ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПОЛЕЙ К ПРОСТРАНСТВЕННЫМ АВТОНОМНЫМ СИСТЕМАМ

И. М. Беленький (Москва)

Метод присоединенных полей для двумерных автономных систем и его приложение к нелинейным колебаниям систем с одной степенью свободы [1,2] распространяется на более общие, трехмерные автономные системы, когда движение изображающей точки системы происходит в трехмерном фазовом пространстве.

Как пример рассматривается взаимодействие автоколебательной системы с источником энергии, который эти колебания поддерживает [3].

1. Рассмотрим трехмерную автономную систему вида

$$x^\cdot = p(x, y, z), \qquad y^\cdot = q(x, y, z), \qquad z^\cdot = r(x, y, z) \tag{1.1}$$

Здесь x, y, z — координаты фазовой точки M в евклидовом пространстве E_3, а относительно функций p, q и r будем полагать, что в области изменения переменных они принадлежат классу C_2.

Полю скоростей $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ фазовой точки $M(x, y, z)$ можно привести в соответствие присоединенное силовое поле [1,2] вида $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, где составляющие $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — равные, соответственно, $x^{\cdot\cdot}$, $y^{\cdot\cdot}$ и $z^{\cdot\cdot}$, в силу уравнений системы (1.1), представим в форме:

$$P = (\operatorname{grad} p \cdot \mathbf{v}), \qquad Q = (\operatorname{grad} q \cdot \mathbf{v}), \qquad R = (\operatorname{grad} r \cdot \mathbf{v}) \tag{1.2}$$

2. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.1. Всякое присоединенное к системе (1.1) поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ может быть нормализовано и представлено в виде суперпозиции двух полей, из которых одно поле является потенциальным, а другое — полем гироскопических сил.

Чтобы убедиться в этом, введем в рассмотрение два векторных поля — одно из которых определяется градиентом скалярной функции $V = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$, а другое $\mathbf{\Gamma} = (\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v})$.

Тогда в силу (1.2) нетрудно получить

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V + \mathbf{\Gamma} \qquad (\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \tag{2.1}$$

что и доказывает сделанное утверждение, так как $\mathbf{\Gamma}$ — сила гироскопическая и ее работа на действительном перемещении $d\mathbf{s}(dx, dy, dz)$ равна $(\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} = 0$.

Представление присоединенного поля $\mathbf{F}$ в форме (2.1) (теорема о нормализации) аналогично известному в гидродинамике преобразованию Громеко — Ламба [4].

Обозначим $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ через $\mathbf{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)$. Тогда присоединенные уравнения движения

$$x^{\cdot\cdot} = P(x, y, z), \qquad y^{\cdot\cdot} = Q(x, y, z), \qquad z^{\cdot\cdot} = R(x, y, z) \tag{2.2}$$

в силу теоремы о нормализации (1.2) можно представить в следующей форме:

$$x^{\cdot\cdot} + \zeta y^\cdot - \eta z^\cdot = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad y^{\cdot\cdot} + \xi z^\cdot - \zeta x^\cdot = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad z^{\cdot\cdot} + \eta x^\cdot - \xi y^\cdot = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{2.3}$$

Эти уравнения описывают движение лагранжевой системы с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}) - px^\cdot - qy^\cdot - rz^\cdot - V \quad \left(V = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)\right)$$

и будут обобщением уравнений Биркгофа [5], полученных для двухмерных систем.

Теорема 2. 2. Чтобы присоединенное к системе (1.1) поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ было полем консервативным, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\operatorname{rot}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0 \qquad (\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}) \tag{2.4}$$

Это является следствием теоремы 2.1 и условия $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.

Следствие 2.1. Если присоединенное силовое поле является полем консервативным и выполнено, следовательно, условие (2.4), то необходимо существует функция $\psi(x, y, z)$ такая, что

$$\operatorname{grad} \psi(x, y, z) = (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}) \tag{2.5}$$

Потенциал $V^*(x, y, z)$ присоединенного поля $\mathbf{F}$ будет при этом в силу (2.1) равен

$$V^* = V - \psi \qquad (V = -{}^1/_2\,(p^2 + q^2 + r^2)) \tag{2.6}$$

Следствие 2.2. Функция $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\psi(x, y, z) = \mu(x, y, z) \qquad (\mu = \mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{\Omega} - \Omega^2) \tag{2.7}$$

Это непосредственно следует, если взять дивергенцию от обеих частей (2.5).

Следствие 2.3. Если не рассматривать тривиального случая $\mathbf{v} = 0$, то согласно (2.5) ψ есть тождественное постоянное, когда:

(а) $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, т. е. поле скоростей жидкости, ассоциированное с движением точек в фазовом пространстве, будет полем потенциальным. При этом пфаффова форма $(pdx + qdy + rdz)$ будет полным дифференциалом и, следовательно, в указанном случае, система (1.1) относится к классу так называемых потенциальных систем [6];

(б) векторы $\mathbf{v}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ коллинеарны. Это приводит к соотношению

$$\frac{r_y - q_z}{p} = \frac{p_z - r_x}{q} = \frac{q_x - p_y}{r}$$

Аналога случаю (б) для двумерных автономных систем не имеется, так как при плоскопараллельном движении $\operatorname{rot}\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$

Следствие 2.4. Если $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ есть постоянный вектор, то условие консервативности (2.4) приводит к соотношению

$$(\operatorname{div}\mathbf{v})\,\mathbf{\Omega}_0 = (\mathbf{\Omega}_0 \cdot \nabla)\,\mathbf{v} \qquad (\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}_0) \tag{2.8}$$

При этом функция $\psi(x, y, z)$ в силу (2.7) будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = -\Omega_0^2$$

Следствие 2.5. Для двумерных автономных систем ($z = 0$) условие консервативности (2.4) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}(p\zeta) + \frac{\partial}{\partial y}(q\zeta) = 0 \qquad (\zeta = q_x - p_y) \tag{2.9}$$

что совпадает с результатом, полученным ранее [2]. Случай $\zeta = \text{const}$ дает $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Теорема 2.3. Функция $\psi(x, y, z)$ (2.5) является интегралом присоединенной системы (2.3) и представляет взятую с обратным знаком функцию Гамильтона H.

Это непосредственно следует, если написать обобщенный интеграл энергии и воспользоваться функцией Лагранжа $L = T - V^*$, где V^* определяется в согласии с (2.6).

Таким образом, уравнение $\psi(x, y, z) = \text{const}$ есть уравнение фазовой поверхности для системы (1.1).

Теорема 2.4. Если присоединенные уравнения движения (2.3) допускают два независимых от (1.1) первых интеграла

$$F_i(x, y, z, x^\cdot, y^\cdot, z^\cdot) = \text{const} \qquad (i = 1,2) \tag{2.10}$$

то уравнения фазовых траекторий можно получить простой подстановкой.

Действительно, так как фазовые траектории системы (1.1) представляют подмножество множества траекторий присоединенной системы (2.3), то они должны также удовлетворять (2.10). Отсюда в силу независимости интегралов (2.10) и (1.1), путем исключения $x^\cdot$, $y^\cdot$, и $z^\cdot$, получаем фазовые траектории, как линии пересечения двух фазовых поверхностей

$$F_i(x, y, z, p, q, r) = F_i^*(x, y, z) = \text{const} \qquad (i = 1,2) \tag{2.11}$$

Чтобы фазовые поверхности $F_i^* (x, y, z) = \mathrm{const}$ $(i = 1, 2)$ не имели общих касательных плоскостей, необходимо, чтобы не все функциональные определители

$$\frac{\partial (F_1^*, F_2^*)}{\partial (x, y)}, \qquad \frac{\partial (F_1^*, F_2^*)}{\partial (x, z)}, \qquad \frac{\partial (F_1^*, F_2^*)}{\partial (y, z)}$$

обращались одновременно в нуль.

3. Автономную систему вида

$$\dot{x} = q - r, \qquad \dot{y} = r - p, \qquad \dot{z} = p - q \tag{3.1}$$

будем называть сопряженной по отношению к основной системе (1.1) и ее фазовые траектории, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{q-r} = \frac{dy}{r-p} = \frac{dz}{p-q} = dt \tag{3.2}$$

будут ортогональны фазовым траекториям основной системы (1.1).

Обозначая элементарные перемещения вдоль фазовых траекторий основной (1.1) и сопряженной (3.1) систем, соответственно через $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\, dt$ и $d\mathbf{s}^* = \mathbf{v}^* dt$, где $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}^* = (q - r)\,\mathbf{i} + (r - p)\mathbf{j} + (p - q)\mathbf{k}$ — скорости фазовых точек, получаем

$$d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}^* = (p\,(q - r) + q\,(r - p) + r\,(p - q))\, dt^2 = 0$$

что и доказывает ортогональность фазовых траекторий обеих систем.

Система двух уравнений Пфаффа, получаемая из (3.2), допускает интегральное многообразие двух измерений. Это следует из того, что $dx + dy + dz = 0$ и, следовательно, существует соотношение

$$x + y + z = C \qquad (C = \mathrm{const}) \tag{3.3}$$

Для дальнейшего интегрирования (3.2) исключим при помощи (3.3) какую-либо переменную, скажем z. Это приводит к интегрированию уравнения Пфаффа вида

$$A\,(x, y, C)\, dx + B\,(x, y, C)\, dy = 0 \tag{3.4}$$

$$A\,(x, y, C) = r\,(x, y, C - (x + y)) - p\,(x, y, C - (x + y))$$

$$B\,(x, y, C) = r\,(x, y, C - (x + y)) - q\,(x, y, C - (x + y))$$

Пусть $\Phi\,(x, y, C) = C_1$ — интеграл уравнения (3.4). Тогда фазовая траектория сопряженной системы (3.1) есть линия пересечения цилиндрической поверхности $\Phi\,(x, y, C) = C_1$ и плоскости $x + y + z = C$.

Таким образом, задача отыскания фазовых траекторий основной системы (1.1) сводится к построению линий, ортогональных к траекториям сопряженной системы (3.1).

4. Обратимся снова к системе (1.1) и пусть функции $p\,(x, y, z)$, $q\,(x, y, z)$ и $r\,(x, y, z)$ таковы, что условие консервативности (2.4) присоединенного силового поля не выполняется. Будем отыскивать преобразование вида

$$dt = \omega\,(x, y, z)\, d\tau \tag{4.1}$$

которое, не меняя фазовой картины траекторий, сделало бы преобразованное присоединенное поле консервативным. Преобразования, подобные (4.1), применялись,в частности Чаплыгиным [7] при рассмотрении неголономных систем, а также Биркгофом [5] при изучении общих лагранжевых систем.

Чтобы преобразованное в силу (4.1) силовое поле стало консервативным, достаточно потребовать $\mathrm{rot}\, \mathbf{v}_1 = 0$, где $\mathbf{v}_1 = \omega \mathbf{v}$. Это условие дает

$$(\mathrm{grad}\, \omega \times \mathbf{v}) + \omega\, \mathrm{rot}\, \mathbf{v} = 0$$

что может быть преобразовано к виду

$$\mathrm{grad}\, \ln \omega \cdot \mathbf{v}^* = -\,\mathrm{div}\, \mathbf{v}^* \tag{4.2}$$

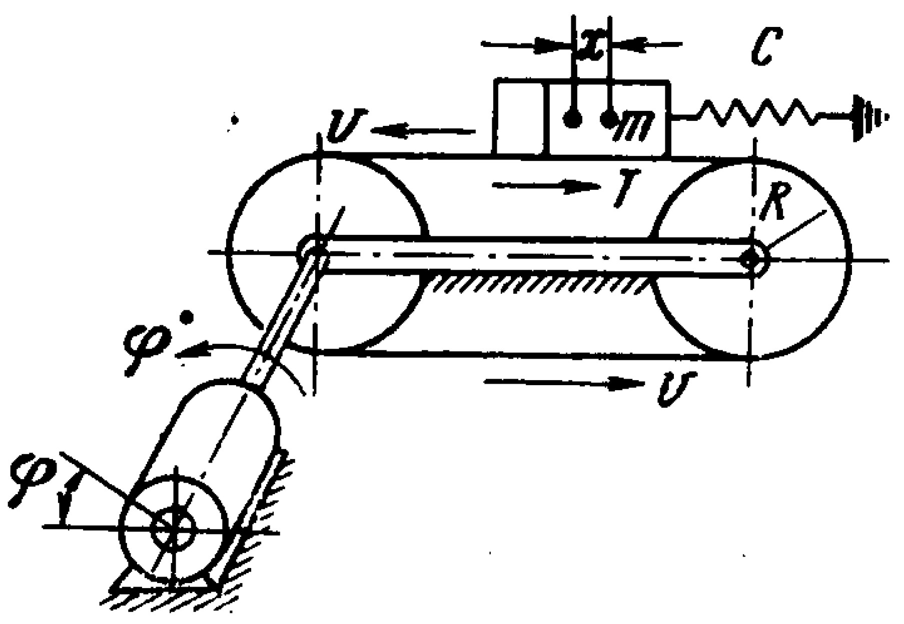
Здесь $\mathbf{v}^* = (q - r)\,\mathbf{i} + (r - p)\,\mathbf{j} + (p - q)\,\mathbf{k}$ по-прежнему скорость фазовой точки сопряженной системы (3.1).

Таким образом, задача нахождения функции $\omega(x, y, z)$, которую, следуя Чаплыгину, будем называть приводящим множителем, сводится к интегрированию системы

$$\frac{dx}{q-r}=\frac{dy}{r-p}=\frac{dz}{p-q}=\frac{d\ln\omega}{-\operatorname{div}\mathbf{v}^*} \tag{4.3}$$

Для интегрирования этой системы могут быть использованы результаты, изложенные в предыдущем параграфе.

5. Рассмотрим простейший случай, когда функции p, q и r (1.1) представляют собой линейные формы независимых переменных, которые будем здесь обозначать через x_1, x_2, x_3. Уравнения системы (1.1) запишем в векторной форме



$$\mathbf{x}^{\cdot}=A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \quad A=(a_{ij})_1^3 \tag{5.1}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — вектор-столбец, а A — постоянная m — матрица порядка трех ($m=3$).

Пусть присоединенное силовое поле (2.1) будет консервативным и, следовательно, выполняется условие (2.4). Рассмотрим возможные случаи.

а) Пусть $\boldsymbol{\Omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$, т. е. движение жидкости, ассоциированное с движением системы, является потенциальным. Это в силу (5.1) приводит к условию $a_{ij}=a_{ji}$, т. е. матрица A должна быть симметрической. Что касается дивергенции вектора скорости $\mathbf{v}$, то он будет равен следу матрицы A:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+a_{33} \tag{5.2}$$

б) Пусть $\operatorname{rot}\mathbf{v}\parallel\mathbf{v}$. Этот случай также имеет простую гидродинамическую трактовку, а именно вихревые нити жидкости, ассоциированной с движением рассматриваемой системы, параллельны фазовым траекториям.

Поскольку для системы (5.1) $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ есть вектор постоянный, то вихревые нити, так же как и фазовые траектории, будут прямыми линиями. Этот результат можно получить и непосредственно путем интегрирования системы

$$\frac{dx}{\xi_0}=\frac{dy}{\eta_0}=\frac{dz}{\zeta_0}=dt \qquad (\operatorname{rot}\mathbf{v}=\boldsymbol{\Omega}_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0))$$

в) Пусть $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathrm{const}$. Обозначая $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\boldsymbol{\Omega}_0$ ($\boldsymbol{\Omega}_0\neq0$), в силу (2.8) получаем

$$\lambda\boldsymbol{\Omega}_0=(\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\nabla)\mathbf{v} \qquad (\lambda=\operatorname{div}\mathbf{v}=a_{11}+a_{22}+a_{33}) \tag{5.3}$$

Это соотношение в силу уравнений системы (5.1) может быть приведено к виду

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\Omega}_0=0 \qquad \left(\boldsymbol{\Omega}_0=\begin{pmatrix}\xi_0\\\eta_0\\\zeta_0\end{pmatrix}\right) \tag{5.4}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}_0$ — трехмерный вектор-столбец, а $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Поскольку вектор $\boldsymbol{\Omega}_0$ отличен от нуля, условие (5.4) эквивалентно характеристическому уравнению $|A-\lambda E|=0$ матрицы A. Следовательно, $\lambda=\lambda_i$ ($i=1, 2, 3$), равные $\operatorname{div}\mathbf{v}$, будут являться характеристическими числами матрицы A. Заметим, что матрица A будет особенная в том случае, когда $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ ($\lambda=0$).

6. В качестве примера нелинейной системы рассмотрим автоколебательную систему, взаимодействующую с источником энергии, поддерживающим колебания (фигура). Уравнения движения запишем в следующей форме [3]:

$$x^{\cdot\cdot}+2nx^{\cdot}+k^2x=aT(v-x^{\cdot}), \qquad \varphi^{\cdot\cdot}+A\varphi^{\cdot}=BT(v-x^{\cdot}) \tag{6.1}$$

Здесь x — смещение колеблющейся массы m; φ — угол вращения ротора двигателя; $v=R\varphi^{\cdot}$ — скорость движения ленты в месте контакта; $T(v-x^{\cdot})$ — сила трения скольжения, зависящая от относительной скорости $v_r = v - x^{\cdot}$, а $k^2 = c / m$, n, a, A и B — постоянные величины. Введем следующие фазовые переменные; x, $y = v - x^{\cdot}$ и $z = \varphi^{\cdot}$. В результате система (6.1) будет иметь вид

$$x^{\cdot} = p = Rz - y, \qquad y^{\cdot} = q = k^2 x - 2ny + (2n - A)\ Rz + (BR - a)\ T(y) \tag{6.2}$$
$$z^{\cdot} = r = -Az + BT(y)$$

Относительно силы трения $T(y)$ каких-либо допущений делать не будем. Из физических соображений следует, что $T(y)$ должна быть функцией нечетной. В простейшем случае, когда $T(y)$ — линейная функция от y, система (6.2) становится линейной.

Для интегрирования системы (6.2) воспользуемся (3.3) и, делая упрощающее допущение, что $A + R = 0$, получим для x линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Опуская промежуточные вычисления, выпишем окончательный результат

$$x = h(y)\left(C_1 + \int \frac{Q(y)}{h(y)}\,dy\right) \qquad \left(h = \exp \int \frac{M\,dy}{y + BT(y)},\ Q = \frac{M_1 + M_2 y + M_3 T(y)}{y + BT(y)}\right) \tag{6.3}$$

Здесь C_1 — постоянная интегрирования, а

$$M = k^2 - 2nR + AR - A, \qquad M_1 = C\,(k^2 - M)$$
$$M_2 = M - k^2 - 2n, \qquad M_3 = BR - B - a$$

Пересечение цилиндрических поверхностей $F(x, y, C_1) = 0$ (6.3) с плоскостями $x + y + z = C$ дает систему линий, ортогональную фазовым траекториям исходной системы (6.2).

Определим приводящий множитель ω согласно (4.3). Так как дивергенция вектора скорости фазовой точки для сопряженной системы равна

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^* = D + BT'(y) \qquad (D = 1 + k^2 + R\,(1 + A - 2n)) \tag{6.4}$$

то в силу (4.3) получаем

$$\omega(y) = \exp\left(-\int \frac{D + BT'(y)}{y + BT(y)}\,dy\right) \tag{6.5}$$

Особенно простой вид эта функция принимает тогда, когда $D = 1$.

Это дает $\omega = 1 / (y + BT(y))$.

В заключение укажем, что полученные в этой работе результаты могут быть обобщены и распространены на n-мерные автономные системы.

Поступила 26 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu Ruey — wen, Fett G. H. Analogy of nonlinear systems to classical dynamics. J. Franklin Inst., 1961, vol. 272, No 4, pp. 299—312. (рус. пер.: Механика. Сб пер. и обзоров иностр. период. лит., 1962, № 4 (74)).
2. Беленький И. М. Приложение метода присоединенных полей к нелинейным системам. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
3. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Изд-во «Наука», 1964, стр. 171—174.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. ч. 1. Физматгиз, 1963, стр. 54.
5. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.—Л., ОГИЗ, 1941, стр. 38, 39.
6. Немыцкий В. В. Топологическая классификация особых точек и обобщенные функции Ляпунова. Дифференциальные уравнения. Минск. Изд-во «Наука и Техника», 1967, т. 3, № 3, стр. 366—369.
7. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Полн. собр. соч., т. I, Изд-во АН СССР, 1933, стр. 208, 209.