерная квадратная постоянная матрица; y и b n-мерные векторы; u — скалярное управление.

Вследствие полной управляемости системы посредством дифференцирований, исключений и нормировки управления можно образовать уравнение относительно некоторой линейной комбинации x фазовых координат

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = u \tag{1.1}$$

Для уравнения (1.1) будем решать задачу быстродействия из заданной точки (x_0, $x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n-1)}$) в начало координат на множестве всех скалярных управлений с интегрируемым модулем при наличии ограничения

$$\int_0^\infty |u|\, dt \leqslant 1$$

Обозначим через $V(t)$ матрицу нормальной системы независимых решений уравнения (1.1) при $u = 0$, а через $z(t)$ — текущий фазовый вектор

$$V(t) = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \ldots x_n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) \ldots x_n^{(n-1)}(t) \end{matrix} \right\|, \qquad z(t) = \left\| \begin{matrix} x(t) \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(t) \end{matrix} \right\|, \qquad z(0) = \left\| \begin{matrix} x(0) \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(0) \end{matrix} \right\|$$

$$x_i^{(k)} \equiv \frac{d^k x_i}{dt^k}, \qquad x_i^{(k)}(0) = \delta_i^k$$

Из группового свойства решений дифференциальных уравнений, как известно, вытекает тождество $V^{-1}(t) = V(-t)$. Из работы [2] следует такой результат.

Оптимальное управление u^0 является импульсным

$$u^0 = \mu_1 \delta(t - t_1) + \ldots + \mu_r \delta(t - t_r]) \tag{1.2}$$

где $\delta(t - t_i)$ — дельта-функции.

Сумма модулей управляющих импульсов μ_r максимальна $|\mu_1| + \ldots + |\mu_r| = 1$

Моменты времени $t_1, \ldots, t_r$ приложения импульсов определяются решением задачи

$$\min_{C_1, \ldots, C_n} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k x_n^{(k-1)}(-t) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k^\circ x_n^{(k-1)}(t_j) \right| = 1 \tag{1.3}$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_0^{(k-1)} = \sum_{k=1}^{n} c_k^\circ x_0^{(k-1)} = -1 \tag{1.4}$$

Оптимальное время быстродействия T° есть наименьшее из всех T, удовлетворяющих, кроме (1.3), условиям «попадания»

$$-x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} x_n^{(k)}(-t_i)\mu_i \qquad (k = 0, \ldots, n-1) \tag{1.5}$$

В данной работе исследуются условия (1.2) — (1.5) для упрощения фактического синтеза оптимального управления.

Обозначим $x_n(-t) = \varphi(t)$. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi^{(n)} - a_1\varphi^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n a_n \varphi = 0 \tag{1.6}$$

и начальным условиям

$$\varphi(0) = \cdots = \varphi^{(n-2)}(0) = 0, \qquad \varphi^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$$

Равенства (1.3) и (1.5) получают, соответственно, вид

$$\min_{c_1, \ldots, c_n} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} c_k \varphi^{(k-1)}(t) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k^\circ (-1)^{k-1} \varphi^{(k-1)}(t_j) \right| = 1 \tag{1.7}$$

$$-x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} (-1)^k \varphi^{(k)}(t_i)\mu_i \tag{1.8}$$

Заметим, что функция

$$F(c, t) \equiv \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} c_k \varphi^{(k-1)}(t)$$

есть общее решение уравнения (1.6), так как при $t = 0$ в силу начальных условий для $\varphi(t)$ определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} \varphi(0) \ldots \varphi^{(n-1)}(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(0) \ldots \varphi^{(2n-3)}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \quad \ldots (-1)^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n-1} \ldots \varphi^{(2n-3)}(0) \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)} \tag{1.9}$$

отличен от нуля.

2. Вспомогательные предложения. 1°. Введем условия

$$\operatorname{sign} F(c, t_j) = \operatorname{sign} \mu_j \tag{2.1}$$

для каждого $\mu_j \neq 0$, $t_1, \ldots, t_n$ и $t_1, \ldots, t_r$, являющихся решением задачи (1.3). (Эти соотношения имеются также в [4]).

Лемма 2.1. Пусть выполнены равенства (1.7) и (1.8). Тогда из трех условий (1.2), (1.4) и (2.1) выполнение любых двух влечет выполнение третьего.

Доказательство. Умножая каждое из равенств (1.8) на c_{k+1} и суммируя по k, получим

$$-\sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} \varphi^{(k)}(t_i) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \operatorname{sign} F(c, t_i)$$

Для c_k и t_i, являющихся решением задачи (1.7) ,очевидно, $F(c, t_i) = \operatorname{sign} F(c, t_i)$. Таким образом,

$$-\sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \operatorname{sign} F(c, t_i)$$

Пусть выполнены условия (1.4) и (2.1). Тогда

$$1 = -\sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \operatorname{sign} F(c, t_i) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \operatorname{sign} \mu_i = \sum_{i=1}^{r} |\mu_i|$$

Если выполнены условия (1.2) и (2.1), то

$$-\sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \operatorname{sign} F(c, t_i) = \sum_{i=0}^{r} |\mu_i| = 1$$

Пусть, наконец, выполнены условия (1.2) и (1.4). Покажем, что отсюда следуют равенства (2.1). Без нарушения общности можно считать, что среди r чисел μ_i нет равных нулю. Имеем

$$1 = -\sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} |\mu_i| \delta_i \quad (\delta_i = \operatorname{sign} \mu_i \operatorname{sign} F(c, t_i))$$

Предположим теперь, что среди чисел δ_i имеются отрицательные, пусть первые m. Тогда

$$1 = \sum_{i=1}^{r} |\mu_i| \delta_i = -\sum_{i=1}^{m} |\mu_i| + \sum_{i=m+1}^{r} |\mu_i|$$

Из равенства (1.2) тогда следует $|\mu_1| + \ldots + |\mu_m| = 0$, что невозможно. Следовательно, $\delta_i = 1$

2°. Пусть $c^\circ = (c_1^\circ, \ldots, c_n^\circ)$ — какой-либо фиксированный набор значений c_i, удовлетворяющих условию (1.4), а $t_1^\circ < t_2^\circ < \ldots < t_r^\circ = T$ — те значения t_i, при которых

$$\max |F(c^\circ, t)| = |F(c^\circ, t_j^\circ)| = 1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.2}$$

Рассмотрим малую ρ-окрестность точки c°, определяемую условиями

$$|c_i - c_i^\circ| \leqslant \varepsilon_i < \rho \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Пусть L_j — множество всех значений ε_i, принадлежащее определенной выше ρ-окрестности, для которых $\max |F(c, t)|$ достигается при $0 \leqslant t = t_j \leqslant T$, переходящем, по непрерывности, в t_j°, когда $c = c^\circ$. Как точка минимума, либо максимума $F(c, t)$, значение t_j есть одно из решений уравнения $\partial F / \partial t = 0$ при условии $\partial^2 F / \partial t^2 \neq 0$. Из теории неявных функций следует, что функция $t_j = t_j(c)$ непрерывна и имеет конечные частные производные по c_i, если $\varepsilon \in L_j$.

С точностью до ε_i^2 имеем

$$F_j \equiv |F(c, t_j(c))| = \left|F(c^\circ, t_j^\circ) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial c_i} + \frac{\partial F}{\partial t_j}\frac{\partial t_j}{\partial c_i}\right)\Big|_{c=c^\circ} \varepsilon_i\right| =$$

$$= \left(\operatorname{sign} F(c^\circ, t_j^\circ) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial c_i}\Big|_{c=c^\circ} \varepsilon_i\right) \operatorname{sign} F(c^\circ, t_j^\circ) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi^{(i-1)}(t_j^\circ)\, \varepsilon_i \operatorname{sign} F(c^\circ, t_j^\circ) \equiv 1 + \Phi_j.$$

Заметим, что необходимо $t_r^\circ = T$, так как в противном случае попадание в начало координат, являющееся особой точкой, было бы вообще невозможно.

Из условия (2.2) вытекает: если $t^\circ \neq 0$, T, то $\partial F / \partial t = 0$. Если $t^0 = 0$, либо $t^\circ = T$, то моменты времени зафиксированы и производная $\partial F / \partial t$ в выражениях

F_0 и F_r вообще отсутствует. Так как, в силу определения множеств L_j:

$$F_j = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |F(c, t)| \quad \text{для} \quad \varepsilon \in L_j$$

то

$$1 = \min_{c_1 \ldots c_n} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |F(c, t)| = \min_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} (1 + \Phi)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 x_0 + \ldots + \varepsilon_n x_0^{(n-1)} = 0, \quad \Phi = \Phi_j \quad \text{при} \quad \varepsilon \in L_j \ (j = 1, \ldots, r)$$

Из того, что множества L_j определяются пересечением линейных по ε_i многообразий $\Phi_j = 0$ следует, что L_j образуют связные области, каждая из которых, если она не пуста, примыкает к началу координат ($\varepsilon = 0$). Области L_j заполняют по совокупности всю ρ-окрестность, так что функция $\max |F(c, t)|$ определена всюду в ρ-окрестности. Поскольку никакая функция не может в одной и той же точке принимать двух различных значений, являющихся одновременно максимальными, функция $\max |F(c,t)|$ также и однозначна. (Это означает, что области L_j, несовпадающие целиком, попарно не пересекаются). Наконец из непрерывности функций $t_j(c)$ следует непрерывность в ρ-окрестности функции $\max |F(c, t)|$. Из сказанного вытекает следующая лемма.

Лемма 2.2. Задача (2.3) распадается на две независимые задачи:

а) величины c_i° и t_j° определяются условиями

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} c_i \varphi^{(i-1)}(t) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} c_i \varphi^{(i-1)}(t_j) \right| = 1 \tag{2.3}$$

$$c_1 x_0 + \cdots + c_n x_0^{(n-1)} = -1 \tag{2.4}$$

б) Найденные отсюда величины t_j° должны удовлетворять условиям

$$\min \Phi(\varepsilon) = 0 \qquad (|\varepsilon_i| \leqslant \rho) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_1 x_0 + \ldots + \varepsilon_n x_0^{(n-1)} = 0 \tag{2.6}$$

где $\Phi(\varepsilon)$ — однозначная непрерывная функция, определенная всюду в ρ-окрестности условиями

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi^{(i-1)}(t_j^\circ) \varepsilon_i \operatorname{sign} F(c^\circ, t_j^\circ) \qquad (\varepsilon \in L_j)$$

При этом для каждого p и $\varepsilon \in L_j$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi^{(i-1)}(t_j^\circ) \varepsilon_i \operatorname{sign} F(c^\circ, t_j^\circ) \geqslant \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi^{(i-1)}(t_p^\circ) \varepsilon_i \operatorname{sign} F(c^\circ, t_p^\circ)$$

3°. Обозначим $a_{ji} = (-1)^{-1} \varphi^{-1}(t_j^\circ) \operatorname{sign} F(c^\circ, t_j^\circ)$ (2.7) и рассмотрим вопрос о минимуме функции $\Phi(\varepsilon)$, заданной условиями

$$\Phi(\varepsilon) = a_{j1}\varepsilon_1 + \cdots + a_{jn}\varepsilon_n \qquad (\varepsilon \in L_j) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.7}$$

на линейном многообразии (2.6).

Покажем, прежде всего, что для наличия минимума функции $\Phi(\varepsilon)$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольных ε_i не равных одновременно нулю, и любых z, удовлетворяющих условию $z \geqslant \Phi(\varepsilon)$, выполнялось условие $z > 0$.

Необходимость сразу вытекает из условия минимума: $\Phi(\varepsilon) > 0$ ($\varepsilon \neq 0$). Достаточность докажем способом от противного. Пусть для любых ε_i и z из неравенства $z \geqslant \Phi(\varepsilon)$ вытекает $z > 0$, но существует точка ε^*, для которой $\Phi(\varepsilon^*) < 0$. В силу произвола z можно положить $z = \Phi(\varepsilon^*) + \delta$, взяв $\delta > 0$ достаточно малым. Тогда получим $z < 0$ и $z \geqslant \Phi(\varepsilon)$, что невозможно.

Обозначим

$$\eta_j = (a_{j1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{jn}\varepsilon_n) - z \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.8}$$

Из доказанного вытекает, что функция $\Phi(\varepsilon)$ имеет минимум тогда и только тогда, если неравенство $z > 0$ будет следствием системы условий

$$\eta_1 \leqslant 0, \ldots, \eta_r \leqslant 0 \tag{2.9}$$

В самом деле, согласно (2.7), если $\varepsilon \in L_j$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varepsilon_i, \quad \text{или} \quad \eta_j \geqslant \eta_k \qquad (k \leqslant n)$$

Если $z \geqslant \Phi(\varepsilon)$, то $\eta_j \leqslant 0$ и, следовательно, $\eta_k \leqslant 0$. Обратно из условий $\eta_j \geqslant \eta_k$ и $\eta_j \leqslant 0$, имеющих место при $\varepsilon \in L_j$, следует $z \geqslant \Phi(\varepsilon)$.

Пусть h — ранг матрицы $\|a_{ji}\|$. Если $r \geqslant n = h$, то, в силу (2.6) и (2.8), между величинами $\eta_j + z$, а следовательно, η_j и z имеют место точно $r - n + 1$ независимых линейных соотношений. Очевидно, неравенство $z > 0$ является следствием условий (2.9) тогда и только тогда, если между η_j и z существует, по крайней мере, одна линейная зависимость с коэффициентом одного знака. Рассмотрим три случая.

а) Пусть $r = n = h$. В этом случае между η_j и z существует лишь одна линейная зависимость, выражаемая уравнением

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} & \eta_1 + z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & \eta_n + z \\ x_0 \ldots x_0^{(n-1)} & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.10}$$

или

$$M_1\eta_1 + \ldots + M_n\eta_n + (M_1 + \ldots + M_n)\, z = 0$$

Здесь M_j — алгебраическое дополнение j-го элемента последнего столбца в определителе (2.10). Коэффициенты этой линейной связки будут одного знака лишь при условиях

$$M_i M_j \geqslant 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

Таким образом, условия (2.11) необходимы и достаточны для существования минимума функции $\Phi(\varepsilon)$. Нетрудно видеть, что этот минимум, достигаемый в точке $\varepsilon = 0$, является изолированным только тогда, если все соотношения (2.11) суть строгие неравенства. Действительно, если какой-нибудь из миноров, например, M_1, равен нулю, то для обращения z в нуль достаточно положить $\eta_2 = \ldots = \eta_n = 0$. Удовлетворить же этим уравнениям возможно, очевидно, не только нулевыми значениями ε_i.

Вообще, минимум функции $\Phi(\varepsilon)$, достигаемый в точке $\varepsilon = 0$, изолирован только тогда, если не существует ни одного линейного соотношения с коэффициентами одного знака, которое связало бы менее n величин $\eta_j + z$.

б) Пусть $r > n = h$. Покажем, что в этом случае необходимо найдутся n величин $\eta_{i1}, \ldots, \eta_{in}$, образующие вместе с (2.6) линейную комбинацию с коэффициентами одного знака. Это будет означать, что для существования минимума функции $\Phi(\varepsilon)$ необходимо и достаточно, чтобы среди r величин η_j имелось точно n таких, неположительность которых влечет неравенство $z > 0$. Разрешив какие-либо n равенств (2.8), пусть первых, относительно $\eta_j + z$, и, подставив результат в остальные уравнения (2.8) и (2.6), получим

$$\begin{gathered} \eta_{n+1} + z = \alpha_{11}(\eta_1 + z) + \ldots + \alpha_{1n}(\eta_n + z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_r + z = \alpha_{r-n,1}(\eta_1 + z) + \ldots + \alpha_{r-n,n}(\eta_n + z) \\ 0 = \alpha_1(\eta_1 + z) + \ldots + \alpha_n(\eta_n + z) \end{gathered} \tag{2.12}$$

Рассмотрим всевозможные линейные соотношения

$$A_1(\eta_1 + z) + \ldots + A_r(\eta_r + z) = 0 \tag{2.13}$$

выполняющиеся в силу системы (2.12).

Подставляя в (2.13) выражения для $\eta_{n+1}+z,\ldots,\eta_r+z$ и приравнивая нулю коэффициенты при $\eta_1+z,\ldots,\eta_n+z$, найдем

$$-A_\nu = A_{n+1}\alpha_{1\nu}+\cdots+A_r\alpha_{r-n,\nu}+\lambda\alpha_\nu \qquad (\nu=1,\ldots,n) \tag{2.14}$$

Если функция $\Phi^{(\varepsilon)}$ имеет минимум, то существует такое соотношение (2.13), в котором все A_k, являющиеся решением системы (2.14), одного знака. Пусть, например, $A_k = A_k^\circ > 0$. Зафиксировав в системе (2.14) величины $\overset{\circ}{A}_{n+2},\ldots, A_r^\circ$ и уменьшая A_{n+1}, начиная с $\overset{\circ}{A}_{n+1}$, получим, что, по крайней мере, один из коэффициентов $A_1,\ldots$, $\ldots, A_n$, A_{n+1}, пусть A_{n+1} раньше других обратится в нуль. Это значит, что существуют такие $A_2>0,\ldots,A_r>0$, что

$$A_2(\eta_2+z)+\ldots+A_r(\eta_r+z)=0$$

и знак η_1 не влияет на знак z.

Отбросив в системе (2.8) первое уравнение и повторив заново весь процесс $r-n$ раз, убедимся в справедливости высказанного утверждения.

в) Пусть $r<n$. Тогда соотношения типа (2.13) приводят к системе уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}A_1+\cdots+a_{r_1}A_r+\lambda x_0=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,n}A_1+\cdots+a_{r,n}A_r+\lambda x_0^{(n-1)}=0 \end{gathered} \tag{2.15}$$

Для существования отличных от нуля решений этой системы требуется, чтобы ранг h матрицы $\|a_{ji}\|$ был равен рангу матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11}\ldots a_{r,1} & x_0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{1n}\ldots a_{rn} & x_0^{(n-1)} \end{Vmatrix} \tag{2.16}$$

и $h\leqslant r$. Пусть сперва $h=r$ и $\det a_{\lambda\mu}\neq 0$ $(\lambda,\mu=r)$.

Разрешая первые r уравнений (2.15) относительно A_k и требуя, чтобы все они были одного знака, получим условия

$$(-1)^{i+j}M_i^*M_j^*\geqslant 0 \qquad (i,j=1,\ldots,r) \tag{2.17}$$

аналогичные условиям (2.11). M_j^* — минор матрицы (2.16), получающийся из нее вычерчиванием j-го столбца. Если $h<r$ и $\det a_{\lambda\mu}\neq 0$ $(\lambda,\mu=1,\ldots,h)$, то получается аналогичный результат, в котором роль матрицы (2.16) играет матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11}\ldots a_{h1} & x_0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{1h}\ldots a_{hh} & x_0^{(h-1)} \end{Vmatrix}$$

В обоих случаях $(h=r,\ h<r)$ функция $\Phi(\varepsilon)$ имеет минимум на $n-h$-мерном линейном многообразии, содержащем точку $\varepsilon=0$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3. Пусть ранг матрицы

$$\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{r_1} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{rn} \end{Vmatrix}$$

равен h. Тогда в ней существуют h строк (если $h\leqslant n$), либо h столбцов (если $r\geqslant n$), пусть первых, из которых можно образовать матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1\ldots 1 & 0 \\ a_{11}\ldots a_{h,1} & x_0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{1,h}\ldots a_{h,h} & x_0^{(h-1)} \end{Vmatrix} \tag{2.18}$$

обладающую следующим свойством[1]: неотрицательность попарных произведений алгебраических дополнений элементов ее первой строки есть необходимое и достаточное условие минимума функции $\Phi(\varepsilon)$. Этот минимум, достигаемый в точке $\varepsilon = 0$, лишь в случае $h = n$ будет изолированным[2].

3. **Редукция задачи.** Пусть ранг матрицы

$$\| a_{ij} \| = \| (-1)^{i-1} \varphi^{(i-1)}(t_j^\circ) \operatorname{sign} F(c^\circ, t_j^\circ) \|$$

равен n. Найдем выражение для минора M_j^* матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \varphi(t_1^\circ) \operatorname{sign} F(c^\circ, t_1^\circ) \ldots & \varphi(t_n^\circ) \operatorname{sign} F(c^\circ, t_n^\circ) & x_0 \\ (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(t_1^\circ) \operatorname{sign} F(c^\circ, t_1^\circ) \ldots & (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(t_n^\circ) \operatorname{sign} F(c^\circ, t_n^\circ) & x_0^{(n-1)} \end{matrix} \right\|$$

получающегося из нее вычеркиванием j-го столбца. Подставляя $x_0^{(k)}$, из (1.8) найдем

$$M_1^* = (-1)^n D \mu_1 \operatorname{sign} F(c^\circ, t_2^\circ) \ldots \operatorname{sign} F(c^\circ, t_n^\circ)$$

Здесь D — определитель матрицы $\| a_{ij} \|$. Аналогично (3.1)

$$M_j^* = (-1)^{n-j+1} D \operatorname{sign} F(c^\circ, t_1^\circ) \ldots \operatorname{sign} F(c^\circ, t_{j-1}^\circ) \mu_j \operatorname{sign} F(c^\circ, t_{j+1}^\circ) \ldots \operatorname{sign} F(c^\circ, t_n^\circ)$$

Теорема 3.1 о числе импульсов[3]. Число r импульсов μ_i, осуществляющих быстродействие, не превосходит размерности задачи

$$r \leqslant n \tag{3.2}$$

Доказательство. Покажем, что, если $r > n$, то либо время T не является оптимальным, либо быстродействие осуществимо также с числом импульсов $r \leqslant n$. В самом деле, пусть $r > n$. Согласно лемме 2.3, условия, реализующие минимум $\Phi(\varepsilon)$, таковы:

$$M_i M_j = (-1)^{i+j} M_i^* M_j^* \geqslant 0 \tag{3.3}$$

для каждой пары миноров M^* матрицы (2.22).

Пусть сперва $h = n$. Определим новые величины μ_i' импульсов формулами

$$-x_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^k \varphi^{(k)}(t_i) \mu_i', \qquad \mu_{n+1}' = \ldots = \mu_r' = 0 \tag{3.4}$$

Используя (2.1), (3.1) и (3.3), получим

$$M_i M_j = (-1)^{2n-2} D^2 (\mu_i' \operatorname{sign} \mu_i)(\mu_j' \operatorname{sign} \mu_j) \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Отсюда $\qquad (\mu_i' \operatorname{sign} \mu_i)(\mu_j' \operatorname{sign} \mu_j) \geqslant 0.$

С другой стороны, из условий (2.3) и (2.1) следует с необходимостью выполнение равенств

$$\begin{gathered} c_1 \varphi(t_1) + \cdots + (-1)^{n-1} c_n \varphi^{(n-1)}(t_1) = \operatorname{sign} \mu_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 \varphi(t_n) + \cdots + (-1)^{n-1} c_n \varphi^{(n-1)}(t_n) = \operatorname{sign} \mu_n \\ c_1 x_0 + \cdots + c_n x_0^{(n-1)} = -1 \end{gathered}$$

Откуда

$$\begin{vmatrix} \varphi(t_1) \ldots (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(t_1) & \operatorname{sign} \mu_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varphi(t_n) \ldots (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(t_n) & \operatorname{sign} \mu_n \\ x_0 \qquad x_0^{(n-1)} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

---

[1] Здесь и дальше предполагается, что матрицы типа (2.18) содержат не обязательно первые столбцы (строки) матрицы $\| a_{ij} \|$: считаем их перенумерованными заново.

[2] Леммы 2.2, 2.3 связаны с результатами К. Каратеодори и Н. Г. Чеботарева [7].

[3] См. также работу [8].

Это, в силу (3.4), эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} \varphi(t_1)\ldots(-1)^{(n-1)}\varphi^{(n-1)}(t_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi(t_n)\ldots(-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(t_n) \end{vmatrix} (1-\mu_1'\,\mathrm{sign}-\cdots-\mu_n'\,\mathrm{sign}_n)=0$$

Отсюда

$$\mu_1'\,\mathrm{sign}\,\mu_1+\ldots+\mu_n'\,\mathrm{sign}\,\mu_n=1 \tag{3.6}$$

Сопоставляя (3.5) и (3.6), найдем

$$\mu_j'.\mathrm{sign}\,\mu_j>0 \quad (j=1,\ldots,n), \quad \text{или} \quad \mathrm{sign}\,\mu_j'=\mathrm{sign}\,\mu_j$$

Таким образом, если известно быстродействие с $r>n$ импульсами, осуществляемыми в моменты $t_1,\ldots,t_r$, то из этих моментов времени можно выбрать такие n (в доказательстве они обозначены через $t_1,\ldots,t_n$), положив в остальных μ_j нулями, что выполнены все условия для быстродействия: (1.5), (2.1), (2.3) — (2.6).

Если при этом $t_n<T$, то найденное первоначально T не является оптимальным. При $h<n$ в доказательстве нужно использовать линейные зависимости между элементами матрицы $\|a_{ij}\|$, как это сделано ниже, в доказательстве теоремы 3.3. В остальном оно аналогично предыдущему. Теорема доказана.

Проведенный анализ условий (1.2) — (1.5) позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 3.2. Оптимальное уравнение в задаче быстродействия для уравнения (1.1) будет импульсным. Сумма модулей управляющих импульсов μ_j максимальна

$$|\mu_1|+\ldots+|\mu_r|=1$$

Моменты времени $t_1,\ldots,t_r$ приложения импульсов определяются решением задачи (2.3).

Оптимальное время быстродействия $T°$ есть наименьшее из всех T, удовлетворяющих, кроме 2.3, условиям попадания (1.8), где $k=0,\ldots,n-1$; а также условиям для знаков импульсов (2.1) для каждого $\mu_j\neq 0$. Число r ненулевых импульсов удовлетворяет неравенствам

$$h\leqslant r\leqslant n$$

где h — ранг расширенной матрицы системы уравнений (1.8).

Доказательство. Согласно леммам 2.1, 2.2, условия (2.3), (1.8), (2.1) и (1.2) заменяют условие (1.4). Условие $r\leqslant n$ доказано в теореме 3.1. Неравенство $h\leqslant r$ есть условие разрешимости системы (1.8). Если учесть лемму 2.2, то остается доказать, что условия (2.5) и (2.6) удовлетворяются в силу условий данной теоремы. Покажем это.

Рассмотрим матрицу (2.18) из леммы (2.3), которой будем пользоваться.

Пусть ее ранг r равен n. С учетом условий (2.1) формулы (3.1) приобретают вид

$$M_j^*=(-1)^{n-j+1}D\,\mathrm{sign}\,\mu_1\ldots\mathrm{sign}\,\mu_{j-1}\mu_j\,\mathrm{sign}\,\mu_{j+1}\ldots\mathrm{sign}\,\mu_n$$

Тогда

$$M_iM_j=(-1)^{i+j}M_i^*M_j^*=D^2\mu_i\,\mathrm{sign}\,\mu_i\mu_j\,\mathrm{sign}\,\mu_j=D^2\,|\mu_i|\,|\mu_j|\geqslant 0$$

Это, согласно лемме 2.3 означает, что функция $\Phi(\varepsilon)$ имеет минимум (условие (2.5)) на многообразии (2.6).

Пусть теперь $r=h<n$. В матрице

$$\begin{Vmatrix} \varphi(t_1) & \ldots & \varphi(t_h) & x_0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ (-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(t_1) & \ldots & (1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(t_h) & x_0^{(h-1)} \end{Vmatrix}$$

согласно условию, найдется h линейно независимых строк, пусть первых. Существуют также числа $\alpha_1{}^l, \ldots, \alpha_n{}^l$ такие, что имеют место соотношения

$$x_0{}^{(l)} = \alpha_1{}^l x_0 + \cdots + \alpha_h{}^l x^{(h-1)} \qquad (l = h+1, \ldots, n)$$

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(t_i) = \alpha_1{}^l \varphi(t_i) + \cdots + \alpha_h{}^l (-1)^{h-1} \varphi^{(h-1)}(t_i) \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

Имеем

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \varepsilon_j \varphi^{(j-1)}(t_i) = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{i-1} \varepsilon_j \varphi^{(j-1)}(t_i) +$$

$$+ \sum_{l=h+1}^{n} (-1)^{l-1} \varepsilon_l \varphi^{(l-1)}(t_i) = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1} E_j \varphi^{(j-1)}(t_i),$$

где

$$E_j = \varepsilon_j + \sum_{l=h+1}^{n} \alpha_j{}^{l-1} \varepsilon_l \; (j = 1, \ldots, h)$$

Аналогично

$$\varepsilon_1 x_0 + \cdots + \varepsilon_n x_0{}^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{h} E_j x_0{}^{(j-1)}$$

Теперь остается лишь сослаться на первую часть доказательства этой теоремы и лемму 2.3.

4. Аппроксимация функции $F(c, t)$ полиномами. Из теоремы 3.2 видно, что основная трудность исходной задачи состоит в таком выборе параметров c_i функции

$$F(c, t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} c_i \varphi^{(i-1)}(t)$$

при котором график этой функции на отрезке $[0, T]$, находясь внутри полосы $|F(c, t)| \leqslant 1$, касался бы ее границ заданное число раз $r \leqslant n$.

То обстоятельство, что при этом можно игнорировать поведение функции $F(c, t)$ вне указанной полосы позволяет применить излагаемый ниже способ ее аппроксимации. Основной целью этой аппроксимации является эффективное вычисление моментов времени t_j приложения импульсов (т. е. точек, для которых $|F(c, t_j)| = 1$).

Обозначим

$$F(c, t) = f(t) = f, \quad \frac{\partial^k F(c, t)}{\partial t^k} = f^{(k)}(t) = f^{(k)}, \quad f^{(k)}(0) = f_0{}^{(k)}$$

f — есть решение дифференциального уравнения

$$f^{(n)} = a_1 f^{(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1} a_n f \tag{4.1}$$

Интегрируя n раз уравнение (4.1) от 0 до t после преобразований получим

$$f = f_0 + \sum_{s=1}^{n-1} \Big(f_0{}^{(s)} - \sum_{k+j=s} (-1)^{k-1} a_k f_0{}^{(j)} \Big) \frac{t^s}{s!} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k \int_k f\,dt \tag{4.2}$$

где индексом k у интеграла обозначено k-кратное интегрирование по t. Если на отрезке $[0, T]$ $1 \leqslant f \leqslant -1$, то получим

$$(-1)^{k-1} a_k \int_k f\,dt \leqslant (-1)^{k-1} a_k \int_k dt = (-1)^{k-1} a_k \frac{t^k}{k!} \quad \text{при } (-1)^{k-1} a_k \geqslant 0$$

$$(-1)^{k-1} a_k \int_k f\,dt \geqslant (-1)^{k-1} a_k \int_k dt = (-1)^{k-1} a_k \frac{t^k}{k!} \text{ при } (-1)^{k-1} a_k \leqslant 0$$

Следовательно,

$$-|a_k|\frac{t^k}{k!}\leqslant(-1)^{k-1}a_k\int\limits_k f\,dt\leqslant|a_k|\frac{t^k}{k!}$$

Отсюда при $0\leqslant t\leqslant T$:

$$P_{1,n}^{-}\equiv\Psi_{1,n}-\sum_{k=1}^{n}|a_k|\frac{t^k}{k!}\leqslant f\leqslant\Psi_{1,n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\frac{t^k}{k!}\equiv P_{1,n}^{+}\tag{4.3}$$

$$\Psi_{1,n}=f_0+\sum_{s=1}^{n}\Big(f_0^{(s)}-\sum_{k+j=s}(-1)^{k-1}a_kf_0^{(j)}\Big)\frac{t^s}{s!}$$

Если принять в качестве первого приближения для f полином $\Psi_{1,n}={}^1/_2\,(P_{1,n}^{+}+$ $+P_{1,n}^{-})$ погрешность такого приближения будет

$$\Delta_{1,n}=|f-\Psi_{1,n}|=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\frac{t^k}{k!}\tag{4.4}$$

Пользуясь двусторонней оценкой (4.3), можно построить следующее и любое число дальнейших приближений.

Пусть $P_{m,n}^{+}\leqslant f\leqslant P_{m,n}^{-}$, где $P_{m,n}$ — полиномы степени mn; n - номер приближения.

Определим функции

$$\xi_1^{+}={}^1/_2\,[1-(-1)^{k-1}\operatorname{sign}a_k]\,P_{m,n}^{+}+{}^1/_2\,[1+(-1)^{k-1}\operatorname{sign}a_k]\,P_{m,n}^{-}$$

$$\xi_2={}^1/_2\,[1+(-1)^{k-1}\operatorname{sign}a_k]\,P_{m,n}^{+}+{}^1/_2\,[1-(-1)^{k-1}\operatorname{sign}a_k]\,P_{m,n}^{-}$$

Тогда, как нетрудно убедиться

$$(-1)^{k-1}a_k\int\limits_k\xi_1dt\leqslant(-1)^{k-1}a_k\int\limits_k f\,dt\leqslant(-1)^{k-1}a_k\int\limits_k\xi_2dt\tag{4.5}$$

После упрощений найдем

$$P_{m+1,n}^{-}\equiv\Psi_{m+1,n}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\int\limits_k(P_{m,n}^{+}-P_{m,n}^{-})\,dt\leqslant f\leqslant\Psi_{m+1,n}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\int\limits_k(P_{m,n}^{+}-P_{m,n}^{-})\,dt\equiv P_{m+1,n}^{+}$$

где

$$\Psi_{m+1,n}=f_0+\sum_{s=1}^{n-1}\Big(f_0^{(s)}-\sum_{k+j=s}(-1)^{k-1}a_kf_0^{(j)}\Big)\frac{t^s}{s!}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k\int\limits_k(P_{m,n}^{+}-P_{m,n}^{-})\,dt$$

Отсюда для погрешности аппроксимации, если считать $f\approx\Psi_{m,n}$, получим рекурентную формулу

$$\Delta_{m+1,n}\equiv\frac{P_{m+1,n}^{+}-P_{m+1,n}^{-}}{2}=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\int\limits_k\Delta_{m,n}\,dt$$

Покажем, что при всяком фиксированном n с ростом m эта погрешность равномерно по t на отрезке $[0,T]$ стремится к нулю

$$\Delta_{1,n}=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\frac{t^k}{k!}\leqslant at\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-1}}{k!}\leqslant ate^t\leqslant ae^{T}t,\qquad a=\max\{|a_k|\}$$

Вообще, если

$$\Delta_{m,n} \leqslant \frac{(ae^T)^m}{m!} t^m \tag{4.6}$$

$$\Delta_{m+1,n} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \int_k \Delta_{m,n} dt \leqslant \frac{(ae^T)^m}{m!} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \int_k t^m \, dt =$$

$$= \frac{(ae^T)^m}{m!} a \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k+m}}{(m+1)\ldots(m+k)} = \frac{(ae^T)^m}{(m+1)!} at^{m+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(m+2)\ldots(m+k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(ae^T)^{m+1}}{(m+1)!} t^{m+1}$$

Таким образом, при $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$

$$\Delta_{m,n}(t) \leqslant \frac{(aTe^T)^m}{m!}$$

Откуда $\Delta_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty$. Грубость использованной здесь оценки показывает, что на самом деле при $T < \infty$ имеет место гораздо более быстрая сходимость приближений. Если a_k и T невелики, то достаточно воспользоваться первым приближением.

Выясним, какой функцией аппроксимируется $\varphi(t)$ входящая в $F(c, t) = f(t)$, когда f аппроксимируется полиномом $\Psi_{1,n}$.

Формулы перехода от $f_0^{(k)}$ к C_i имеют вид

$$c_i = (-1)^{i-1} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j a_j f_0^{(n-j-i)}$$

Отсюда

$$c_{n-s} = (-1)^{n-s} \sum_{k+j=s} (-1)^{k-1} a_k f_0^{(j)}$$

Следовательно,

$$f \approx \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s} c_{n-s} \frac{t^s}{s!}, \qquad \varphi \approx \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Поступила 30 I 1967

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ УССР, статья 4, 1938, стр. 171.
2. Красовский Н. Н. К теории оптимального управления. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
3. Neustadt L. W. Optimisation a moment problem and nonlinear programming. J. Ind. Appl. Math. 1964 vol. 2, No. 1, series A: Control.
4. Kulikowski R. On optimum Control with Constrains. Bull. Polish. Acad. Sci., Ser. Tech. Sci., 1959, vol. 7, pp. 285—294.
5. Kreindler E. Contributions to the theory of tyme optimal control. J. of Franklin Inst., 1963, vol. 275, pp. 314—344.
6. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I. Международного конгресса ИФАК, т. 2. Изд-во АН СССР, 1961.
7. Чеботарев Н. Г. Об одном общем критерии минимакса. Критерий минимакса и его приложения. Сочинение, т. 2, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949, стр. 373—376, 396—409.