гут порождать возмущения расхода, оказывают на течение слабо сжимаемой жидкости дестабилизирующее действие, приводящее при больших числах Рейнольдса к неустойчивости. Течения же с постоянным расходом остаются устойчивыми.

Поступила 4 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М. Изд-во иностр. лит. 1958.
2. Grone D. Uber das spektrum bei eigenschwingungen ebener Laminarstromungen. ZAMM, b. 35, s. 344.
3. Куликовский А. Г. Об устойчивости течения Пуазейля и некоторых других плоскопараллельных течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
4. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
5. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. Об абсолютной устойчивости некоторых плоскопараллельных течений при больших числах Рейнольдса. ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 10.

К УСТОЙЧИВОСТИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

В. Г. Веретенников

(Москва)

Г. В. Каменковым [1] доказана теорема о том, что при исследовании устойчивости периодических движений в критических несущественно особенных случаях всегда можно перейти к исследованию устойчивости установившегося движения в критическом случае кратного нулевого корня.

Этот результат распространяется на почти-периодические движения. Предполагается, что линейная система приводима и что почти-периодические коэффициенты правых частей дифференциальных уравнений возмущенного движения представимы конечными рядами Фурье с произвольным спектром частот.

Обобщаются результаты работы [2], где доказывается возможность сведения задачи устойчивости почти-периодических движений к исследованию устойчивости установившегося движения лишь в нерезонансных случаях.

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$x_i^{\bullet}=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}x_j+X_i(x_1,\ldots,x_m;\ t),\quad X_i(x_1,\ldots,x_m;\ t)=\sum_{l\geqslant 2}^{\infty} X_i^{(l)}(x_1,\ldots,x_m;\ t)$$
$$(i=1,\ldots,m) \qquad (1.1)$$

Здесь p_{ij} — постоянные коэффициенты, X_i — голоморфные функции $x_1,\ldots, x_m$ с почти-периодическими коэффициентами, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_m = 0$. Будем предполагать, что почти-периодические коэффициенты представимы конечными рядами Фурье с произвольным спектром частот.

К виду (1.1), как известно, может быть приведена любая система, нелинейные члены которой имеют структуру X_i, а при линейных членах коэффициенты являются периодическими функциями одного и того же периода. Известны также различные случаи приводимости к виду (1.1) систем, линейные члены которых имеют почти-периодические коэффициенты.

Предположим, что характеристическое уравнение системы (1.1) имеет k корней с отрицательными вещественными частями и n корней с вещественными частями, равными нулю, среди которых p нулевых и q пар чисто мнимых корней. Как показано в работе [2], исследование системы (1.1) в случаях несущественно особенных приводится к исследованию укороченной системы

$$
\begin{gathered}
y_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n} g_{sk}y_k+Y_s(y_1,\ldots,y_n;\,t)\\
Y_s(y_1,\ldots,y_n;\,t)=\sum_{l\geqslant 2}^{N} Y_s^{(l)}(y_1,\ldots,y_n;\,t)\qquad (s=1,\ldots,n)
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

в которой g_{sk} — постоянные, Y_s имеют ту же структуру, что и X_i.

Уравнение $|g_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$ имеет p нулевых и q пар чисто мнимых корней.

На чисто мнимые корни не налагается никаких ограничений, т. е. среди них могут быть как простые, так и кратные, которым соответствует произвольное число групп решений. Покажем как при помощи подстановки, введенной в [1], подсистему с чисто мнимыми корнями в системе (1.2) можно преобразовать в новую с кратным нулевым корнем.

Предположим вначале, что характеристическое уравнение $|g_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$ имеет лишь одну пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$ кратности r, которой соответствует одна группа решений. Линейной подстановкой с постоянными коэффициентами преобразуем систему (1.2) к виду (1.3)

$$
z_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n-2r} a_{sk}z_k+Z_s(z_i,\xi_\nu,\eta_\nu,t),\qquad
\begin{gathered}
\xi_j^{\cdot}=-\lambda\eta_j+\sigma_{j-1}\xi_{j-1}+\Xi_j(z_i,\xi_\nu,\eta_\nu,t)\\
\eta_j^{\cdot}=\lambda\xi_j+\sigma_{j-1}\eta_{j-1}+H_j(z_i,\xi_\nu,\eta_\nu,t)
\end{gathered}
$$

$$(s,\,i=1,\ldots,n-2r;\quad j,\,\nu=1,\ldots,r;\quad \sigma_0=0)$$

Уравнение $|a_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$ имеет нулевой корень кратности $(n-2r)$. Все σ_{j-1} можно считать равными любому числу, так как заменой

$$\xi_2=\alpha_2x_2,\ \eta_2=\alpha_2y_2,\ldots,\ \xi_r=\alpha_rx_r,\ \eta_r=\alpha_ry_r$$

и выбором $\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ можно менять значения $\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1}$. Сохранив прежние обозначения переменных, будем считать все σ_{j-1} равными λ.

Введем замену (1.4)

$$
\begin{gathered}
\xi_1=x_1\cos\lambda t+y_1\sin\lambda t,\quad \xi_j=x_j\cos\lambda t+y_j\sin\lambda t+x_{j-1}\cos\lambda t+y_{j-1}\sin\lambda t\\
\eta_1=x_1\sin\lambda t-y_1\cos\lambda t,\qquad \eta_j=x_j\sin\lambda t-y_j\cos\lambda t+x_{j-1}\sin\lambda t-y_{j-1}\cos\lambda t\\
(j=2,\ldots,r)
\end{gathered}
$$

получим

$$
\begin{gathered}
z_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n-2r} a_{sk}z_k+Z_{s1}(z_i,x_\nu,y_\nu,t)\\
x_1^{\cdot}=X_1(z_i,x_\nu,y_\nu,t),\qquad x_j^{\cdot}=\lambda x_{j-1}+X_j(z_i,x_\nu,y_\nu,t)\\
y_1^{\cdot}=Y_1(z_i,x_\nu,y_\nu,t),\qquad y_j^{\cdot}=\lambda y_{j-1}+Y_j(z_i,x_\nu,y_\nu,t)\\
(s,\,i=1,\ldots,n-2r;\quad j=2,\ldots,r;\quad \nu=1,\ldots,r)
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Нетрудно видеть, что в системе (1.5) функции Z_{s1}, X_j, Y_j будут иметь структуру X_i. Характеристическое уравнение подсистемы с переменными x_j и y_j имеет нулевой корень кратности $2r$ с двумя группами решений. Если бы кратному корню $\pm i\lambda$ соответствовало k групп решений ($k\leqslant r$), то преобразование по формулам (1.4) для каждой группы проводилось бы аналогично вышеизложенному. В преобразованной системе дополнительному нулевому корню кратности $2r$ соответствовало бы в этом случае $2k$ групп решений.

В общем случае нескольких пар чисто мнимых корней аналогичные преобразования можно провести для каждой пары простых или кратных чисто мнимых корней. В результате преобразований придем к системе того же n-го порядка, что и система (1.2), характеристическое уравнение которой имеет n-кратный нулевой корень, число соответствующих которому групп решений определяется характером чисто мнимых корней и числом групп решений для нулевого кратного корня системы (1.2). Эту систему можно представить в виде

$$y_s^{\cdot} = \varkappa_{s-1} y_{s-1} + Y_s(y_1, \ldots, y_n; t) \qquad (s = 1, \ldots, n;\ \varkappa_0 = 0)$$

$$Y_s = \sum_{l\geqslant 2}^{N} Y_s^{(l)}(y_1, \ldots, y_n; t), \qquad Y_s^{(l)} = \sum A_s^*(t)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} \tag{1.6}$$

Здесь некоторые или все $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ могут быть равны нулю. Знак * заменяет индекс $(k_1, \ldots, k_n)$; коэффициенты $A_s^*(t)$-почти-периодические функции t, которые можно представить конечными рядами Фурье с произвольным спектром частот. Для любой такой функции $f(t)$:

$$\int f(t)\,dt = gt + \varphi(t), \qquad g = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(t)\,dt$$

Здесь функция $\varphi(t)$-почти-периодическая такого же вида [3], что и $f(t)$.

§ 2. Докажем теперь, что любая система вида (1.6) может быть преобразована в новую, для которой коэффициенты при нелинейных членах до сколь угодно высокого конечного порядка N включительно будут постоянны. Таким образом, задача об устойчивости почти-периодических движений в случаях несущественно особенных будет сведена к эквивалентной задаче об устойчивости установившегося движения.

Предположим, что в системе (1.6) коэффициенты форм $Y_s^{(l)}$ $(l \leqslant k-1)$ постоянны, а коэффициенты форм $Y_s^{(k)}$ будут почти-периодическими функциями времени.

Введем замену вида

$$y_s = x_s + \sum u_s^*(t)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} \qquad (k_1 + \ldots + k_n = k;\ s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Здесь $u_s^*(t)$ — почти-периодические функции той же структуры, что и $A_s^*(t)$ Из (2.1) легко получить

$$y_s = x_s + \sum v_s^*(t)\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \qquad (k_1 + \ldots + k_n \geqslant k) \tag{2.2}$$

Для $k_1 + \ldots + k_n = k$ функции $v_s^*(t)$ равны $u_s^*(t)$, а при $k_1 + \ldots + k_n > k$ функции $v_s^*(t)$ представляются в виде многочленов от $u_s^*(t)$ с различными индексами $(k_1, \ldots, k_n)$.

В новых переменных вместо системы (1.6) получим

$$x_s^{\cdot} = \varkappa_{s-1} x_{s-1} + \sum_{l\geqslant 2}^{\infty} X_s^{(l)}(x_1, \ldots, x_n; t) \qquad (s = 1, \ldots, n;\ \varkappa_0 = 0) \tag{2.3}$$

В (2.3) формы $X_s^{(l)}$ для $l \leqslant k-1$ $(s = 1, \ldots, n)$ равны $Y_s^{(l)}$ с заменой y_s на x_s, а $X_s^{(k)}$ имеют вид

$$X_s^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; t) = \sum a_s^*(t)\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \qquad (k_1 + \ldots + k_n = k;\ s = 1, \ldots, n)$$

Для определения коэффициентов $a_s^*(t)$ получим уравнения

$$a_s^*(t) = -\frac{du_s^*}{dt} - (k_2+1)\varkappa_1 u_s^{(k_1-1,\, k_2+1,\, k_3, \ldots, k_n)} - (k_3+1)\varkappa_2 u_s^{(k_1,\, k_2-1,\, k_3+1,\, k_4, \ldots, k_n)} -$$

$$- \ldots - (k_n+1)\varkappa_{n-1} u_s^{(k_1, \ldots, k_{n-1},\, k_n+1)} + \varkappa_{s-1} u_{s-1}^* + A_s^*(t) \tag{2.4}$$

Определим вначале коэффициент $a_1^{(0\ldots 0k)}$ из уравнения

$$a_1^{(0\ldots 0k)} = -\frac{du_1^{(0\ldots 0k)}}{dt} + A_1^{(0\ldots 0k)}(t)$$

Это уравнение будет иметь почти-периодическое решение для $u_1^{(0\ldots 0k)}(t)$, указанной выше структуры, если

$$a_1^{(0\ldots 0k)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A_1^{(0\ldots 0k)}(t)\, dt \tag{2.5}$$

Таким образом, коэффициент $a_1^{(0\ldots 0k)}$ будет или постоянной величиной, или, в частном случае, нулем.

Выбрав $a_1^{(0\ldots 0k)}$ из (2.5), $u_1^{(0\ldots 0k)}(t)$ определим из уравнения

$$u_1^{(0\ldots 0k)} = \int_0^t [A_1^{(0\ldots 0k)}(t) - a_1^{(0\ldots 0k)}]\, dt$$

После того, как определена функция $u_1^{(0\ldots 0k)}$, можно определять $u_1^{(0\ldots 0,1,\,k-1)}$ или $u_2^{(0\ldots 0k)}$. При этом известную величину $k\varkappa_{n-1}u_1^{(0\ldots 0k)}$ или $\varkappa_1 u_1^{(0\ldots 0k)}$ необходимо отнести к известному коэффициенту $A_1^{(0,\ldots,0,1,\,k-1)}$ или $A_2^{(0\ldots 0k)}$. Коэффициенты $a_1^{(0,\ldots,0,1,\,k-1)}$ или, соответственно, $a_2^{(0\ldots 0k)}$ будут опять постоянными (в частности могут быть нулями).

Продолжая аналогично далее, придем к тому, что формы k-го порядка в системе (2.3) будут иметь постоянные коэффициенты, а все u_s^* $(k_1 + \ldots + k_n = k)$ будут почти-периодическими функциями той же структуры, что и коэффициенты $A_s^*(t)$

Давая числу k значения 2,3, . . ., N, получим систему, в которой все формы до N-го порядка включительно будут иметь постоянные коэффициенты.

На основании изложенного можно сформулировать теорему.

Теорема 2.1. Если система уравнений (1.1) такова, что:

1) уравнение $|p_{ij} - \delta_{ij}\varkappa| = 0$ имеет p нулевых корней, q пар чисто мнимых и k корней с отрицательными вещественными частями;

2) функции X_i голоморфны в отношении $x_1, \ldots, x_m$, обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_m = 0$, а коэффициенты их разложений по степеням x_i являются почти-периодическими функциями t, представимыми конечными рядами Фурье с произвольным спектром частот, то в случаях несущественно особенных исследование устойчивости этой системы всегда приводится к эквивалентной задаче об устойчивости установившегося движения в критическом случае $(p + 2q)$ нулевых корней.

Замечание. После того как система (1.2) преобразована к виду (1.6), можно получить аналогичный результат, приводя систему (1.6) к так называемому стандартному виду и применяя преобразование Крылова — Боголюбова [4].

Поступила 11 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости периодических движений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
2. Насыров Р. М. Об устойчивости почти-периодических движений в некоторых критических случаях. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теорет. механ., 1964, т. 5, вып. 2.
3. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
4. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, 1937.