

О ПОСТРОЕНИИ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М. И. Фейгин (Горький)

В ряде задач, в том числе при исследовании устойчивости периодических движений сильно нелинейных динамических систем, возникает необходимость построения в пространстве параметров системы области, соответствующей расположению корней характеристического полинома внутри единичного круга. Зависимости между параметрами, которые включают границы области устойчивых решений, получают обычно из условий нарушения системы неравенств, определенным образом составленных из коэффициентов характеристического уравнения. При этом для уравнения степени n исследуются, вообще говоря, до $2n$ «претендентов» указанных границ [1-5].

В работах [6,7] предложен способ, предусматривающий построение всего лишь трех претендентов границ области устойчивости N_+ , N_- и N_φ , уравнения которых получают из характеристического полинома $\chi(z) = 0$ путем подстановки соответственно значений $z = +1$, $z = -1$ и $z = e^{i\varphi}$. При этом для построения N_φ требуется выделить действительную и мнимую части выражения $\chi(e^{i\varphi}) = 0$ и исследовать соответствующую границу устойчивости в параметрической форме ($0 \leq \varphi \leq \pi$). Это для $n \geq 3$ представляется затруднительным [8-11]. В полученном в работе [12] соотношении между коэффициентами $\chi(z)$, включающими границу N_φ , не сохранены преимущества параметрической формы задания: условия отделения паразитной части и правило штриховки.

Ниже получено уравнение N_φ в форме явной зависимости между коэффициентами характеристического полинома с сохранением указанных преимуществ. Рассмотрена также структура пространства параметров в окрестности некоторых особых конфигураций, уравнения которых легче поддаются исследованию, чем уравнения N -поверхностей. Это дает возможность упростить построение области устойчивости и выяснить в ряде случаев качественную картину зависимости устойчивости от параметров.

§ 1. Пусть при некоторых значениях действительных коэффициентов характеристическое уравнение

$$\chi(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (1.1)$$

имеет два сопряженных корня, расположенных на окружности единичного радиуса. В этом случае уравнение (1.1) должно иметь множителем произведение

$$(z - e^{i\varphi})(z - e^{-i\varphi}) = z^2 + pz + 1$$

в котором действительный параметр $p \in (-2, +2)$. Следовательно, значения коэффициентов a_k удовлетворяют уравнению N_φ , если выполняется равенство

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = (z^2 + pz + 1)(b_2 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} z + b_n) \quad (1.2)$$

Приравнявая в (1.2) члены с одинаковыми степенями z и исключая из системы уравнений последовательно b_n, \dots, b_2 , приходим к параметрическим уравнениям N_φ :

$$\begin{aligned} F_0(p) &= a_1 + a_2 f_1(p) + a_3 f_2(p) + \dots + a_n f_{n-1}(p) = 0 \\ \Phi_0(p) &= a_0 + a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p) + \dots + a_n f_n(p) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Через $f_k(p)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) обозначены полиномы степени k относительно p :

$$f_1 = -p, \quad f_2 = -1 - pf_1, \quad f_3 = -f_1 - pf_2, \quad \dots, \quad f_n = -f_{n-2} - pf_{n-1} \quad (1.4)$$

В случае двух корней $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$, наряду с (1.3), должны выполняться также равенства, получаемые из (1.3) заменой коэффициентов $a_0 \rightarrow a_n, \dots, a_k \rightarrow a_{n-k}, \dots, a_n \rightarrow a_0$

$$F_0^*(p) = a_{n-1} + a_{n-2} f_1(p) + \dots + a_0 f_{n-1}(p) = 0 \quad (1.5)$$

$$\Phi_0^*(p) = a_n + a_{n-1} f_1(p) + \dots + a_0 f_n(p) = 0$$

Для получения уравнения N_φ в виде явной зависимости между коэффициентами a_k будем последовательно исключать p путем редуцирования уравнений (1.3), (1.5) при помощи преобразований

$$\begin{aligned} \Phi_{j+1} &= a_0^{(j)} \Phi_j - a_{n-j}^{(j)} \Phi_j^*, & F_{j+1} &= a_0^{(j)} F_j - a_{n-j}^{(j)} F_j^* \\ \Phi_{j+1}^* &= a_0^{(j)} F_j^* - a_{n-j}^{(j)} \Phi_j, & F_{j+1}^* &= a_0^{(j)} \Phi_j^* - a_{n-j}^{(j)} \Phi_j \end{aligned} \quad (a_k^{(0)} = a_k) \quad (1.6)$$

После каждого преобразования (1.6) системы (1.3), (1.5) будут содержать полиномы $f_k(p)$ на единицу меньшей степени. При этом коэффициенты $a_k^{(j)}$ в точности совпадают с соответствующими коэффициентами, получаемыми при построении неравенств Шура [13, 14]. После $n - 2$ редуций (1.6) придем к уравнениям

$$\begin{aligned} a_1^{(n-2)} - p a_2^{(n-2)} &= 0, & a_0^{(n-2)} - p a_1^{(n-2)} + (p^2 - 1) a_2^{(n-2)} &= 0 \\ a_1^{(n-2)} - p a_0^{(n-2)} &= 0, & a_2^{(n-2)} - p a_1^{(n-2)} + (p^2 - 1) a_0^{(n-2)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Исключая p из (1.7), получаем уравнение N_φ :

$$a_2^{(n-2)} - a_0^{(n-2)} = 0, \quad |a_1^{(n-2)} / a_0^{(n-2)}| \leq 2 \quad (1.8)$$

Дополнительное неравенство $|p| \leq 2$ отделяет на поверхности $a_2^{(n-2)} = a_0^{(n-2)}$ часть, являющуюся границей N_φ , от так называемой паразитной части, соответствующей корням $z_1 z_2 = 1$, которые не расположены на единичной окружности.

Согласно правилу Шура необходимые и достаточные условия расположения всех корней полинома (1.1) внутри единичного круга состоят в выполнении неравенств

$$\left| \frac{a_n}{a_0} \right| < 1, \quad \left| \frac{a_{n-1}^{(1)}}{a_0^{(1)}} \right| < 1, \dots, \left| \frac{a_2^{(n-2)}}{a_0^{(n-2)}} \right| < 1, \quad \left| \frac{a_1^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}} \right| < 1$$

Следовательно, при построении границ области устойчивости достаточно рассмотреть нарушение предпоследнего условия неравенства Шура, когда $a_2^{n-2} / a_0^{n-2} = +1$, что соответствует появлению пары комплексно-сопряженных корней $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$, и две зависимости $\chi(+1) = 0$ и $\chi(-1) = 0$, соответствующие появлению корней $z = +1$ и $z = -1$.

Очевидно, что область устойчивости может быть расположена лишь по ту сторону N_φ , для которой строго выполняется предпоследнее неравенство Шура $a_2^{n-2} / a_0^{n-2} < 1$.

Указанное неравенство определяет правило штриховки.

Отметим, что при получении характеристического уравнения в форме определителя предпоследнее неравенство Шура можно получить без приведения уравнения к полиномиальному виду по формулам, приведенным в работе [14].

Напишем, например, уравнения поверхностей N_+ , N_- и N_φ для характеристического полинома (1.1) третьей степени

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0, & -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ a_3(a_3 - a_1) - a_0(a_0 - a_2) &= 0, & |(a_2 - a_0) / a_3| &\leq 2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Сторона N_φ , соответствующая переходу корней $e^{\pm i\varphi}$ внутрь единичного круга, определяется неравенством

$$\frac{a_0 a_2 - a_1 a_3}{a_0^2 - a_3^2} < 1 \quad (1.10)$$

Уравнения N_+ , N_- и N_φ для полинома четвертой степени

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 &= 0 \\ (a_0 - a_4)^2 (a_0 + a_4 - a_2) - (a_1 - a_3)(a_4 a_1 - a_0 a_3) &= 0, & |(a_3 - a_1) / (a_4 - a_0)| &\leq 2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Сторона N_φ , соответствующая переходу корней $e^{\pm i\varphi}$ внутрь единичного круга, определяется неравенством

$$\frac{a_2(a_0^2 - a_4^2)(a_0 - a_4) - (a_0a_1 - a_3a_4)(a_0a_3 - a_1a_4)}{(a_2^2 - a_4^2)^2 - (a_0a_3 - a_1a_4)^2} < 1 \quad (1.12)$$

§ 2. Гиперповерхностями N_+ , N_- , N_φ пространство параметров динамической системы разделяется на области D_k , где индекс k означает число корней характеристического полинома внутри единичного круга. Общий способ решения задачи D -разбиения по отношению к единичному кругу изложен в работах [6,7]. Для построения только области устойчивости D_n нет необходимости строить те части N -поверхностей, которые не являются ее границами. В ряде случаев определению местоположения области устойчивости и выяснению качественной картины зависимости устойчивости от параметров существенно помогает знание структуры пространства параметров в окрестности кратных конфигураций, уравнения которых обычно легче поддаются исследованию, чем уравнения N -поверхностей.

Будем называть точки пространства параметров динамической системы параметрическими точками. Под s -кратной параметрической точкой будем понимать точку, граничную к областям D_k, \dots, D_{k+s} , наибольшая разность значений индексов у которых равняется s . Построение области устойчивости целесообразно начинать с нахождения кратных точек и выяснения значения в них остальных $n - s$ корней $\chi(z) = 0$. Если эти корни лежат внутри единичного круга или $s = n$, область устойчивости расположена в окрестности s -кратной точки. Необходимо отметить, что при рассмотрении D_k в пространстве параметров динамической системы значение s существенно зависит от конкретного выбора изменяющихся параметров и характера зависимости от них коэффициентов полинома. Очевидно, что надлежащим выбором одного изменяемого параметра (при переходе от рассмотрения многомерного пространства параметров к рассмотрению одномерного пространства) s -кратную параметрическую точку можно сделать нулькратной. Поэтому рассмотрение кратных s -конфигураций необходимо связывать с определенной размерностью пространства параметров.

Сформулируем далее (опуская доказательства) характеристики некоторых кратных точек пространства параметров динамических систем μ, λ, ν, \dots . Будем при этом полагать функцию $\chi(z, \mu, \lambda, \dots)$ непрерывной и необходимое число раз дифференцируемой по z и параметрам μ, λ, \dots

1°. Параметрическая точка поверхности N_+ или N_- однократна в одномерном пространстве μ , если в этой точке

$$\chi_z' \neq 0, \quad \chi_\mu' \neq 0 \quad (2.1)$$

Изменение параметра μ , соответствующее переходу из области D_k в область D_{k+1} , удовлетворяет условию

$$(\chi_z' \chi_\mu' z)_{z=\pm 1} d\mu > 0 \quad (2.2)$$

2°. Параметрическая точка поверхности N_φ двукратна в одномерном пространстве μ , если в этой точке

$$\chi_{|z|}' \neq 0, \quad \chi_\mu' \neq 0 \quad (2.3)$$

Изменение параметра μ , соответствующее переходу из области D_k в область D_{k+1} , удовлетворяет неравенству

$$(\chi_{|z|}' \chi_\mu')_{|z|=1} d\mu > 0 \quad (2.4)$$

Отметим, что вычисления производной $\chi_{|z|}'$ можно избежать, определяя сторону N_φ , соответствующую D_{k+2} , по правилу штриховки $a_2^{(n-2)} / a_0^{(n-2)} < 1$ либо из рассмотрения $\chi(z)$ в окрестности кратной точки при специальном выборе изменяющегося параметра μ (см. пример 2).

3°. Параметрическая точка, принадлежащая пересечению поверхностей N_+ и N_- , двукратна в плоскости μ, λ , если в этой точке

$$(\chi_z')_{+1} \neq 0, \quad (\chi_z')_{-1} \neq 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} (\chi_\mu')_{+1} & (\chi_\lambda')_{+1} \\ (\chi_\mu')_{-1} & (\chi_\lambda')_{-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.5)$$

Изменение параметров, соответствующее переходу в область с большим числом корней внутри единичного круга, удовлетворяет условию

$$\delta (\chi_\lambda')_{+1} (\chi_z')_{-1} d\mu > 0 \quad \text{при } \lambda = \text{const}, \quad (\chi_\lambda')_{+1} \neq 0 \quad (2.6)$$

4°. Параметрическая точка поверхности N_+ или N_- двукратна в плоскости параметров μ, λ , если в этой точке

$$\chi_z' = 0, \quad \chi_{zz}'' \neq 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \chi_\mu' & \chi_\lambda' \\ \chi_{z\mu}'' & \chi_{z\lambda}'' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.7)$$

В указанных точках поверхности N_+ или N_- «начинается» поверхность N_φ . Переходу из этих точек в область с наибольшим числом корней внутри единичного круга соответствует выполнение условия

$$(z \Delta \chi_\lambda' \chi_{zz}'')_{\pm 1} d\mu < 0 \quad \text{при } \lambda = \text{const}, \quad \chi_\lambda' \neq 0 \quad (2.8)$$

5°. Параметрическая точка пересечения поверхностей N_+ и N_φ (или N_- и N_φ) трехкратна в плоскости $\mu\lambda$, если в этой точке корни $z = e^{\pm i\varphi}$ и $z = 1$ (или $z = -1$) простые и пересекающиеся поверхности не касаются плоскости параметров и между собой.

В данном и следующем случаях аналитические условия определения знака изменения параметров, которое приводило бы в область с наибольшим числом корней внутри единичного круга, не приводятся из-за трудности их практического применения. В этих случаях оказывается целесообразнее непосредственное рассмотрение $\chi(z)$ на N -поверхностях или их пересечениях.

6°. Точка поверхности N_+ или N_- трехкратна в пространстве параметров μ, λ, ν , если в этой точке

$$\chi_z' = 0, \quad \chi_{zz}'' = 0, \quad \chi_{zzz}''' \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \chi_\mu' & \chi_\lambda' \\ \chi_{z\mu}'' & \chi_{z\lambda}'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_\lambda' & \chi_\nu' \\ \chi_{z\lambda}'' & \chi_{z\nu}'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_\nu' & \chi_\mu' \\ \chi_{z\nu}'' & \chi_{z\mu}'' \end{vmatrix}^2 \neq 0 \quad (2.9)$$

§ 3. Пример 3.1. Построим область устойчивости D_3 в пространстве коэффициентов μ, λ, ν характеристического полинома третьей степени¹

$$\chi(z, \mu, \lambda, \nu) = z^3 + \mu z^2 + \lambda z + \nu = 0 \quad (3.1)$$

Уравнения поверхностей N_+ , N_- и N_φ записываются в соответствии с (1.9) в виде

$$1 + \mu + \lambda + \nu = 0, \quad -1 + \mu - \lambda + \nu = 0 \quad (3.2)$$

$$f = \nu(\nu - \mu) + \lambda - 1 = 0, \quad |\mu - \nu| \leq 2$$

Так как один из определителей (2.9)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \chi_\mu' & \chi_\nu' \\ \chi_{z\mu}'' & \chi_{z\nu}'' \end{vmatrix} = -2z$$

отличен от нуля, область устойчивости D_3 расположена в окрестности трехкратных точек поверхностей N_+ и N_- , соответствующих тройному корню $z = 1$ и $z = -1$. Координаты этих точек находятся из уравнений $\chi = 0, \chi_z' = 0, \chi_{zz}'' = 0$. Они равны для N_+ $\mu = -3, \lambda = 3, \nu = -1$ (точка M_1) и для N_- $\mu = 3, \lambda = 3, \nu = 1$ (точка M_2).

¹ Построение D_3 с использованием критерия Гурвица имеется в работе [1].

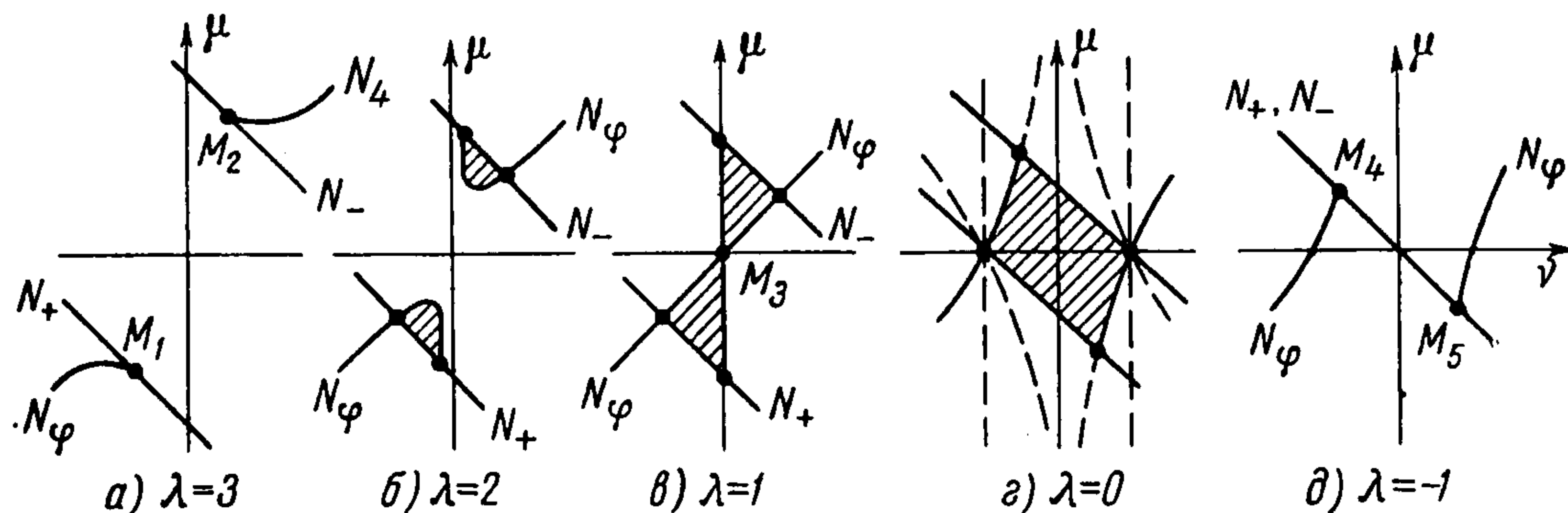
Изменение параметра $\lambda = 3 \mp d\lambda$ в окрестности найденных точек, которое приводит в D_3 , можно определить по изменению третьего корня вдоль линий $\chi = 0, \chi'_z = 0$, соответствующих двойному корню $z = 1$ и $z = -1$. Уравнения указанных линий

$$\mu = -\frac{\lambda + 3}{2}, \quad \nu = \frac{1 - \lambda}{2} (\Gamma_+), \quad \mu = \frac{\lambda + 3}{2}, \quad \nu = \frac{\lambda - 1}{2} (\Gamma_-)$$

Характеристический полином (3.1) на них записывается в виде

$$(z - 1)^2 \left(z - \frac{\lambda - 1}{2} \right) = 0, \quad (z + 1)^2 \left(z + \frac{\lambda - 1}{2} \right) = 0$$

Отсюда следует, что области D_3 соответствует $d\lambda < 0$.



Знак изменения параметра μ , соответствующий попаданию в D_3 , найдем из условия (2.8), рассматривая окрестность точек Γ_+ и Γ_- при $\lambda = 3 \mp d\lambda$ и $\nu = \text{const}$, так как $\chi'_v = 1 \neq 0$. В окрестности точки Γ_+ $\mu = -3 - 1/2 d\lambda$ условие (2.8)

$$(\Delta z \chi'_v \chi''_{zz}) d\mu = -2z^2 (6z \mp 2\mu) d\mu < 0$$

выполняется при $d\mu > 0$. В окрестности точки Γ_- $\mu = 3 \mp 1/2 d\lambda$ — при $d\mu < 0$. Таким образом, область D_3 расположена в окрестности точки M_1 при $d\mu > 0, d\lambda < 0$, а в окрестности точки M_2 — при $d\mu < 0, d\lambda < 0$ (фиг. 1, а, б).

С уменьшением параметра λ область плоского сечения D_3 становится односвязной при появлении двойной точки узлового типа границы N_φ (3.2) (фиг. 1 в). Координаты двойной точки M_3 находим из уравнений $f = 0, f'_\mu = 0, f'_\nu = 0$. Они равны: $\mu = 0, \lambda = 1, \nu = 0$. При дальнейшем уменьшении λ плоское сечение области устойчивости сжимается и исчезает в трехкратных точках пересечения трех поверхностей N_+, N_-, N_φ : $M_4\{\mu = 1, \lambda = -1, \nu = -1\}, M_5\{\mu = -1, \lambda = -1, \nu = 1\}$, т. е. в сечении $\lambda = -1$ (фиг. 1, г, д).

Участки N_+, N_-, N_φ , не являющиеся границами D_3 , приведены на фиг. 1 для лучшей иллюстрации качественной картины зависимости области устойчивости от параметров. На фиг. 1, г также изображены пунктирными линиями зависимости между параметрами μ и ν , получаемые при построении области устойчивости из условий нарушения неравенств Шура. Некоторые из этих линий имеют единственную точку, принадлежащую границе D_3 .

Пример 3.2. При исследовании устойчивости движений ударного демпфера [8] для симметричного режима с двумя ударами за период в случае резонансной частоты получено следующее характеристическое уравнение

$$z^4 \mp (h - 2g) z^3 \mp (2R - 2h \mp g^2) z^2 \mp (h - 2Rg) z \mp R^2 = 0$$

$$h = \frac{2\mu(1+R)^2}{(1+\mu)^2} \left(1 - d + \frac{\pi^2}{8\mu} \right), \quad g = \frac{(1+R)(1-\mu)}{1+\mu} \quad (3.3)$$

Здесь R — коэффициент восстановления скорости при ударе ($0 < R < 1$), μ — относительная масса демпфера ($\mu > 0$), d — относительный зазор между ударяющимися массами ($d > 0$).

В соответствии с (1.11) запишем уравнения N -поверхностей в пространстве параметров μ , R , d :

$$\begin{aligned} \text{уравнение } N_+ & & \mu = 0 & (3.4) \\ \text{уравнение } N_- & & & \end{aligned}$$

$$d = 1 + \frac{\pi^2}{8\mu} - \frac{1}{2\mu} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \text{уравнения } N_\phi & & R = 1 & (3.6) \end{aligned}$$

$$d = 1 + \frac{\pi^2}{8\mu} + \frac{1+\mu}{2\mu} \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^2, \quad \left| \frac{1-\mu}{1+\mu} \right| < 1 \quad (3.7)$$

Для определения местоположения области устойчивости D_4 в пространстве параметров рассмотрим окрестность пересечения двукратных поверхностей N_ϕ (3.6) и (3.7)

$$R = 1, \quad d = 1 + \pi^2 / 8\mu \quad (3.8)$$

и выясним поведение (3.3) вдоль некоторой параметрической траектории $\mu = \text{const}$, $d = \text{const}$, проходящей через линию (3.8). Так как качественная картина расположения областей D_k в окрестности (3.8) не зависит от μ в интервале $0 < \mu < \infty$, возьмем для простоты $\mu = 1$, $d = 1 + 1/8 \pi$. Тогда уравнение (3.3) записывается в виде

$$(z^2 + R)^2 = 0$$

Следовательно, в области D_4 расположен участок

$$\mu = 1, \quad d = 1 + 1/8\pi^2, \quad R < 1$$

выбранной параметрической траектории, а вся область устойчивости выделяется в пространстве параметров следующими неравенствами

$$0 \leq R < 1, \quad \mu > 0, \quad -\frac{1}{2\mu} < d - 1 - \frac{\pi^2}{8\mu} < \frac{1+\mu}{2\mu} \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^2$$

Поступила 5 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Иконников Е. А., Баутин Н. Н. Об исследовании корней алгебраических уравнений геометрическим методом. Тр. Горьковск. ин-та инж. водного тр-та, 1936, т. 3.
2. Ольденбург Р., Сартorius Г. Динамика автоматического регулирования М.—Л., Госэнергоиздат, 1949.
3. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями. М., «Наука», 1964.
4. Kuphal K. Uber die Beeinflussung von Schwingungen durch einen Stoßkörper. Z. angew. Math. und Mech., 1965, Bd. 45, Heft 2/3.
5. Masri S. F., Caughey T. K. On the Stability of the Impact Damper. Trans. of the ASME, ser. E, J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3.
6. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л., ЛКВВИА, 1949.
7. Неймарк Ю. И. О периодических движениях релейных систем. Сборник памяти А. А. Андропова. М., Изд-во АН СССР, 1955.
8. Фейгин М. И. К теории нелинейных демпферов (ударный демпфер и демпфер сухого трения). Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1959, т. 2, № 4.
9. Фейгин М. И. К теории ударного демпфера. Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1961, т. 4, № 3.
10. Горохов В. А. О влиянии массы колеблющегося грунта на процесс вибрационного погружения. Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1962, т. 5, № 6.
11. Беспалова Л. В., Метрикин В. С. К теории двухмассовой модели виброударника. Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1966, т. 9, № 2.
12. Бромберг П. В. Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. Оборонгиз, М., 1953
13. Schur I. Uber Potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. J. reine und angew. Math., 1918, Bd. 148.
14. Аржаных И. С. О новых неравенствах устойчивости. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 4.