ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ СЛАБО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ БОЛЬШОЙ, НО КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

А. Г. Куликовский

(Москва)

Обычно при изучении устойчивости течений жидкости в плоской трубе [1] рассматривают поведение во времени бесконечной периодической волны вида $\varphi(y) \exp i(kx - \omega t)$ с действительными значениями k. Связь ω и k находится из условия существования нетривиального решения краевой задачи для $\varphi(y)$ и задается многозначной аналитической функцией $k(\omega)$. Было показано [1,2], что у функции $k(\omega)$ существует только одна ветвь $k_1(\omega)$, которая может давать действительные значения k при $\operatorname{Im}\omega > 0$, и соответствует возмущениям, распространяющимся вниз по потоку. Для течений несжимаемой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса функция $k_1(\omega)$ для действительных значений ω была рассчитана в работе [3]. Очевидно, что поведение функции $k_1(\omega)$ мало изменится, если жидкость сжимаема, но сжимаемость достаточно мала.

Условие неустойчивости течения в трубе большой, но конечной длины заключается [3,4] в том, что уравнение

$$\operatorname{Im}[k_1(\omega) - k_a(\omega)] = 0 \tag{1}$$

имеет решения ω с $\operatorname{Im}\omega > 0$, причем в уравнении (1) под $k_a(\omega)$ будем пока понимать ветвь функции $k(\omega)$, выражающую волновое число какого-либо возмущения, распространяющегося вверх по потоку. Покажем, что для течений слабо сжимаемой жидкости с большими числами Рейнольдса это условие неустойчивости выполнено, причем в качестве $k_a(\omega)$ нужно взять ветвь, соответствующую акустическим колебаниям, распространяющимся вверх по потоку.

Если жидкость сжимаема или стенки трубы упругие, то в ней могут распространяться акустические волны или волны Жуковского. Длина этих волн при заданной частоте будет тем больше, чем меньше сжимаемость жидкости и стенок. При большой длине волны можно пренебречь поперечными составляющими скорости и градиента давления. Избыток давления в некотором сечении будет пропорционален избытку массы, приходящейся на единицу длины трубы, так что

$$i\omega p = ik_a\rho_0 a^2 \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u\, dy \tag{2}$$

где k_a и ω — волновое число и частота рассматриваемой волны, ρ_0— плотность жидкости, a — скорость распространения возмущений, u — продольная составляющая возмущения скорости. При получении равенства (2) предполагалось что $\omega/k_a \gg u$.

Функция $u(y)$ удовлетворяет уравнению

$$u''(y) = -i\omega R u + iR\frac{k_a^2 a^2}{\omega}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u\, dy \tag{3}$$

Здесь R — число Рейнольдса. Пронормируем $u(y)$ так, чтобы

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u\, dy = 1 \tag{4}$$

Тогда решение уравнения (3), удовлетворяющее нулевым граничным условиям, запишется в виде

$$u = \frac{a^2 k_a^2}{\omega^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{-i\omega R}\, y}{\operatorname{ch}\sqrt{-i\omega R}}\right] \tag{5}$$

Связь ω и k_a находится из уравнения (4) после подстановки в него выражения (5)

$$\frac{a^2 k_a^2}{\omega^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{-i\omega R}}\operatorname{th}\sqrt{-i\omega R}\right]=1 \tag{6}$$

Так как акустические волны в вязкой жидкости — затухающие (см. ниже уравнение (7)), то при $\operatorname{Im}\omega > 0$ для волны, распространяющейся вверх по потоку, должно выполняться неравенство $\operatorname{Im} k_a < 0$. Известно [1,3], что все значения ω из верхней комплексной полуплоскости, для которых $\operatorname{Im} k_1(\omega) < 0$, изменяются при возрастании R таким образом, что $\omega R \to \infty$ при $R \to \infty$. Поэтому при больших значениях R уравнения (1) и (6) достаточно рассматривать только для значений ω, удовлетворяющих условию $\omega R \gg 1$. Тогда из уравнения (6) для волны, распространяющейся вверх по потоку, получим

$$k_a = -a^{-1}\omega\left(1+\frac{1}{2}\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\omega R}}\right) \tag{7}$$

где берется арифметическая ветвь корня при $-\pi/2 < \arg\omega < 3\pi/2$.

При $a \to \infty$ и произвольном ω с $\operatorname{Im}\omega > 0$ величина k_a стремится к нулю, приближаясь к точке $k = 0$ из нижней полуплоскости. Поэтому при достаточно больших значениях a и числах Рейнольдса уравнение (1) имеет корни ω в верхней полуплоскости, и рассматриваемое течение неустойчиво.

Уравнение (1), служащее для определения собственных частот возмущений в трубе, принимает для несжимаемой жидкости предельный вид

$$\operatorname{Im} k_1(\omega) = 0 \tag{8}$$

Уравнение (8) совпадает с уравнением для комплексной частоты бесконечной периодической волны, которое совместно с неравенством $\operatorname{Im}\omega > 0$ используется обычно [1] в качестве критерия неустойчивости течения в бесконечной трубе. Заметим, что для несжимаемой жидкости на основании существования ветви $k_a(\omega) \equiv 0$ нельзя непосредственно без предельного перехода $a \to \infty$ написать уравнение (1) в форме (8), так как в этом случае не удовлетворяется условие Г. И. Петровского, выполнение которого предполагалось в работе [4] при выводе уравнения (1). (Условие Петровского заключается в том, что для всех возмущений $\operatorname{Im} k \neq 0$, если $\operatorname{Im}\omega$ достаточно велика; оно обеспечивает корректность постановки задачи Коши.)

Заметим, что решения $\varphi(y)$ уравнения Орра — Зоммерфельда, соответствующие ветви $k_a(\omega) \equiv 0$, нельзя считать собственными функциями, так как они должны удовлетворять на каждой из стенок только условию $\varphi'(\pm 1) = 0$, в то время как условие непротекания $k\varphi(\pm 1) = 0$ не накладывает на φ никаких ограничений.

Возмущения, соответствующие $k_a(\omega)$, как следует из уравнения (4), связаны с изменением расхода жидкости, который при $a = \infty$ становится не зависящим от x.

В тех случаях, когда граничные условия на концах трубы исключают возможность изменения расхода, или, когда при отражении от концов трубы акустическая волна и волна, соответствующая $k_1(\omega)$, не могут порождать одна другую (например по той причине, что они имеют различную симметрию: одной из них соответствует четная по y функция тока, а другой — нечетная), ветвь $k_a(\omega)$ не должна приниматься во внимание, и в уравнении (1) ее нужно заменить другой ветвью функции $k(\omega)$, соответствующей возмущениям, распространяющимся вверх по потоку. Такое уравнение было рассмотрено в работе [3] для несжимаемой жидкости и было показано, что при больших значениях числа Рейнольдса оно не имеет решений ω в верхней полуплоскости, т. е. что при указанных условиях течения с заданным расходом жидкости не являются глобально [4] неустойчивыми.

Интересно упомянуть, что течение в бесконечной трубе при достаточно большом числе Рейнольдса обладает только сносовой неустойчивостью, так что, если начальное возмущение ограничено в пространстве, то при $t \to \infty$ возмущения стремятся к нулю в любой фиксированной точке [5]. Таким образом, концы трубы, если они могут порождать возмущения расхода, оказывают на течение слабо сжимаемой жидкости дестабилизирующее действие, приводящее при больших числах Рейнольдса к неустойчивости. Течения же с постоянным расходом остаются устойчивыми.

Поступила 4 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М. Изд-во иностр. лит. 1958.
2. Grone D. Uber das spektrum bei eigenschwingungen ebener Laminarstromungen. ZAMM, b. 35, s. 344.
3. Куликовский А. Г. Об устойчивости течения Пуазейля и некоторых других плоскопараллельных течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
4. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
5. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. Об абсолютной устойчивости некоторых плоскопараллельных течений при больших числах Рейнольдса. ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 10.

К УСТОЙЧИВОСТИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

В. Г. Веретенников

(Москва)

Г. В. Каменковым [1] доказана теорема о том, что при исследовании устойчивости периодических движений в критических несущественно особенных случаях всегда можно перейти к исследованию устойчивости установившегося движения в критическом случае кратного нулевого корня.

Этот результат распространяется на почти-периодические движения. Предполагается, что линейная система приводима и что почти-периодические коэффициенты правых частей дифференциальных уравнений возмущенного движения представимы конечными рядами Фурье с произвольным спектром частот.

Обобщаются результаты работы [2], где доказывается возможность сведения задачи устойчивости почти-периодических движений к исследованию устойчивости установившегося движения лишь в нерезонансных случаях.

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$x_i^{\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}x_j + X_i(x_1, \ldots, x_m; t), \quad X_i(x_1, \ldots, x_m; t) = \sum_{l\geqslant 2}^{\infty} X_i^{(l)}(x_1, \ldots, x_m; t)$$
$$(i = 1, \ldots, m) \qquad (1.1)$$

Здесь p_{ij} — постоянные коэффициенты, X_i — голоморфные функции $x_1,\ldots, x_m$ с почти-периодическими коэффициентами, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_m = 0$. Будем предполагать, что почти-периодические коэффициенты представимы конечными рядами Фурье с произвольным спектром частот.

К виду (1.1), как известно, может быть приведена любая система, нелинейные члены которой имеют структуру X_i, а при линейных членах коэффициенты являются периодическими функциями одного и того же периода. Известны также различные случаи приводимости к виду (1.1) систем, линейные члены которых имеют почти-периодические коэффициенты.

Предположим, что характеристическое уравнение системы (1.1) имеет k корней с отрицательными вещественными частями и n корней с вещественными частями, равными нулю, среди которых p нулевых и q пар чисто мнимых корней. Как показано в