УСТАНОВИВШИЕСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ВОЗМУЩЕННЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ, В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОСТОЯННОГО ОТКЛОНЕНИЯ АРГУМЕНТА

Л. Д. Акуленко (Москва)

Описывается исследование условий существования установившихся периодических и вращательных движений в квазиконсервативной системе с одной степенью свободы. Дается формулировка достаточных условий существования единственного решения возмущенного уравнения, близкого к порождающему. Такого рода условия были ранее получены для более узких классов уравнений.

§ 1. Постановка задачи. Рассматриваются нелинейные системы, описываемые уравнением вида

$$x^{\cdot\cdot} + Q(x) = \varepsilon q(t, x, x^{\cdot}, x_\tau, x^{\cdot}_\tau; \varepsilon) \qquad (x_\tau = x(t-\tau),\ |\tau| < +\infty) \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in (-\infty, \infty)$ — независимая вещественная переменная, τ — постоянная. Наряду с основным или возмущенным будем рассматривать также «вырожденное» уравнение (1.1)

$$x_0^{\cdot\cdot} + Q(x_0) = 0 \tag{1.2}$$

у которого в дальнейшем предполагаются известными периодическое $x_0 = \varphi(\psi, \omega)$ или вращательное

$$x_0 = \psi + \varphi(\psi, \omega) \tag{1.3}$$

двухпараметрические семейства решений, в которых φ — периодическая периода $T_0 = 2\pi / \omega$ функция t; $\psi = \omega(t - t_0 + \theta)$; θ — произвольная фазовая постоянная; $\omega = \omega(E)$ — частота невозмущенного периодического или вращательного движения; E — первый интеграл невозмущенной системы [1-6].

Как известно, период невозмущенного движения зависит только от E и в случае колебаний равен

$$T_0(E) = 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]}} \qquad \left(U(x) = \int Q(x)\,dx\right)$$

Здесь $a_1(E)$ и $a_2(E)$ — простые вещественные корни уравнения

$$E - U(x) = 0 \quad (a_1 < a_2)$$

Будем считать, что имеет место этот простейший случай [2].

В случае вращений выражение для периода несколько проще

$$T_0(E) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]}}$$

где 2π — период функции Q по x. В [5] доказано, что решение уравнения (1.2) будет вращательным вида (1.3), если функция Q периодична по x с нулевым средним и $E > \max U$. При исследовании вращений в возмущенной системе естественно предположить, что функция q также периодична по x и x_τ с периодами, равными 2π или в целое число раз меньшими. Для случая колебаний этих предположений можно не делать. Далее, в обоих случаях предполагается периодичность с постоянным периодом Π и непрерывность функции q по явно входящему аргументу t. Требования гладкости функций Q и q по остальным аргументам будут установлены ниже.

Введем еще определение. Решение периода T возмущенного уравнения (1.1) относится к резонансному виду m / n, если справедливы равенства: $T = m\Pi = nT_0$. Заметим, что последнее соотношение будет определяющим для постоянной E.

Заметим, что ниже рассматриваются резонансные стационарные, т. е. установившиеся периодические или вращательные решения уравнения (1.1) для $t \in (-\infty, \infty)$.

Ниже рассматриваются достаточные условия, при выполнении которых эти движения в системе осуществляются. В аналогичной постановке периодические решения квазилинейных систем с отклоняющимся аргументом рассматривались многими авторами [7,8] (библиографию см. в [7]). Общие нелинейные системы с запаздыванием, зависящим от времени, в частном случае изолированного порождающего периодического решения рассматривались в [9].

Отметим, что уравнение (1.1) при помощи замены приводится к системе вида

$$dE / dt = \varepsilon f (t, E, E_\tau, \psi, \psi_\tau; \varepsilon), \quad d\psi / dt = \omega (E, E_\tau) + \varepsilon F (t, E, E_\tau, \psi, \psi_\tau; \varepsilon)$$

в которой функции f и F периодичны по вращающимся фазам ψ и ψ_τ с периодами 2π и по t с периодом П. Автономная система подобного типа с медленно изменяющимися параметрами в обычной постановке усреднялась на промежутке времени $\sim 1 / \varepsilon$ в [10].

§ 2. **Построение возмущенного решения.** Для этого будем использовать метод последовательных приближений [2]. Предполагая, что функция Q допускает вторую по x производную, а q — первые частные производные по $x, x^\cdot, x_\tau, x_\tau^\cdot, \varepsilon$ в некоторой окрестности x_0 и $x_0, x_0^\cdot, x_{\tau 0}, x_{\tau 0}^\cdot, 0$, соответственно, удовлетворяющие условиям Липшица с не зависящими от t постоянными, совершим замену $x = x_0 + \varepsilon y$, где y — неизвестная периодическая функция. Для y получим квазилинейное уравнение

$$y^{\cdot\cdot} + Q' (x_0)\, y = q (t, x_0, x_0^\cdot, x_{\tau,0}, x_{\tau,0}^\cdot; 0) + \varepsilon Y (t, y, y^\cdot, y_\tau, y_\tau^\cdot; \varepsilon) \tag{2.1}$$

в котором

$$Y (t, y, y^\cdot, y_\tau, y_\tau^\cdot; \varepsilon) = -\frac{1}{2} Q_0'' y^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0 y + \left(\frac{\partial q}{\partial x^\cdot}\right)_0 y^\cdot +$$
$$+ \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau}\right)_0 y_\tau + \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau^\cdot}\right)_0 y_\tau^\cdot + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0 + Y^* (t, y, y^\cdot, y_\tau, y_\tau^\cdot; \varepsilon)$$

причем $Y^* (t, y, y^\cdot, y_\tau, y_\tau^\cdot; 0) \equiv 0$. Для отыскания периодического решения уравнения (2.1) построим схему последовательных приближений по ε. Нулевое приближение для y определим как периодическое решение уравнения (2.1), при $\varepsilon = 0$:

$$y_0^{\cdot\cdot} + Q' (x_0)\, y_0 = q_0 (t, x_0, x_0^\cdot, x_{\tau 0}, x_{\tau 0}^\cdot)$$

Это уравнение является обыкновенным линейным неоднородным уравнением с периодическими коэффициентами и периодической правой частью. Задача его интегрирования не вызывает затруднений, так как известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения

$$y_{0,1} \equiv u = x_0^\cdot, \qquad y_{0,2} = ut + v \qquad \left(v = \omega \frac{\partial x_0 (\psi, \omega)}{\partial \omega}\right)$$

Здесь u и v — периодические функции. При помощи метода вариации постоянных интегрирования [2,3] получим

$$y_0 = D \left[u \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t_1} q_0 u \, dt_2 - v q_0 - \beta_0 \right) dt_1 + v \left(\int_{t_0}^{t} q_0 u \, dt_1 - \beta_0 \right) \right] + \alpha_0 u \equiv$$
$$\equiv L [t, q_0] + \alpha_0 u \equiv y_0^* + \alpha_0 u \qquad (D = 1 / \Delta (t) = 1 / (u^2 + u v^\cdot - v u^\cdot))$$

В этих выражениях $\Delta (t)$ — определитель Вронского, который постоянен на основании теоремы Лиувилля; α_0 и β_0 — постоянные интегрирования; L — линейный по q_0 оператор. Заметим, что функция y_0 будет периодической периода T при любом α_0, если вещественная постоянная θ удовлетворяет уравнению

$$P (\theta) = \int_0^T q_0 u \, dt = 0 \tag{2.2}$$

и если положить

$$\beta_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{t_0}^{t} q_0 u \, dt_1 - v q_0 \right) dt$$

Уравнение (2.2) является определяющим для фазовой постоянной θ.

Следующее приближение для y находим из уравнения

$$y_1^{\cdot\cdot} + Q_0' y_1 = q_0 + \varepsilon Y(t, y_0, \dot{y}_0, y_{\tau,0}, \dot{y}_{\tau,0}; 0)$$

Это уравнение, аналогично предыдущему, имеет решение вида

$$y_1 = y_0^* + \varepsilon L[t, Y_0] + \alpha_1 u$$

Условие периодичности y_1 при любом α_1 определяет при выполнении некоторых дополнительных требований неизвестную пока постоянную α_0. Прямым интегрированием можно показать с учетом соотношения

$$-\frac{1}{2}\int_0^T Q''(x_0) y_0^2 u\, dt = \int_0^T q_0 y_0^{\cdot}\, dt$$

что это уравнение линейно относительно α_0 и имеет вид

$$\alpha_0 \frac{\partial P}{\partial \theta^*} = -\int_0^T \left\{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0 y_0^* + \left(\frac{\partial q}{\partial x^{\cdot}}\right)_0 y_0^{\cdot *} + \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau}\right)_0 y_{\tau,0}^* + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau^{\cdot}}\right)_0 y_{\tau,0}^{\cdot *} + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0\right] u + q_0 y_0^{\cdot *}\right\} dt$$

Отсюда величина α_0 находится элементарно, конечно, если θ^* — простой вещественный корень уравнения (2.2).

Следующие приближения периодической функции y будем определять по общей схеме из уравнения ($i \geqslant 2$)

$$y_i^{\cdot\cdot} + Q_0' y_i = q_0 + \varepsilon Y(t, y_{i-1}, y_{i-1}^{\cdot}, y_{\tau, i-1}, y_{\tau, i-1}^{\cdot}; \varepsilon) \tag{2.3}$$

решение которого равно

$$y_i = y_0^* + \varepsilon L[t, Y_{i-1}] + \alpha_i u \tag{2.4}$$

Условие периодичности функции y_i определит, аналогично предыдущему, неизвестную постоянную α_{i-1}, т. е. $(i-1)$-е приближение по ε для всех $t \in (-\infty, \infty)$ при единственном условии, что эти последовательные приближения сходятся равномерно и принадлежат области определения функции Y. Заметим, что уравнения для определения α_k ($k \geqslant 1$) будут нелинейными вида

$$\alpha_k \frac{\partial P}{\partial \theta^*} + \int_0^T \left\{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0 y_k^* + \left(\frac{\partial q}{\partial x^{\cdot}}\right)_0 y_k^{\cdot *} + \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau}\right)_0 y_{\tau,k}^* + \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau^{\cdot}}\right)_0 y_{\tau,k}^{\cdot *} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0 + Y_k^*\right] u + q_0 y_k^{\cdot *} + \varepsilon (y_k^{\cdot *} + \alpha_k u^{\cdot}) Y_{k-1}\right\} dt = 0 \tag{2.5}$$

Так как соотношение (2.5) удовлетворяет всем требованиям теоремы существования неявной функции $\alpha_k(\varepsilon)$, то можно утверждать, что при $|\varepsilon|$ достаточно малом существует единственное решение $\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon)$ уравнения (2.5), причем $\alpha_k(0) = \alpha_0$. Его можно построить последовательными приближениями по схеме

$$\alpha_k^{(j)} = -\left(\frac{\partial P}{\partial \theta^*}\right)^{-1} \int_0^T \left\{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0 y_k^* + \left(\frac{\partial q}{\partial x^{\cdot}}\right)_0 y_k^{\cdot *} + \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau}\right)_0 y_{\tau,k}^* + \left(\frac{\partial q}{\partial x_\tau^{\cdot}}\right)_0 y_{\tau,k}^{\cdot *} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}\right)_0 + Y_k^{(j-1)*}\right] u + q_0 y_k^{\cdot *} + \varepsilon (y_k^{\cdot *} + \alpha_k^{(j-1)} u^{\cdot}) Y_{k-1}\right\} dt$$

$$(j = 1, 2, \ldots; \; \alpha_k^{(0)} = \alpha_0)$$

Из всего сказанного следует, что развитая схема позволяет однозначно определить любое формальное приближение по ε периодического решения уравнения (2.1) для всех $t \in (-\infty, \infty)$, что нетрудно доказать методом индукции. Переходим теперь к обоснованию схемы (2.3).

§ 3. Обоснование схемы последовательных приближений. Для этой цели оказывается возможным применить методику, развитую в [2,11].

Предварительно отметим основные свойства оператора L; L — линейный оператор удовлетворяющий в силу периодичности условию

$$\max |L\, [t,\ F]| < A \cdot B \quad (B > 0) \tag{3.1}$$

где $A = \max |F|$, а постоянная B ограничена и не зависит от выбора функции F; причем свойства гладкости функции по входящим в F аргументам не ослабляются.

Введем далее обозначения

$$\sigma_k = \sigma_k\,(t,\ \alpha,\ \varepsilon) = y_0{}^* + \varepsilon L\,[t,\ Y_{k-1}] + \alpha u$$

$$R_k = R_k\,(\alpha,\ \varepsilon) = \int\limits_0^T Y\,(t,\ \sigma_k,\ \sigma_k{}^{\cdot},\ \sigma_{\tau,\,k},\ \sigma_{\tau,\,k}{}^{\cdot};\ \varepsilon)\, u dt$$

при помощи которых уравнение для определения α_k можно записать в виде

$$R_k\,(\alpha_k,\ \varepsilon) = 0 \tag{3.2}$$

Покажем в первую очередь, что при достаточно малом ε функции $y_k,\ y_k{}^{\cdot},\ y_{\tau,k},\ y_{\tau,k}{}^{\cdot}$ для всех $t \in (-\infty,\ \infty)$ принадлежат некоторой ограниченной области G, если α_0 таково, что $y_0,\ y_0{}^{\cdot},\ y_{\tau,0},\ y_{\tau,0}{}^{\cdot}$ принадлежат указанной области. Для доказательства этого утверждения допустим, что оно справедливо для всех значений индекса вплоть до $(k-1)$, а затем покажем, что при достаточно малом значении ε, не зависящем от индекса, свойство ограниченности справедливо также для k. Из основного свойства (3.1) оператора L имеем $|L\ [t,\ Y_{k-1}]| < A \cdot B$, где $A = \max |Y|$ во всей области определения функции Y. Далее

$$\left.\frac{\partial R_k}{\partial \alpha}\right|_{\varepsilon=0,\ \alpha=\alpha_0} = \frac{\partial P}{\partial \theta^*} \neq 0$$

Но тогда, как нетрудно видеть из выражения

$$\frac{\partial R_k}{\partial \alpha} = \int\limits_0^T \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_k}\, u + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_k{}^{\cdot}}\, u^{\cdot} + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{\tau,\,k}}\, u_\tau + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{\tau,\,k}{}^{\cdot}}\, u_\tau{}^{\cdot} \right) u\, dt$$

следует, что существуют такие два не зависящих от индекса k положительных числа μ и η_1, что при

$$|\alpha - \alpha_0| < \mu \tag{3.3}$$

и $\varepsilon < \eta_1$ справедливо неравенство

$$|\,\partial R_k \,/\, \partial \alpha\,| > \gamma \tag{3.4}$$

где $\gamma > 0$ и не зависит от k. Будем предполагать при этом, что μ и η_1 настолько малы, что $(\sigma_k,\, \sigma_k{}^{\cdot},\, \sigma_{\tau,k,k},\, \sigma_{\tau,k}{}^{\cdot}) \in G$.

Потребуем теперь, чтобы при $\varepsilon < \eta_1$ корни $\alpha_k\ (\varepsilon)$ уравнения (3.2) лежали в области (3.3). Покажем, что действительно величину η_1 можно выбрать настолько малой, что выполняется неравенство

$$|\alpha_k\,(\varepsilon) - \alpha_0| < \mu \tag{3.5}$$

Пусть $C = \max |\,\partial R_k/\partial \varepsilon\,|$, причем можно предполагать, что величина C не зависит от индекса k во всей области существования этой производной. Допустим, что $\eta_1 < \gamma\mu/C$. Тогда неравенство (3.5) действительно будет выполняться. В самом деле, так как $\alpha_k\,(0) = \alpha_0$, то неравенство (3.5), в силу непрерывной зависимости, будет выполняться при достаточно малом ε. Пусть далее предположено противное, т. е. при некотором $\varepsilon = \varepsilon^*$ неравенство (3.5) перешло в равенство. Покажем, что это возможно при $\varepsilon^* > \eta_1$. Для этого предположим обратное, т. е. $\varepsilon^* \leqslant \eta_1$. Тогда можно написать

$$|\,\alpha_k\,(\varepsilon^*) - \alpha_0\,| = |\,\alpha_k\,(\varepsilon^*) - \alpha_k\,(0)\,| =$$

$$= \varepsilon^* \left| \frac{\partial \alpha_k\,(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varkappa_1\varepsilon^*} = \varepsilon^* \left| \frac{\partial R_k}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right|_{\alpha=\alpha_k(\varkappa_1\varepsilon^*),\ \varepsilon=\varkappa_1\varepsilon^*}$$

Здесь $\varkappa_1$ — правильная положительная дробь. Так как $\alpha_k(\varkappa_1\varepsilon^*)$ лежит в области (3.5), то на основании (3.4) получим неравенство

$$|\alpha_k(\varepsilon^*) - \alpha_0| < \varepsilon^* C / \gamma \leqslant \eta_1 C / \gamma < \mu$$

противоречащее предположению, что неравенство (3.5) перешло в равенство. В результате доказано, что при выполнении условия $\varepsilon < \eta_1$ и нужном выборе η_1 все приближения принадлежат области G. Докажем теперь равномерную сходимость последовательных приближений (2.4). Введем для этого следующие разности:

$$|\alpha_k(\varepsilon) - \alpha_{k-1}(\varepsilon)| < b_k; \quad |L[t, Y_{k-1}] - L[t, Y_{k-1}]| < a_k$$

$$|L^{\cdot}[t, Y_{k-1} - Y_{k-2}]| < v_k; \quad |L_\tau[t, Y_{k-1} - Y_{k-2}]| < a_k^\tau; \quad |L_\tau^{\cdot}[t, Y^-_{k-1} Y_{k-2}]| < v_k^\tau$$

где b_k, a_k, v_k, a_k^τ, v_k^τ — некоторые положительные постоянные, для которых можно установить не зависящие от k верхние пределы. Пусть c_k — наибольшее из чисел a_k, v_k, a_k^τ, v_k^τ. Так как функция Y в области G удовлетворяет условиям Липшица, то

$$|Y_k - Y_{k-1}| < 4\Omega(b_k\lambda + \varepsilon c_k)$$

где λ — максимум периодических функций $|u|, |u^{\cdot}|, |u_\tau|, |u_\tau^{\cdot}|$; Ω — постоянная Липшица. С учетом предыдущего неравенства находим

$$|L[t, Y_k - Y_{k-1}]| < c_{k+1}, \quad |L^{\cdot}[tY_k - Y_{k-1}]| < c_{k+1}, \quad |L_\tau[t, Y_k - Y_{k-1}]| < c_{k+1}$$

$$|L_\tau^{\cdot}[t, Y_k - Y_{k-1}]| < c_{k+1} \qquad (c_{k+1} = 4\Omega B(\lambda b_k + \varepsilon c_k))$$

Оценим теперь разность $\alpha_{k+1}(\varepsilon) - \alpha_k(\varepsilon)$. Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\Phi_k(\beta_k, \varepsilon, \delta) = 0 \tag{3.6}$$

Здесь

$$\Phi_k(\beta, \varepsilon, \delta) = \int_0^T (t, \xi_k, \xi_k^{\cdot}, \xi_{\tau,k}, \xi_{\tau,k}^{\cdot}; \varepsilon)\, u\, dt$$

$$\xi_k = y_0^* + \beta u + \varepsilon L[t, Y_{k-1}] + \delta L[t, Y_k - Y_{k-1}], \qquad \delta \in [0, \varepsilon]$$

Аналогично определяются функции $\xi_k^{\cdot}$, $\xi_{\tau,k}$, $\xi_{\tau,k}^{\cdot}$. Очевидно, величину η_2 $(\varepsilon < \eta_2)$ можно выбрать настолько малой, что $(\xi_k, \xi_k^{\cdot}, \xi_{\tau,k}, \xi_{\tau,k}^{\cdot}) \in G$, если

$$|\beta - \alpha_0| < \nu \tag{3.7}$$

где ν — достаточно малое положительное число. Тогда функцию Φ_k можно считать вполне определенной. Покажем, что при достаточно малом η_2 для любого k справедливо неравенство $|\beta_k - \alpha_0| < \nu$, где $\beta_k(\varepsilon, \delta)$ — корень уравнения (3.6). Действительно, имеем

$$|\beta_k(\varepsilon, \delta) - \alpha_0| < \mu + |\beta_k(\varepsilon, \delta) - \beta_k(\varepsilon, 0)|$$

Выбором достаточно малого η_1 величину μ можно сделать меньше ν, так что $\nu - \mu = \Delta > 0$. Покажем далее, что $|\beta_k(\varepsilon, \delta) - \beta_k(\varepsilon, 0)| < \Delta$, если η_2 достаточно мало. Полагая

$$\eta_2 < \omega\Delta / M \qquad (M = \max|\partial\Phi_k/\partial\delta|; \ 0 < \omega < \partial\Phi_k / \partial\beta)$$

где все величины не зависят от k, получим, аналогично предыдущему, требуемое утверждение. Переходим непосредственно к оценке разности $\alpha_{k+1}(\varepsilon) - \alpha_k(\varepsilon)$. Для этого заметим, что $\alpha_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon, \varepsilon)$ и $\alpha_k(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon, 0)$. В результате получим выражение

$$|\alpha_{k+1}(\varepsilon) - \alpha_k(\varepsilon)| = |\beta_k(\varepsilon, \varepsilon) - \beta_k(\varepsilon, 0)| = \varepsilon \left|\frac{\partial\beta_k(\varepsilon, \delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=\varkappa_2\varepsilon} = \varepsilon \left|\frac{\partial\Phi_k}{\partial\delta}\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial\beta}\right)^{-1}\right|$$

в котором $\beta = \beta_k(\varepsilon, \varkappa_2\varepsilon)$, $\delta = \varkappa_2\varepsilon$, $0 < \varkappa_2 < 1$. Оценим величину $\partial\Phi_k / \partial\delta$. Дифференцируя Φ_k, получим, что в области (3.7) и $\varepsilon < \eta_2$:

$$|\partial\Phi_k / \partial\delta| < 4T\lambda H c_{k+1} \equiv W c_{k+1}$$

где H — наибольший из верхних пределов функций $\partial Y / \partial y$, $\partial Y / \partial y^{\cdot}$, $\partial Y / \partial y_\tau$ и $\partial Y / \partial y_\tau^{\cdot}$ в области их существования. Собирая оценки, получим

$$|\alpha_{k+1}(\varepsilon) - \alpha_k(\varepsilon)| < b_{k+1} \qquad (b_{k+1} = \varepsilon W c_{k+1} / \omega)$$

Отсюда вытекает, что отношение $b_{k+1} / C_{k+1} = \varepsilon W / \omega$ и не зависит от k. Следовательно, можно считать, что величина b_k / c_k тоже не зависит от индекса k. Но тогда отношения b_{k+1} / b_k и c_{k+1} / c_k также не зависят от k, так как

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \varepsilon \frac{W}{\omega} \frac{c_{k+1}}{b_k} = 4\varepsilon\Omega B \frac{W}{\omega}\left(\lambda + \frac{c_k}{b_k}\varepsilon\right), \qquad \frac{c_{k+1}}{c_k} = 4\Omega B\left(\lambda \frac{b_k}{c_k} + \varepsilon\right)$$

Так как b_k / c_k пропорционально ε, то при достаточно малых значениях параметра отношения c_{k+1} / c_k и b_{k+1} / b_k будут меньше единицы, что гласит об абсолютной и равномерной сходимости $y_k(t, \varepsilon)$.

Покажем, наконец, что предел этой последовательности действительно является решением уравнения (2.1). Вследствие гладкости L и Y справедливо соотношение

$$\varepsilon L[t, Y] = \varepsilon \lim_{k\to\infty} L[t, Y_{k-1}] = \lim_{k\to\infty}(y_k - \alpha_k u - y_0^*) = y(t, \varepsilon) - \alpha(\varepsilon) u - y_0^*$$

дифференцируя которое в силу равномерной сходимости, получим, что $y(t, \varepsilon)$ является периодическим решением уравнения (2.1).

Таким образом, построено единственное резонансное вида m / n решение уравнения (1.1) с произвольным постоянным отклонением аргумента для случаев вращений и колебаний в виде

$$x = x(t, \varepsilon) = x_0(\psi, \omega) + \varepsilon y(t, \varepsilon) \tag{3.8}$$

где y — периодическая функция периода T. В результате доказано утверждение.

Теорема 3.1. Возмущенное уравнение (1.1) при достаточно малых значениях параметра ε допускает в области определения и гладкости функций Q и q единственное стационарное для всех $t \in (-\infty, \infty)$ (m / n) — резонансное колебательное или вращательное решение, обращающееся в порождающее $x_0(\psi, \omega)$ при $\varepsilon = 0$ и имеющее вид (3.8), если: 1) функции Q и q удовлетворяют перечисленным в § 1,2 условиям периодичности и гладкости; 2) уравнение (2.2) имеет вещественный корень θ^*; 3) справедливо неравенство $\omega'(E^*)\partial P / \partial\theta^* \neq 0$.

Замечание 3.1. Единственность решения понимается в том смысле, что каждому простому вещественному корню θ^*, соответствующему фиксированным значениям τ, m, n и параметра ε, отвечает одно решение указанного вида (3.8). Нетрудно видеть, что на отрезке длины T таких корней всегда четное число: 0, 2, 4, ...

Замечание 3.2. Пусть θ^* — кратный вещественный корень некоторой кратности r $(r < \infty)$, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial\theta^*} = \frac{\partial^2 P}{\partial\theta^{*2}} = \ldots = \frac{\partial^{r-1} P}{\partial\theta^{*r-1}} = 0, \qquad \frac{\partial^r P}{\partial\theta^{*r}} \neq 0$$

(предполагается, конечно, что функции Q и q достаточное число раз дифференцируемы). Тогда единственность решения в указанном выше смысле может нарушаться. Приближение к точному решению в этом случае проводится, вообще говоря, по дробным степеням ε. Очевидно, что изменением постоянной τ и некоторых других параметров системы можно добиться, чтобы $\partial P/\partial\theta^* \neq 0$. Этот случай, как указано в [2,3], является критическим и практически встречается редко. Отметим, что критические случаи для аналитического автономного квазилинейного уравнения без отклоняющегося аргумента исследованы в [12].

Замечание 3.3. Более распространенным на практике является другой особый случай, когда уравнение (2.2) удовлетворяется тождественно, т. е. независимо от θ для данного набора τ и m, n. Тогда говорят о движениях высших степеней. Колебания и вращения высших степеней в системах, описываемых обыкновенными уравнениями типа (1.1), исследовались в работах [3,13].

Замечание 3.4. Случай $\omega'(E^*) = 0$ требует дополнительного рассмотрения.

§ 4. **Пример.** Рассмотрим для иллюстрации развитого метода следующую конкретную вращательную систему, описываемую уравнением «типа маятника»:

$$x^{\cdot\cdot} + a^2 \sin x = \varepsilon\,[N \sin \nu t + b x^{\cdot}(t-\tau) - \beta x^{\cdot} - \alpha \operatorname{sgn} x^{\cdot}]\ (a^2, N, b, \beta, \alpha = \mathrm{const} > 0)$$

порождающее решение которого в случае вращений (если $E > 2a^2$) имеет вид

$$x_0 = 2\,\mathrm{am}\,[\sqrt{E/2}\,(t+\theta),\ a\sqrt{2/E}] = \psi + 4\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\,\frac{q^p}{1+q^{2p}}\sin p\psi$$

$$\left(\psi = \omega(E)(t+\theta), \qquad T_0(E) = 2\sqrt{2/E}\,K(a\sqrt{2/E}), \qquad q = \exp\frac{-\pi K'}{K}\right)$$

Здесь am — эллиптическая амплитуда, K — полный эллиптический интеграл первого рода, K' — его производная [14]. Ради простоты ограничимся главным резонансом $\omega(E) = \nu$. Условие фазового баланса после громоздкого интегрирования будет

$$P(\theta) = \frac{\pi}{\nu}\left[-\frac{Nq}{1+q^2}\sin\nu\theta + 16\nu\sum_{p=1}^{\infty}\frac{q^{2p}}{(1+q^{2p})^2}(b\cos p\nu\tau - \beta) + \right.$$

$$\left. + 2\nu(b-\beta) - 2\alpha\right] \equiv \frac{\pi}{\nu}\left(-\frac{Nq}{1+q^2}\sin\nu\theta + \gamma\right) = 0$$

и имеет простые вещественные корни на промежутке $[0, 2\pi/\nu]$: $\theta_1 = (1/\nu)\arcsin\delta$, $\theta_2 = \pi/\nu - \theta_1$ $(\delta = (\gamma/N)(q + 1/q))$ конечно, если $\delta < 1$. В случае $\gamma = Nq/(1+q^2)$ нетрудно установить, что $\partial P/\partial\theta^* = 0$. Если же $\delta > 1$, то основное резонансное вращение в окрестности $\varepsilon = 0$ осуществляться не может. Таким образом, если $\gamma < Nq/(1+q^2)$, то на основании теоремы существует основное резонансное решение возмущенного уравнения. Дальнейшие построения могут быть проведены при помощи формул § 2, что не представляет принципиальной трудности.

Поступил 29 III 1967

Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. наук, 1962, т. 17, № 6, стр. 3—126.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний М., Гостехиздат, 1956.
3. Кац А. М. Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. ПММ, 1955, т. 19, № 1, стр. 13—32.
4. Акуленко Л. Д., Волосов В. М. О резонансе во вращательной системе. Вестник. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1967, вып. 1, стр. 12—16.
5. Акуленко Л. Д. Построение вращательных решений для невозмущенных консервативных систем с одной степенью свободы по обратным степеням энергии. Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астрон., 1967, вып. 3, стр. 103—106.
6. Черноусько Ф. Л. О резонансе в существенно нелинейной системе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, стр. 131—144.
7. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Изд-во «Наука», 1964.
8. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием. ПММ, 1959, т. 23, № 5, стр. 836—844.
9. Красовский Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 2, стр. 252—255.
10. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. Применение метода усреднения к расчету некоторых систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астрон., 1965, вып. 4.
11. Акуленко Л. Д. К вопросу о стационарных колебаниях и вращениях. Укр. матем. ж., 1966, т. 18, № 5, стр. 7—18.
12. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по целым и дробным степеням параметра. Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1, стр. 367—380, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
13. Акуленко Л. Д., Волосов В. М. Резонансные вращения высших степеней. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ., 1967, вып. 2, стр. 10—14.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.